



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



① [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

② [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

③ [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

④ [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

* 5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.

⑥ [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

* 7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N1

$$a, b, c \in \mathbb{N}, \quad ab : 2^{15} \cdot 7^{11}, \quad bc : 2^{14} \cdot 7^{18}, \quad ac : 2^{23} \cdot 7^{39}.$$

$$\min(ab, bc, ac) = ?$$

Решение. Через $\nu_p(m)$ будем обозначать степень вхождения простого числа p в натуральное число m (например, $\nu_3(18) = 2$).

Заметим, что т.к. $ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$, то

$$ab, c : 7^{39} \Leftrightarrow \nu_7(ab) \geq 39. \quad \text{Заметим,}$$

что из условия:

$$\begin{cases} \nu_2(a) + \nu_2(c) = \nu_2(ac) \geq 23 \\ \nu_2(b) + \nu_2(c) = \nu_2(bc) \geq 14 \\ \nu_2(a) + \nu_2(b) = \nu_2(ab) \geq 15 \end{cases}$$

(яко, что $\nu_p(m) + \nu_p(n) = \nu_p(mn)$)

Сложив эти нер-ва, получим:

$$2(\nu_2(a) + \nu_2(b) + \nu_2(c)) = 2\nu_2(abc) \geq 55.$$

Число слева - четное, а справа - нечетное,

откуда (яко, что) $2\nu_2(abc) \geq 56 \Leftrightarrow$

$$\nu_2(abc) \geq 28, \text{ и раз } \nu_7(ab) \geq 39, \text{ получим}$$

$$abc : 2^{28} \cdot 7^{39}, \text{ откуда } \min(ab, bc, ac) = 2^{28} \cdot 7^{39}.$$

Покажем, что минимум достигается. Яко, что

подходят числа $a = 2^{11} \cdot 7^{21}$, $b = 2^4$ и $c = 2^{18} \cdot 7^{13}$.

Яко, что при таких a, b, c все условия задачи выпол-
няются и $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$.

Ответ. $\boxed{2^{28} \cdot 7^{39}} \rightarrow$
 $= abc$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N2

$$a, b \in \mathbb{N}, \frac{a}{b} - \text{краток}; \quad m \in \mathbb{N}, \frac{a+b}{a^2-4ab+b^2}$$

Сокр. на m . $\max(m) = ?$

Деление. Ясно, что $\frac{a}{b} - \text{краток}$.

$\Leftrightarrow a$ и b взаимно-просты $\Leftrightarrow$

$\text{НОД}(a; b) = 1$. Заметим, что

$a+b \vdots m$ и $a^2-4ab+b^2 \vdots m$, откуда

$a^2-4ab+b^2 = (a+b)^2 - 6ab \vdots m$, и раз

$a+b \vdots m$, то $6ab \vdots m$. Докажем,

~~что~~ что $\text{НОД}(a; m) = \text{НОД}(b; m) = 1$.

Пусть это не так, и $\text{НОД}(b; m) =$

$= n \in \mathbb{N}, n > 1$. Так $a+b \vdots m$ и

$m \vdots n$, то $a+b \vdots n$, и раз $b \vdots n$, то

$a \vdots n$, откуда $\text{НОД}(a; b) \geq n > 1$. Но

$\text{НОД}(a; b) = 1$, и мы пришли к противо-

речию. Значит, $\text{НОД}(b; m) = 1$. Аналогично

$\text{НОД}(a; m) = 1$. Следовательно тогда

$6ab \vdots m$ и $\text{НОД}(a; m) = \text{НОД}(b; m) = 1$,
(обратно) $\Rightarrow$ (тогда и только тогда)
что возможно лишь когда $6 \vdots m$. $\rightarrow$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение. Отсюда, $m=1$, $m=3$ или

$m=9$. Значит, $\max(m)=9$.

Покажем, что максимум достигается.

Возьмем $a=1$ и $b=17$. Ясно, что $\frac{a}{b} = \frac{1}{17}$ —

несокр. — брание того, $a+b=18:9=m$ и

$$a^2 - 4ab + b^2 = 289 - 4 \cdot 17 + 1 = 290 - 119 =$$

$$= 171 : 9 = m. \text{ Значит, и числитель,}$$

и знаменатель ~~являются~~ делят

$$\frac{a+b}{a^2 - 4ab + b^2}$$

делятся на $m=9$, и

максимум $m=9$ достигается.

