



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже ~~велосипедиста~~. Найдите расстояние между A и B .
7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = \sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~1

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a \cdot b &: 3^{14} \cdot 7^{13} \\ b \cdot c &: 3^{13} \cdot 7^{17} \\ a \cdot c &: 3^{23} \cdot 7^{42} \end{aligned} \quad \Bigg| \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 &: 3^{14+13+23} \cdot 7^{13+17+42} \\ a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 &: 3^{50} \cdot 7^{72} \\ \Rightarrow abc &: 3^{25} \cdot 7^{36} \end{aligned}$$

$$abc = k \cdot 3^{25} \cdot 7^{36}, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \min(abc) = 3^{25} \cdot 7^{36}$$

(при $k=1$)

$$\text{Ответ: } \min(a \cdot b \cdot c) = 3^{25} \cdot 7^{36}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓2

$a, b \in \mathbb{N}$
 $\frac{a}{b}$ несократима $\Rightarrow a$ и b не имеют общ. делителей

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 11ab}$$

~~$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 11ab}$~~

$$\frac{a+b}{a+b} = \frac{11ab}{a+b}$$

Если $\frac{a}{b}$ несократима, то $\frac{11a}{b}$ несократима, но условию если ~~сократима~~ $\frac{11a}{b}$
ок

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 $\sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2+x+1} = 5-6x$

Замена: $\sqrt{3x^2-5x+6} = a, a \geq 0$

$\sqrt{3x^2+x+1} = b, b \geq 0$, тогда $5-6x = a^2 - b^2$

$\Rightarrow \begin{cases} a-b = a^2-b^2 \\ a \geq 0, b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)(a+b) - (a-b) = 0 \\ a \geq 0, b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)(a+b-1) = 0 \\ a \geq 0, b \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a \geq 0, b \geq 0 \end{cases}$

Т.о. $\begin{cases} \sqrt{3x^2-5x+6} = \sqrt{3x^2+x+1} & (1) \\ \sqrt{3x^2-5x+6} + \sqrt{3x^2+x+1} = 1 & (2) \end{cases}$

(1) $\sqrt{3x^2-5x+6} = \sqrt{3x^2+x+1} \Leftrightarrow 3x^2-5x+6 = 3x^2+x+1 \Leftrightarrow x = \frac{5}{6}$

(2) $\sqrt{3x^2-5x+6} + \sqrt{3x^2+x+1} = 1$

$\begin{cases} \sqrt{3x^2-5x+6} \geq 0 \\ \sqrt{3x^2+x+1} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2-5x+6 \leq 1 \\ 3x^2+x+1 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-5x+5 \leq 0 \\ 3x^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-\frac{1}{3}, 0]$

$\sqrt{3(x-\frac{5}{6})^2 + \frac{47}{12}} + \sqrt{3(x+\frac{1}{6})^2 + \frac{11}{12}} = 1$

$\Rightarrow \min \left(\sqrt{3(x-\frac{5}{6})^2 + \frac{47}{12}} \right) = \sqrt{\frac{47}{12}}$

$\alpha \min \left(\sqrt{3(x+\frac{1}{6})^2 + \frac{11}{12}} \right) = \sqrt{\frac{11}{12}}$

очень
значимое
выражение

$\frac{\sqrt{47} + \sqrt{11}}{\sqrt{12}}$

$6 < \sqrt{47} < 7$
 $3 < \sqrt{11} < 4$
 $3 < \sqrt{12} < 4$

$\Rightarrow 3 < \frac{\sqrt{47} + \sqrt{11}}{\sqrt{12}} < 3\frac{3}{4}$

Ответ: $x = \frac{5}{6}$

$\Rightarrow \sqrt{3x^2-5x+6} + \sqrt{3x^2+x+1} = 1$ (не имеет решений)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$BC=25$$

$$AC=1$$

$$(-) O \in \Omega$$

$$AB \cap \omega = C$$

$$MK=?$$

$$1). AB = AC + BC = 26$$

$$BO_1 = O_1A = \frac{1}{2} AB \text{ (как радиусы)}$$

$$\Rightarrow O_1C = O_1A - AC = 12$$

$$2). \text{Проведём } O_1K \perp MN \text{ (так как радиус проведённый в точку кас.)}$$

$$3). \text{Проведём } OC \perp MA \text{ (как радиус проведённый в точку кас.)}$$

$$\triangle OCO_1: \text{— прямоугольный } (OC \perp MA)$$

$$OO_1 = 13 \text{ (как радиус } \Omega \text{)}$$

$$O_1C = 12$$

$$\Rightarrow OC = \sqrt{169 - 144} = 5$$

$$4). ON \perp MN \text{ (радиус, проведённый в точку кас.)}$$

$$O_1K \perp MN \text{ (} \simeq \simeq \text{)}$$

$$\Rightarrow ON \parallel O_1K \text{ (две прямые, перпендик. к третьей } \parallel \text{)}$$

$$\Rightarrow \text{Четырёхугольник } ONKO_1 \text{ — трапеция.}$$

$$\text{Проведём } OH = NK$$

$$OH = OK - ON = 8$$

$$\Rightarrow \text{По т. Пифагора:}$$

$$OH = NK = \sqrt{O_1O^2 - O_1H^2} = \sqrt{105}$$

$$\text{Ответ: } \boxed{NK = \sqrt{105}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5

$$5x - y = 3z \quad (1) \quad x, y, z \neq 0$$

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \quad (2)$$

$$\min \left(\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} \right) \quad (3)$$

