



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 a, b, c - кат.

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc : 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$\min abc? \quad (abc)^2 : 2^{55} \cdot 7^{68}$$

Если квадрат делится на 2^{55} то
степеней вхождения 2 в него ~~на~~ минимум
~~56~~ так как степени вхождения в
каждый квадрат четны

$$(abc)^2 : 2^{56} \cdot 7^{68}$$

$$abc : 2^{28} \cdot 7^{34}$$

откуда $ac : 7^{39}$
делится на 7^{39}

значит abc делится

$$\text{откуда } abc : 2^{28} \cdot 7^{39}$$

и ~~даже~~

и правда можно найти a, b, c чтобы
условия выполнялись

например!

$$a = 7^{20} \cdot 2^{17}$$

$$b = 2^5$$

$$c = 7^{19} \cdot 2^{12}$$

$$\text{Ответ: } abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2N/2

~~а. а. а. а. а.~~

$$\text{НОД}(a, b) = 1$$

$$a \in \mathbb{N} \quad b \in \mathbb{N}$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

таким

$$\text{когда } \text{НОД}(a+b, a^2-7ab+b^2) = 1$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

~~одно из чисел a, b четно~~

$$\frac{a+b}{a-b}$$

$$\frac{a+b}{a-3b+b} = \frac{a+b}{a-2b}$$

если $a+b$ на ~~какой-то делитель~~ что-то делится то $(a+b)^2$ тоже,
значит ~~чтобы~~ число $9ab$ сократился $9ab$ - тоже
должно делиться на этот делитель

Рассмотрим, когда $a+b$ и $9ab$ могут
иметь общий делитель, обозначим его N
если $a : N$ то $b : N$ и наоборот, ~~а значит~~ тогда

$$a+b : N \quad \text{значит, чтобы } a+b : N \text{ должно}$$

$$\text{быть так что } a : N \text{ и } b : N \text{ но тогда } a+b \text{ не}$$

$$\text{быть } a+b : N \text{ но если } a+b \text{ и } a+b \text{ не могут}$$

иметь общий делитель, тогда найдем общий
возможный общий делитель $a+b$ и $9ab$ это

и действительно это возможно например при $a=5$
тогда 9 $b=4$

$$\frac{9}{9^2-9 \cdot 4 \cdot 5}$$

сокращается на 9

ответ: 9



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Упрощение задачи 01/4 (2 части)

$$(2): x = \frac{6-2\sqrt{78}}{69}$$

условия должны выполняться одно из следующих

$$\frac{6-2\sqrt{78}}{69} \stackrel{①}{\leq} 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{или} \quad \frac{6-2\sqrt{78}}{69} \stackrel{②}{\geq} 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$①: \frac{6-2\sqrt{78}-69+23\sqrt{3}}{69} \leq 0$$

$$23\sqrt{3} \leq 63 \quad (\sqrt{3} < 2) \quad 46+6 < 69$$

тогда неравенство выполняется и

$$\frac{6-2\sqrt{78}}{69} \text{ корень}$$

$$\text{Ответ: } x \in \left\{ \frac{1}{9}, \frac{6+2\sqrt{78}}{69}, \frac{6-2\sqrt{78}}{69} \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение задачи 01/4

~~$75x^2 - 64x - 2 = 0$~~ $69x^2 - 12x - 4 = 0$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 + 4 \cdot 4 \cdot 69}}{138}$$

$$x = \frac{12 \pm 4\sqrt{9 + 69}}{138}$$

$$x = \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{138}$$

~~$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{78}}{23}$~~

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

$$\begin{cases} x = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} & (1) \\ x = \frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} & (2) \end{cases}$$

11: $x = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69}$

Проверим корни.
должны выполняться: ② $\frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} > 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ или $\frac{6 - 2\sqrt{78}}{69} > 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\textcircled{1} \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} - 69 - 23\sqrt{3} \geq 0 \quad \frac{6 + 2\sqrt{78}}{\sqrt{78}} < 9 \quad 6 + 2\sqrt{78} < 69$$

неравенство не выполняется

$$\textcircled{2} \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \leq 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} - 69 + 23\sqrt{3} \leq 0$$

$$23\sqrt{3} < 47,4 \quad 2\sqrt{78} < 78 \quad \text{т.к. } (\sqrt{78} < 9)$$

$$6 + 2\sqrt{78} + 23\sqrt{3} < 65,4 \quad \text{неравенство выполняется}$$

$$x = \frac{6 + 2\sqrt{78}}{69} \text{ корень}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