Ответ.

$$\boxed{m=9}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

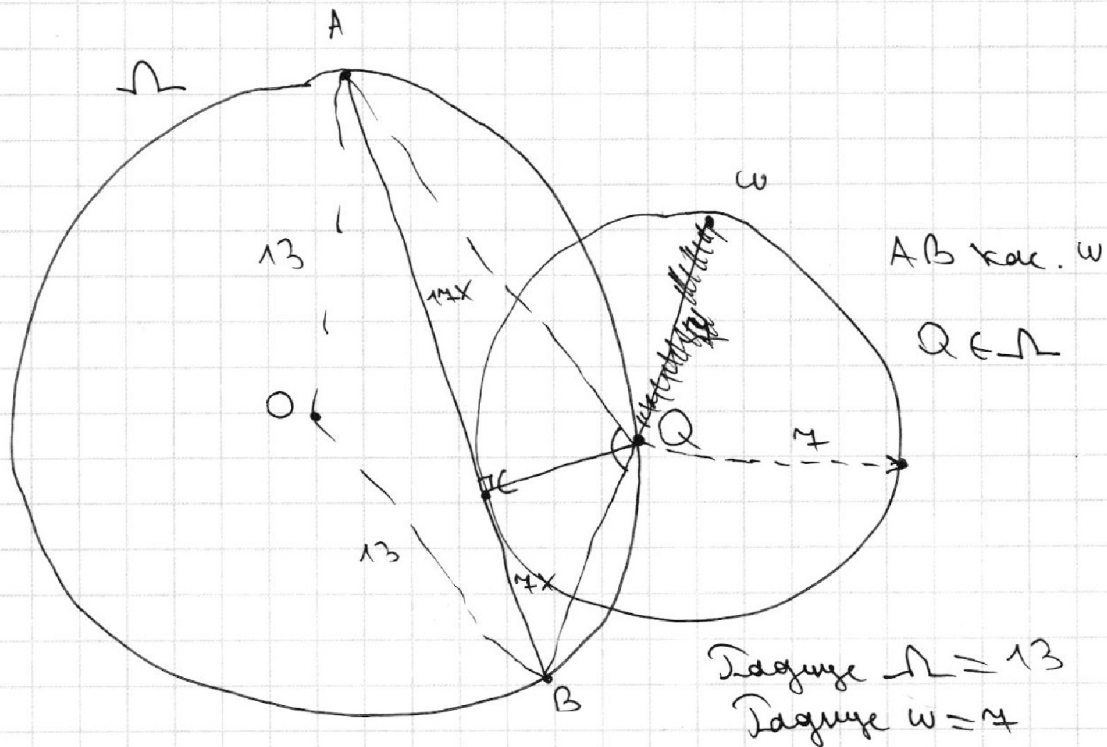
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N3



$$AC:CB = 13:4. \quad AB = ?$$

Решение. Пусть O, Q - центры

Ω, ω соответственно. Пусть

$$BC = 4x, \text{ тогда } AC = \frac{13}{4} \cdot 4x = 13x.$$

главная цель - найти x . $\rightarrow$ очевидно $x > 0$
 $AB = AC + BC = 24x.$

Через $\deg_\Gamma X$ обозначим степень
точки X относительно окр-ти Γ .

$$\text{Тогда: } \deg_\omega A = AQ^2 - 49 = AC^2 = 289x^2,$$

$$\deg_\omega B = BQ^2 - 49 = BC^2 = 49x^2. \quad \rightarrow$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

откуда $AQ = \sqrt{49 + 289x^2}$ и
 $BQ = \sqrt{49 + 49x^2}$. По теореме
 синусов в $\triangle AQB$:

$$\frac{AB}{\sin \angle AQB} = \frac{24x}{\sin \angle AQB} = 2 \cdot 13 = 26,$$

откуда $\sin \angle AQB = \frac{12}{13} x \leq 1$,
 и $0 < x \leq \frac{13}{12}$. Заметим.

$QC = 4$, $QC \perp AB$ как радиус

в точку касания, откуда:

$$\begin{aligned} S_{\triangle AQB} &= \frac{QC \cdot AB}{2} = 12 \cdot 4 \cdot x = \\ &= \frac{AQ \cdot QB \cdot \sin \angle AQB}{2} = \\ &= \frac{\frac{12}{13} x \sqrt{49 + 49x^2} \sqrt{49 + 289x^2}}{2}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\sqrt{49 + 49x^2} \sqrt{49 + 289x^2} = 182.$$

Очевидно, что ^{длина} хорды AB может иметь

только 1 значение, т.е. наше ~~уравнение~~

число $0 < x \leq \frac{13}{12}$ в наших условиях

тоже может иметь только 1 значение.

Значит, при наших ~~данных~~ x наше уравнение $\rightarrow$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Предложение.

имеет ~~только одно~~ ровно 1 решение.