Умножим (1) на (2):

$$40 + \frac{5x}{y} - \frac{8y}{x} - 1 = 45$$

$$\Rightarrow 5 \cdot \frac{x}{y} - 8 \cdot \frac{y}{x} = 6 \quad \text{Заменим: } t = \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow 5t - \frac{8}{t} = 6$$

$$\Rightarrow 5t^2 - 6t - 8 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{3 \pm 7}{5} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Подставим в (1):

$$\begin{cases} z = 3y \\ z = -\frac{5y}{3} \end{cases}$$

$$\text{т.о.} \begin{cases} x = 2y \\ x = -\frac{4y}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 3y \\ x = 2y \end{cases} \quad \text{Подставим в (3):}$$

$$(1) \text{ случай } \begin{cases} x = 2y \\ z = 3y \end{cases}$$

$$\frac{25 \cdot 4y^2 - y^2 - 9y^2}{y^2 + 3 \cdot 9y^2} = \frac{100y^2 - y^2 - 9y^2}{28y^2} = \frac{90y^2}{28y^2} = \frac{45}{14}$$

$$(2) \text{ случай } \begin{cases} x = -\frac{4y}{5} \\ z = -\frac{5y}{3} \end{cases}$$

$$\frac{25 - \left(-\frac{4y}{5}\right)^2 - y^2 - \left(-\frac{5y}{3}\right)^2}{y^2 + 3 \cdot \left(-\frac{5y}{3}\right)^2} = \frac{25 - \frac{16y^2}{25} - y^2 - \frac{25y^2}{9}}{y^2 + 25y^2} = \frac{16y^2 - y^2 - \frac{25y^2}{9}}{y^2 + \frac{25y^2}{9}} = \frac{16 \cdot 9 - 9 - 25}{9} = \frac{28}{3}$$

$$\text{Ответ: } \min \left(\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} \right) = \frac{55}{42} = \frac{13}{42}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5x - y = 3z \quad (1)$$

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \quad (2)$$

$$\frac{8y+x}{xy} = \frac{15}{z} \Rightarrow z = \frac{15xy}{8y+x}$$

$$\min \left(\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} \right) - ?$$

$$25x^2 + y^2 -$$

$$5x = 3z + y \Rightarrow 25x^2 = (3z + y)^2$$

$$\frac{(3z + y)^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{8z^2 + 6zy}{y^2 + 3z^2} \quad (3)$$

х выразим из (1) и подставим в (2):

$$\frac{40}{3z+y} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \Rightarrow \frac{41y+3z}{(3z+y)y} = \frac{15}{z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{41yz + 3z^2 - 15zy - 15y^2}{(3z+y)zy} = 0$$

$$\frac{3z^2 - 4zy - 15y^2}{(3z+y)(-zy)} = 0 \Rightarrow \frac{(3z^2 + y^2) - (16y^2 + 4zy)}{(3z+y)(-zy)} = 0$$

$$\Rightarrow y^2 + 3z^2 = 16y + 4zy \quad \text{подстав-} \\ \text{ляем в (3)}$$

$$\Rightarrow \frac{8z^2 + 6zy}{16y + 4zy} = \frac{4z^2 + 3zy}{8y^2 + 2zy}$$

$$\text{сложим (1) + (2): } 5x + \frac{8}{x} - y + \frac{1}{y} = 3z + \frac{15}{z}$$

$$5x - y -$$

$$\text{умножим (1) на (2): } 40 + \frac{5x}{y} - \frac{8y}{x} - 1 = 45 \Rightarrow \frac{5x}{y} - \frac{8y}{x} = 6 \\ \Rightarrow \frac{x}{y} = z, \frac{y}{x} = -\frac{4}{5}$$

$$\frac{45xy}{x+8y} - \frac{5x-y}{1} \cdot \frac{x+8y}{x+8y} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{45xy - 5x^2 - 40xy + xy + 8y^2}{x+8y} = 0$$

$$\Leftrightarrow 8y^2 - 5x^2 + 6xy = 0$$

$$(3x+y)^2 - 14x^2 + 7y^2 = 0$$

$$(-11x+y)(17x+y)$$

$$(3x+y-\sqrt{14}x)(3x+y+\sqrt{14}x) = -7y^2$$

$$(x(3-\sqrt{14})+y)(x(3+\sqrt{14})+y) = -7y^2$$

$$-7y^2 \leq 0 \text{ всегда}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(3-\sqrt{14})+y < 0 \\ x(3+\sqrt{14})+y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(3-\sqrt{14})+y > 0 \\ x(3+\sqrt{14})+y < 0 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} S &= z \\ v_B &= x \\ v_A &= y \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{z}{x} - \frac{z}{y} = 1 \\ z \cdot \frac{x}{y} - z \cdot \frac{y}{x} = -49 \\ \frac{z}{x+7} - \frac{z}{y+7} = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$z = \frac{xy}{y-x}$$