94. $\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$

вычитаем: $3x^2 - 6x + 2$

$3x^2 + 3x + 1 = Z$

$1 - 9x = t$

$\sqrt{Z + t} - \sqrt{Z} = t$

$\sqrt{Z + t} = t + \sqrt{Z}$

$Z + t = t^2 + 2t\sqrt{Z} + Z$

$t^2 + t(2\sqrt{Z} - 1) = 0$

$t(t + 2\sqrt{Z} - 1) = 0$

$t = 0$ (1)

$t = 1 - 2\sqrt{Z}$ (2)

(1) $t = 0$ $1 - 9x = 0$ $x = \frac{1}{9}$ ~~так~~ проверим этот корень

$\sqrt{\frac{3}{81} - \frac{6}{9} + 2} - \sqrt{\frac{3}{81} + \frac{1}{3} + 1} = 0$ равенство верно

$\sqrt{\frac{3}{81} + 1 + \frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{3}{81} + 1 + \frac{1}{3}} = 0$ равенство верно

$x = \frac{1}{9}$ корни

(2) $t = 1 - 2\sqrt{Z}$

$1 - 9x = 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$

$9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$ $x > 0$

$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$

$75x^2 - 12x - 4 = 0$

Ограничения:

$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$

$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$

$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{6}$

$x \in (-\infty, 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{1}{3}, \frac{1 + \sqrt{3}}{3})$

$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{6}$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{3}$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{3}$

$x \in (-\infty, 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{1}{3}, \frac{1 + \sqrt{3}}{3})$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6 ~~продолжение~~ ^{продолжение, 2 часть} ~~(2 часть)~~

~~$- \alpha \leq \lg 2$~~ ~~$-\alpha = \frac{1}{\sqrt{15}}$~~ ~~$\alpha = -\frac{1}{\sqrt{15}}$~~ ~~первое значение~~