Заметим, что находим

$0 < x = 1 \leq \frac{13}{12}$. Действительно, при

$$x=1: \sqrt{49+49x^2} \sqrt{49+289x^2} = \sqrt{98} \sqrt{338} = \\ = \sqrt{33124} = 182, \text{ т.е. } x=1 - \text{ корень.}$$

Значит, единственное решение

нашего уравнения это $x=1$.

Тогда, $AB = 24x = 24$.

Ответ.

$$\boxed{AB = 24}$$

→



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 2x.$$

Решение. ~~итерация~~

Заметим. $1 - 2x = (3x^2 - 6x + 2) - (3x^2 + 3x + 1 + 1).$

Замена: $a := 3x^2 - 6x + 2$, $b := 3x^2 + 3x + 1$.
Тогда $1 - 2x = a - b$.

Отсюда: $\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$, $a, b \geq 0$.

$$a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1) = 0.$$

2 случая:

① $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$. $\Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}$.

$$\Leftrightarrow a = b, a, b \geq 0. \quad \Leftrightarrow$$

$$a = b, a \geq 0. \quad \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1,$$
$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0. \quad \text{Раскроем}$$

уравнение $3x^2 + 3x + 1 = 0$.

Его дискриминант D равен

$$D = 9 - 3 \cdot 4 = -3 < 0, \quad \text{значит,}$$

$$3x^2 + 3x + 1 > 0 \quad \text{при всех} \quad x \in \mathbb{R}. \quad \rightarrow$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение.

отсюда $3x^2 + 3x + 1 = 3x^2 - 6x + 2$,

и отсюда $9x$ не равно 0, ибо $\forall x \in \mathbb{R}$

$3x^2 + 3x + 1 > 0$. Значит, $9x = 1$,

откуда $\boxed{x = \frac{1}{9}}$

② $\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1 = 0$, т.е.

$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1, a, b \geq 0. \Leftrightarrow$

$a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b = 1, a, b \geq 0. \Leftrightarrow$

$3x^2 - 6x + 2 + 2\sqrt{3x^2 - 6x + 2}\sqrt{3x^2 + 3x + 1} +$

$+ 3x^2 + 3x + 1 = 6x^2 - 3x + 3 +$

$+ 2\sqrt{a}\sqrt{b} = 1, a, b \geq 0.$

отсюда $2\sqrt{a}\sqrt{b} = 1 - 6x^2 + 3x - 3 \geq 0$.

Таким образом уравнение $6x^2 - 3x + 3 = 1$.

$\Leftrightarrow 6x^2 - 3x + 2 = 0$. Его дискриминант

равен $D = 9 - 6 \cdot 2 \cdot 4 = 9 - 48 = -39 < 0$,

значит, $6x^2 - 3x + 3 > 1$ при всех

$x \in \mathbb{R}$. Это значит (вам поминутно)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

что $1 - 6x^2 + 3x - 3 = 2\sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0$,
откуда $1 - 6x^2 + 3x + 3 > 1$. Но
это невозможно $\Leftrightarrow x \in \emptyset$.
Значит, в этом случае
нет решений. Подставим $x = \frac{1}{9}$.
ответ. $\boxed{x = \frac{1}{9}}$