$$z = \frac{49 \cdot z \cdot y \cdot x}{49}$$

$$z = \frac{49}{\frac{y}{x} - \frac{x}{y}} \Rightarrow \frac{49 \cdot xy}{y^2 - x^2}$$

$$\begin{aligned} x+7 &= K \\ y+7 &= p \end{aligned}$$

$$z \cdot \frac{p-K}{pK} = \frac{3}{5}$$

$$z = \frac{3pK}{5(p-K)}$$

$$z = \frac{3(x+7)(y+7)}{5(y-x)}$$

$$\frac{z}{x+7} - \frac{z}{56-x} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{xy}{y-x} = \frac{49xy}{y^2 - x^2} \Rightarrow \frac{49}{y-x} = \frac{49 \cdot xy}{y^2 - x^2}$$

$$49 = y+x$$

$$\boxed{x+y=49}$$

$$280z - 5zx - 5zx - 35z - 168x + 3x^2 - 1176 + 2(x \dots)$$

$$z = \frac{3(xy+7x+7y+49)}{5(y-x)}$$

$$145z - (0zx - 147x + 3x^2 - 1176) = 0$$

$$z = \frac{(49-x)x}{49-2x}$$

$$\frac{3xy+21x+21y+147}{5(y-x)} = \frac{49-xy}{(y-x)(511)}$$

$$-3x^2 + 147x = 147z - 6xz$$

$$3x^2 - 147x = 1176 + 10zx - 145z$$

$$49 \cdot 5 - 5xy = 49 \cdot (3xy + 21x + 21y + 147)$$

$$0 = 2z + 4xz + 1176$$

$$245 - 5xy = 147xy + 1029x + 1029y + 47203 \Rightarrow z + 2xz + 588 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-z-588}{2z}$$

$$152xy + 1029x + 1029y + 6958 = 0$$

$$49z - (-z-588) = \frac{-49(z+588)}{2z} - \frac{(z+588)^2}{4z^2}$$

$$\frac{-6958 - 1029y}{152y + 1029} = 49 - y$$

$$48z \neq$$

$$50z + 588 =$$

$$\frac{-49z - 3882}{2z} - \frac{z^2}{4z^2}$$

$$-6958 - 1029y = -152y^2 - 1029y + 152y \cdot 49 + 49 \cdot 1029$$

$$152y^2 - 57379y = 0$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 21 \\ \hline 112 \\ 112 \\ \hline 1176 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1029 \\ \times 49 \\ \hline 9261 \\ 10290 \\ \hline 50421 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 152 \\ \times 49 \\ \hline 1368 \\ 7568 \\ \hline 7500 \\ -42 \\ \hline 7458 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50421 \\ + 6958 \\ \hline 57379 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 57379 \\ \times 152 \\ \hline 1177 \\ 86058 \\ 86058 \\ \hline 1239 \end{array}$$



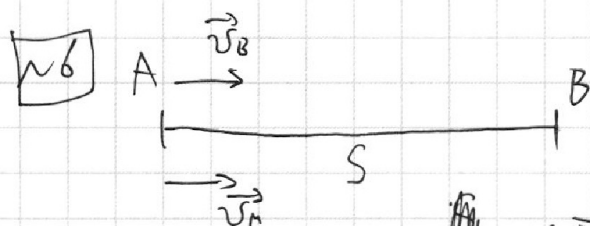
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$v_B = \text{const}$$
$$v_M = \text{const}$$

$$\frac{S}{v_B} = t_B$$

$$\frac{S}{v_M} = t_M$$

$$v_B \cdot t_B = v_M \cdot t_M$$

$$\frac{S}{v_B} - 1 = \frac{S}{v_M} \quad (1)$$

$$v_B \cdot t_M = v_M \cdot t_B - 49 \quad (2)$$

$$\frac{S}{v_B + 7} = \frac{S}{v_M + 7} + 0,6 \quad (3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{S}{v_B} - \frac{S}{v_M} = 1 & (1) \\ S \cdot \frac{v_B}{v_M} = S \cdot \frac{v_M}{v_B} - 49 & (2) \\ \frac{S}{v_B + 7} = \frac{S}{v_M + 7} + 0,6 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \quad S \frac{(v_M - v_B)}{v_B \cdot v_M} = 1 \Rightarrow S = \frac{v_B \cdot v_M}{v_B - v_M}$$

Подставим во (2):

$$\frac{v_B^2}{v_M - v_B} = \frac{v_M^2}{v_M - v_B} - 49 \Leftrightarrow v_B^2 = v_M^2 - 49v_M + 49v_B$$

$$\Leftrightarrow v_M^2 - 49v_M + 49v_B - v_B^2 = 0$$
$$\Rightarrow v_M = \frac{49 \pm \sqrt{49^2 - 4(49v_B - v_B^2)}}{2}$$