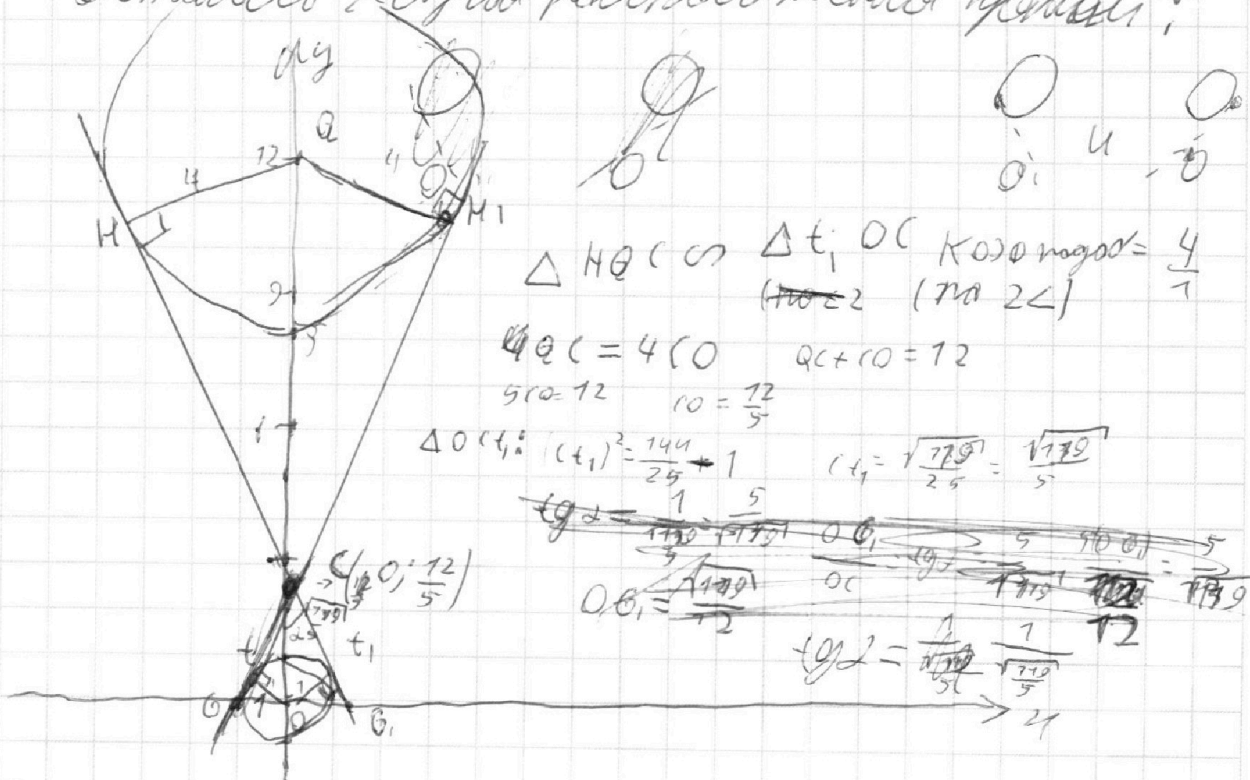
~~прямая LZ~~

ZL' одна из подпадающих прямых $y = -\alpha x + 80$
причем $-\alpha$ в ней всегда равно $\lg 5$

$\lg 5 = \frac{16}{4}$
 $-\alpha = \lg 5 \quad -\alpha = \frac{16}{4} \quad \alpha = -4$

также подпадают прямая LZ её можно получить
получить $\alpha = 4$ ^{которая даёт} $y = -\alpha x + 80$
получили $\alpha = 4$

остаток — случай расположения прямой:





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

9/6

$$\begin{cases} ax+y-86=0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$(2): \begin{cases} \begin{cases} x^2+y^2-1 \geq 0 \\ x^2+(y-12)^2-16 \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2-1 \leq 0 \\ x^2+(y-12)^2-16 \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

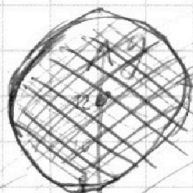
(2).1

$$\begin{cases} x^2+y^2 \geq 1^2 \\ x^2+(y-12)^2 \leq 4^2 \end{cases} \quad (2).1$$

(2).2

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leq 1^2 \\ x^2+(y-12)^2 \geq 4^2 \end{cases} \quad (2).2$$

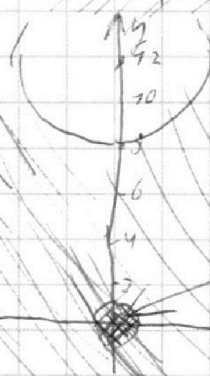
(2).1:



решения это точки
внутри окр. (центр (0,12) и R=4

$ax+y-86=0$ и прямая

(2).2:



решения это точки внутри
окр. (центр (0,0) и R=1

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 Программирование (3 балла)

~~$OB_1 = OB$ (в силу из-за симметрии)~~

~~$OB =$~~ $\lg 2 = \frac{5}{\sqrt{119}}$

~~OB_1~~ $\frac{5}{\sqrt{119}}$

~~$5(0,0)$~~ $= \frac{5}{\sqrt{119}}$

$OB_1 = \frac{12}{\sqrt{119}}$

$\lg(\angle COB_1) = \frac{12}{5} = \frac{\sqrt{119}}{5}$

$\triangle COB_1 = \triangle COB$ (в силу ~~также~~ симметрии)

$\lg(\angle COB) = \lg(\angle COB_1) = \frac{\sqrt{119}}{5}$

прямая BM , одна из поднормальных прямых

$ax + y - 36 = 0$ $y = -ax + 36$ $\lg -a = \lg(\angle COB)$

$-a = \frac{\sqrt{119}}{5}$ $a = -\frac{\sqrt{119}}{5}$

также поднормаль BM которую можно получить
путём домножения BM на -1 в прямой, которая

задаёт BM , ~~тогда~~ получим $a = \frac{\sqrt{119}}{5}$

поэтому и считая рассмотренный случай, когда можно получить b ,
чтобы получить уравнение одн. касательной