→



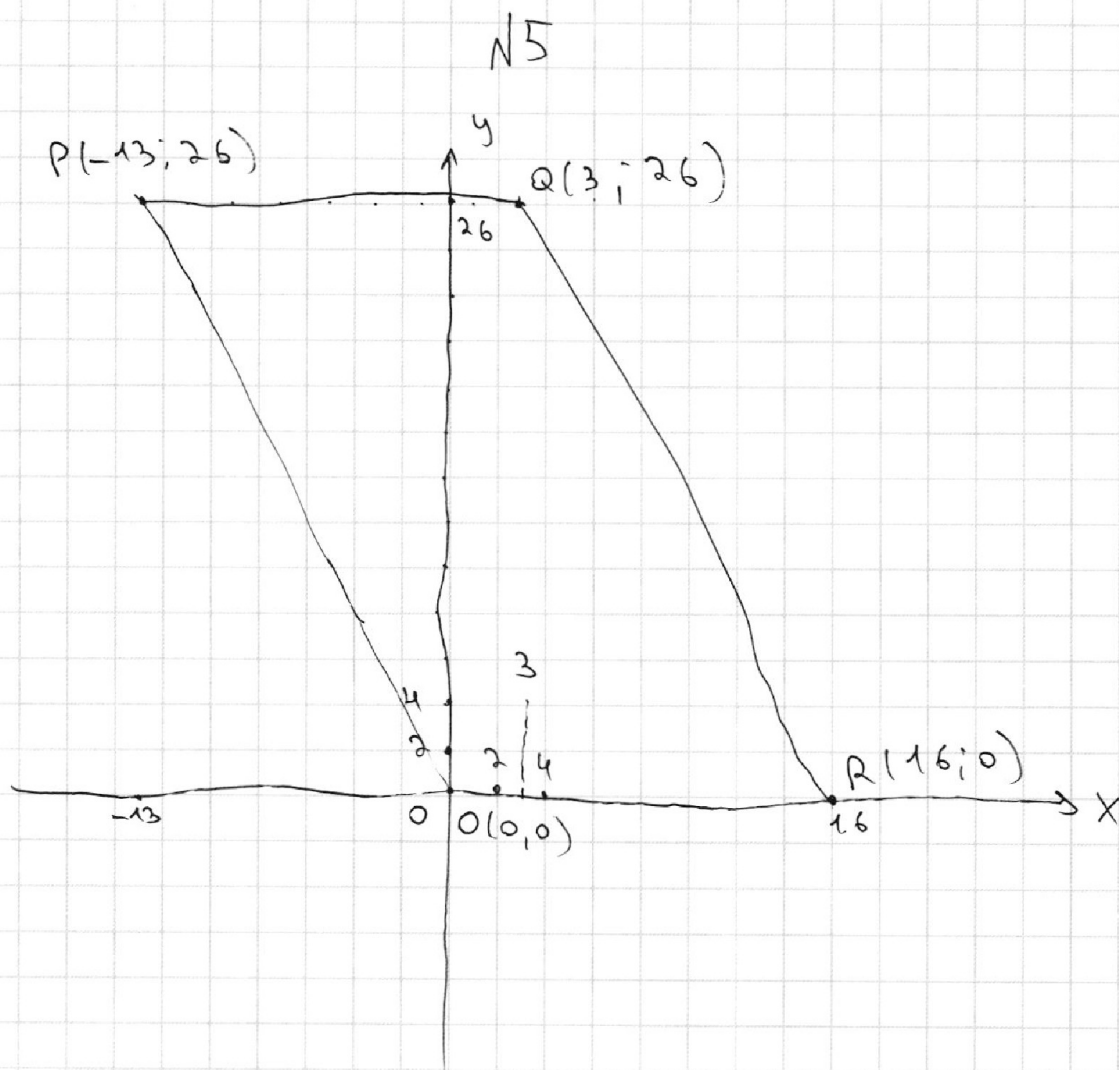
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение. ОР задается ур-нем

~~или~~ $y=0$; PQ — ур-нем $y=26$,

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 6

Найти все a , при котор. $\exists b$: сист. имеет

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

ровно 2 реш.

Решение. Первое уравнение: $y = -ax + 8b$ -

~~прямая~~ - прямая вида $y = kx + c$.

Второе нер-во:

$x^2 + y^2 = 1$ - окр-ть w_1 (центром $O_1(0; 0)$)

радиуса $R_1 = 1$; $x^2 + (y - 12)^2 = 16$ - окр-ть

w_2 (центром $O_2(0; 12)$) радиуса $R_2 = 4$.

Изно, что w_1 и w_2 не имеют общих

точек. Очевидно, что второе неравенство

~~выполняется~~ выполняется:

- На границах окр-тей ~~выполняется~~ w_1 и w_2 .
- Внутрь окр-тей w_1 и w_2 .

Нарисуем графики:

→

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

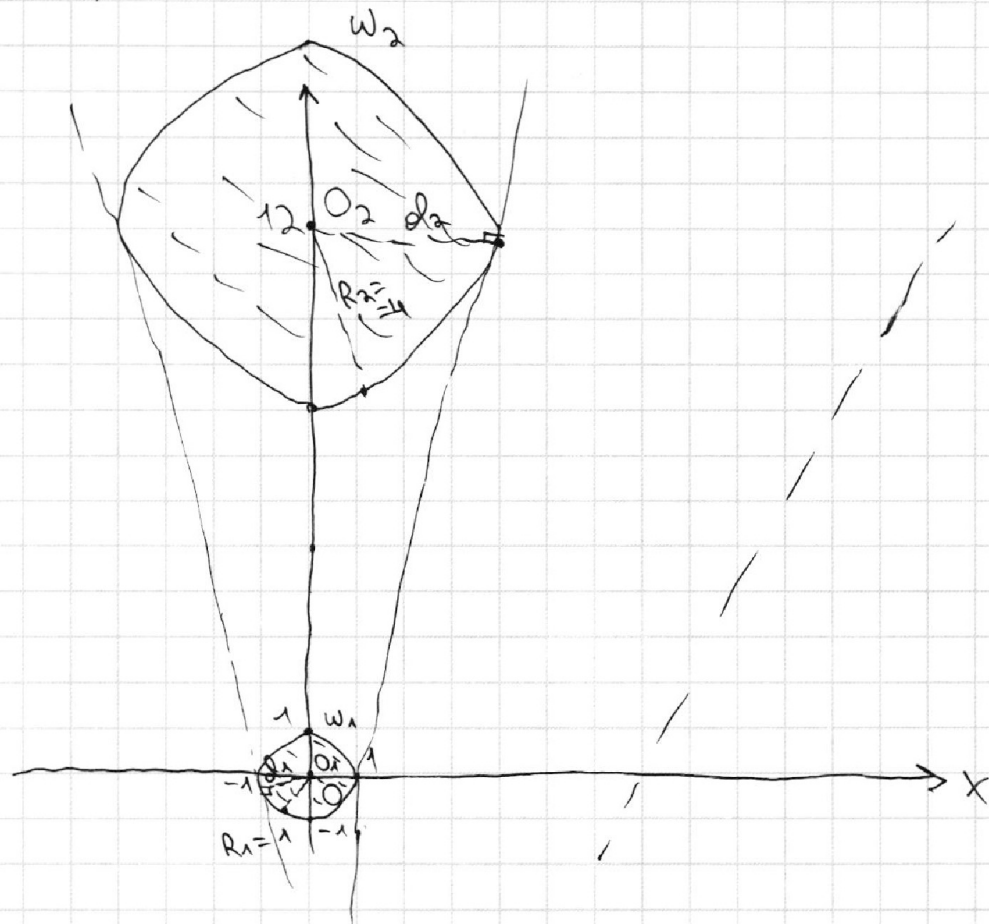
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение.



Очевидно, что ~~на~~ равно два решения
будет $\Leftrightarrow$ P касается W_1 и W_2 .

Почему? Если P внутренн пересек. одну из
окр-тей W_1 и W_2 , то ясно, что будет ∞
реш., значит, она может либо касаться,
либо не иметь общих точек (касаясь
из окр-тей W_1 и W_2 . По т.к. окр-ти
две и решения два, то ясно, что $\rightarrow$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

прямая ℓ касается именно касательных
двух окружностей. Дано, что w_1 и w_2
имеют 4 ^{общие} касательных $\Rightarrow y$ ^(соеб.) кас

и значения a . Значит u .

Решение. Расстояние d от точки (x_0, y_0)

до прямой $ax+by+c=0$ равно

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

т.к. ℓ касается

w_1 и w_2 , то для d_1 и d_2 - расстояния

от O_1 и O_2 до ℓ соответственно,

то $d_1 = R_1$ и $d_2 = R_2$. Значит:

$$\begin{cases} d_1 = \frac{18b}{\sqrt{a^2+1}} = R_1 = 1 \\ d_2 = \frac{18b+12}{\sqrt{a^2+1}} = R_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18b = \sqrt{a^2+1} \\ 18b+12 = 4\sqrt{a^2+1} \end{cases}$$

~~Решение~~ Таким. 3 случая:

$$\textcircled{1} \quad b \geq 0. \text{ Тогда } 8b = \sqrt{a^2+1} \text{ и } 12+8b = 4\sqrt{a^2+1}, \text{ откуда } 12+8b = 12+\sqrt{a^2+1} = 4\sqrt{a^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+1} = 4 \Leftrightarrow a^2+1=16 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{15}$$

$$\text{и тогда } b = \frac{1}{8}\sqrt{a^2+1} \quad (b = \frac{1}{8} \geq 0) \rightarrow$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение.

$$(2) \quad -\frac{3}{2} \leq b \leq 0. \quad \text{и тогда}$$

$$-8b = \sqrt{a^2 + 1} \quad \text{и} \quad 12 + 8b = 4\sqrt{a^2 + 1}, \quad \text{откуда}$$

$$8b = -\sqrt{a^2 + 1} \quad \text{и} \quad 12 = 5\sqrt{a^2 + 1}, \quad \text{а значит}$$

$$a^2 + 1 = \frac{144}{25} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = \frac{119}{25} \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm \frac{\sqrt{119}}{5}.$$

$$(\text{и тогда} \quad -\frac{3}{2} \leq b = -\frac{3}{10} \leq 0)$$

$$(3) \quad b \leq -\frac{3}{2}. \quad \text{и тогда} \quad -8b = \sqrt{a^2 + 1}$$

$$\text{и} \quad -12 - 8b = 4\sqrt{a^2 + 1}, \quad \text{откуда}$$

$$12 = -3\sqrt{a^2 + 1} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a^2 + 1} = -4.$$

$$\sqrt{a^2 + 1} \geq 0, \quad \text{но} \quad -4 \leq 0. \quad \text{и следовательно,}$$

$$0 \leq \sqrt{a^2 + 1} = -4 < 0, \quad \text{что невозможно}$$

$$\Leftrightarrow a \in \emptyset. \quad \text{Значит,} \quad a = \pm \sqrt{15}$$

$$\text{и} \quad a = \pm \frac{\sqrt{119}}{5}.$$

Ответ.