Ответ: $a \in \{-4, -\frac{\sqrt{119}}{5}, \frac{\sqrt{119}}{5}, 4\}$

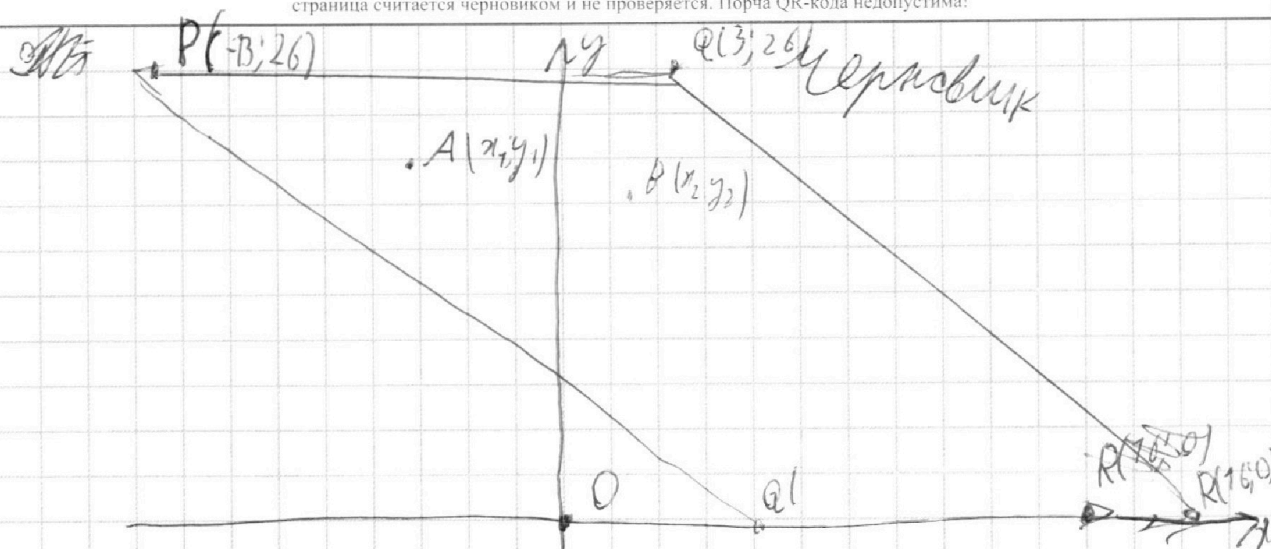
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



как в пар $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$
целыми координ.

чмо $2x_2 - 2x_7 + y_2 - y_7 = 74$

$$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 74$$

$$\textcircled{2} \quad x_2 + y_2 \text{ kW} = 74 + x_1 + 4y_1 +$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$LO_2 = LO + 13 \quad \text{Чермакин}$$

$$\sqrt{169 + 168x} = \frac{13}{2} + \sqrt{169 + 4 \cdot 168x}$$

$$\sqrt{169 + 168x} - \sqrt{169 + 4 \cdot 168x} = \frac{13}{2}$$

$$169 + 168x = \frac{169}{4} + 13 \cdot \sqrt{169 + 4 \cdot 168x} + 169 + 4 \cdot 168x$$

$$= 3 \cdot 168x$$

$$2 \sqrt{169 + 168x} = 13 + \sqrt{169 + 4 \cdot 168x}$$

$$4 \cdot 169 + 4 \cdot 168x = 169 + \sqrt{169 + 4 \cdot 168x} + 26 \sqrt{169 + 4 \cdot 168x}$$

$$26 \sqrt{169 + 4 \cdot 168x} = 2 \cdot 169$$

$$\sqrt{169 + 4 \cdot 168x} = 13$$

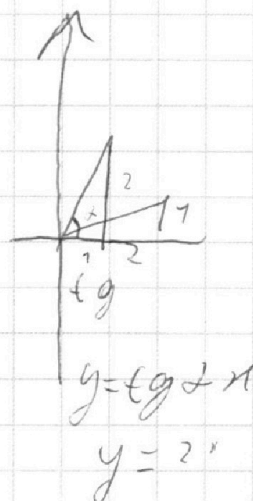
$$ax + y - 86 = 0$$

$$y = -ax + 86$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 76 \\ \times 76 \\ \hline 96 \\ 76 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$76 \cdot 16 - 16$$

$$76(15)$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

черновик

$$a = 7^{19} \cdot 2^{12} \quad b = 2^5$$
$$a = 7^{20} \cdot 2^{11}$$

$$b = 7^{10} \cdot 2^{17}$$
$$a \cdot b = 2^{16} \cdot 7^{20}$$
$$ca = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2$$

$$\frac{a^2 - 7ab + b^2}{a^2 + ab} \Big| \frac{a+b}{a}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 0 \quad x^2 - 2x + \frac{2}{3} = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{6}$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 12}}{3}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{12}$$

$$x = 1 \pm 2\sqrt{3}$$

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6}$$

$$x = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