$$\boxed{\text{при} \quad a = \sqrt{15}; -\sqrt{15}; \frac{\sqrt{119}}{5}; -\frac{\sqrt{119}}{5}}$$

→



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

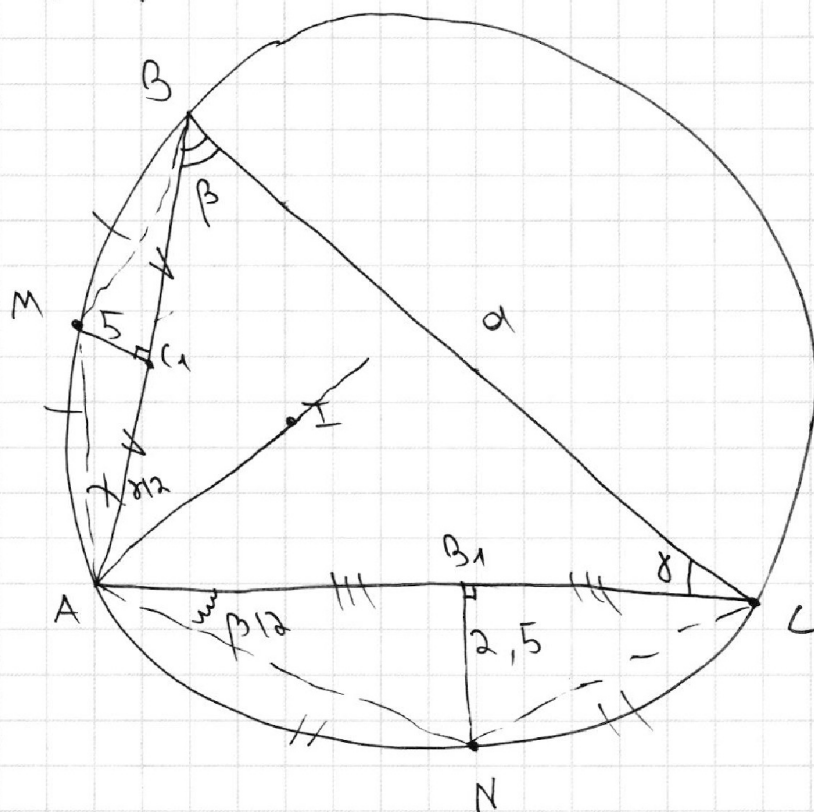
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N7

I - центр $\triangle ABC$

$AI = ?$



Решение. Пусть B_1, C_1 - середины AC, AB
~~соответственно~~ соответственно; Пусть

$BC = a, AB = c, AC = b, \angle A = \alpha, \angle B = \beta,$
 $\angle C = \gamma$. Ясно, что $\angle NAC = \frac{\beta}{2}$ и

$\angle MAB = \frac{\gamma}{2}$. Отсюда $AC_1 = \frac{c}{2} =$

$= 5 \tan \frac{\gamma}{2}$ и $AB_1 = \frac{b}{2} = 2,5 \tan \frac{\beta}{2}$

и $c = 10 \tan \frac{\gamma}{2}, b = 5 \tan \frac{\beta}{2}$.

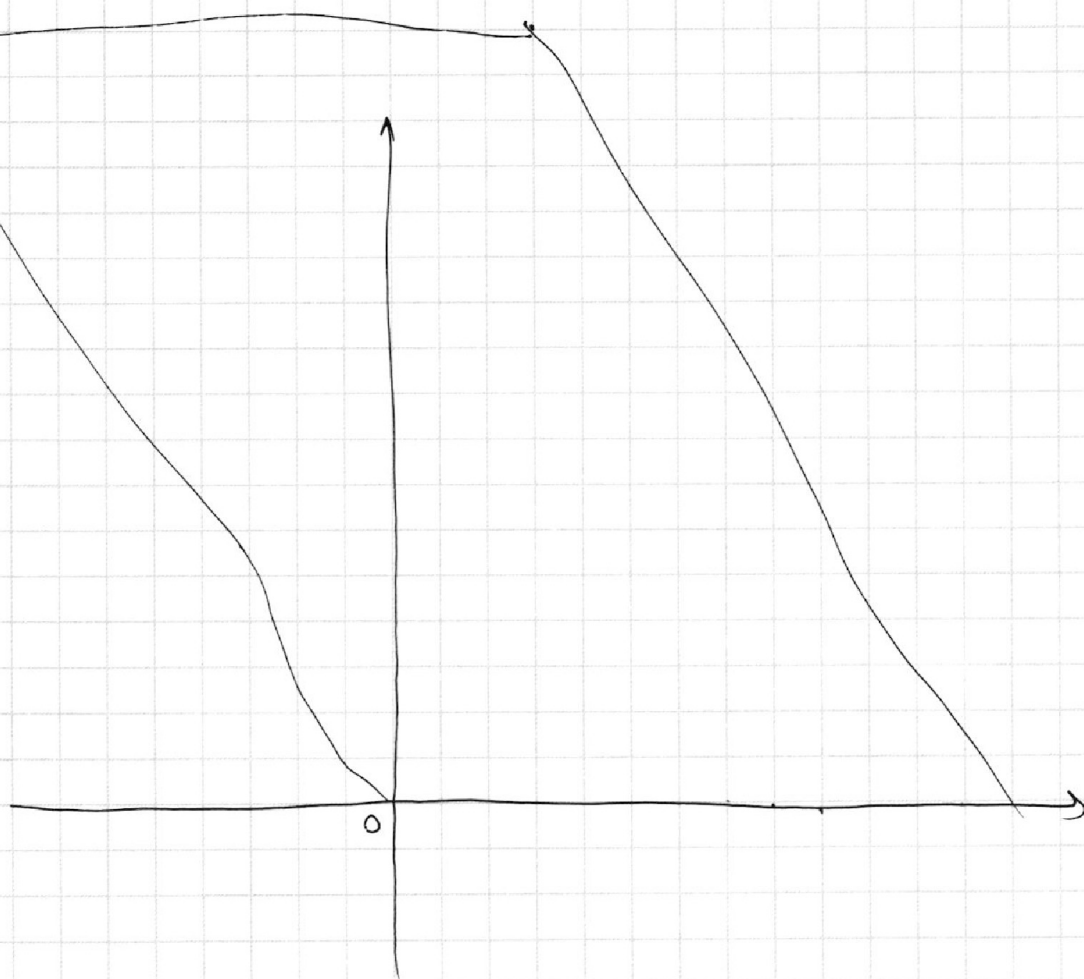


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



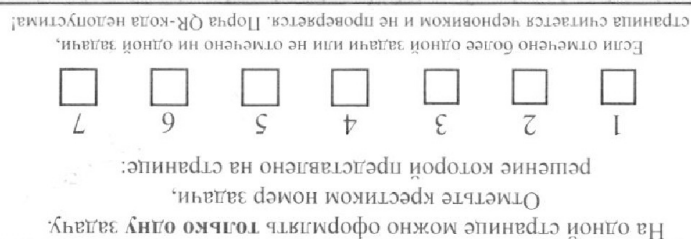
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



αKX .

$$K \cdot -13 = 26$$

$$K = -2.$$



ИГФИ

□ □ □ □ □ □ □
7 6 5 4 3 2 1

7

9

5

4

3

2

I

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$-\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 2x$$

$$\frac{e^{2\pi i \alpha} - 1}{2\pi i}$$

$$-w_r \cdot w - r + 68^\circ$$

54. 52-052-

W: 200-1201

4. 806

$$(a, m) = (a', m') = 1$$

W. 205

• 44 : 6

• 5-44

$$n=9, S=9$$

$$+ r_1 \cdot h_1 - h_2 - r_2 v$$

1, 2023

$$r_{\text{r.gh}} - \sigma_{\text{w}} r =$$

$$-9r + n \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} - 5e$$

$$-w_{\text{op}} - r_h =$$

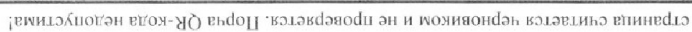
85 - 201 - 12

$$0 \leq v_{\mu} = 2 \quad \text{for } \mu \in \text{int} = \emptyset$$

$$0.88 - 0.44 = 0.44 = 0.44 \cdot 1.0 = 0.44 + 0.00$$

$\begin{array}{r} 9 \\ 11 \\ 2 \\ + \\ 2 \\ \hline 2 \\ \times \\ 6 \\ \hline 12 \\ 22 \\ \hline 138 \end{array}$

$$6 \times 2 \times 3 \times 13 =$$



Отметьте крестиком номер задания, решение которой представлено на странице:

□ □ □ □ □ □ □
7 6 5 4 3 2 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,

странния считается черновиком и не проверяется. Поша QR-кода недоступна!





На одной странице можно оформить **только одну** задачу.

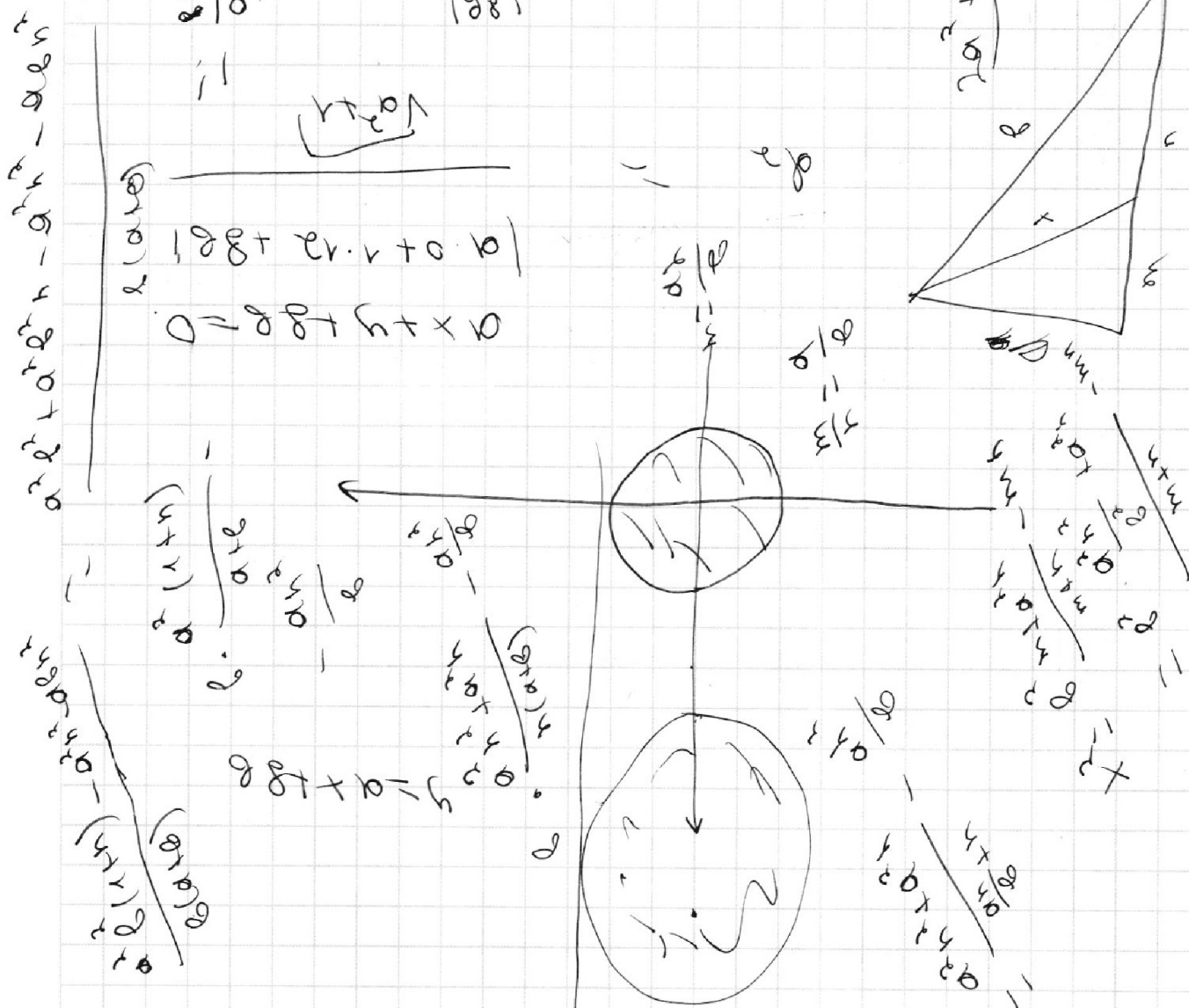
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,

страница считается черновиком и не проверяется. Липа QR-кода недопустима!

МФТИ



Handwritten mathematical work on a grid background. The work includes several equations and algebraic manipulations. At the top, there is a boxed area containing the equation $x^2 + y^2 + 8y = 0$. Below this, there are several lines of algebraic work, including $x^2 + y^2 + 8y + 16 = 9$ and $x^2 + y^2 + 8y + 16 = 9 + 1 = 10$. There are also some geometric diagrams, including a right triangle with sides 3, 4, 5 and a larger triangle with sides 5, 12, 13. The work is done in pencil on a grid background.



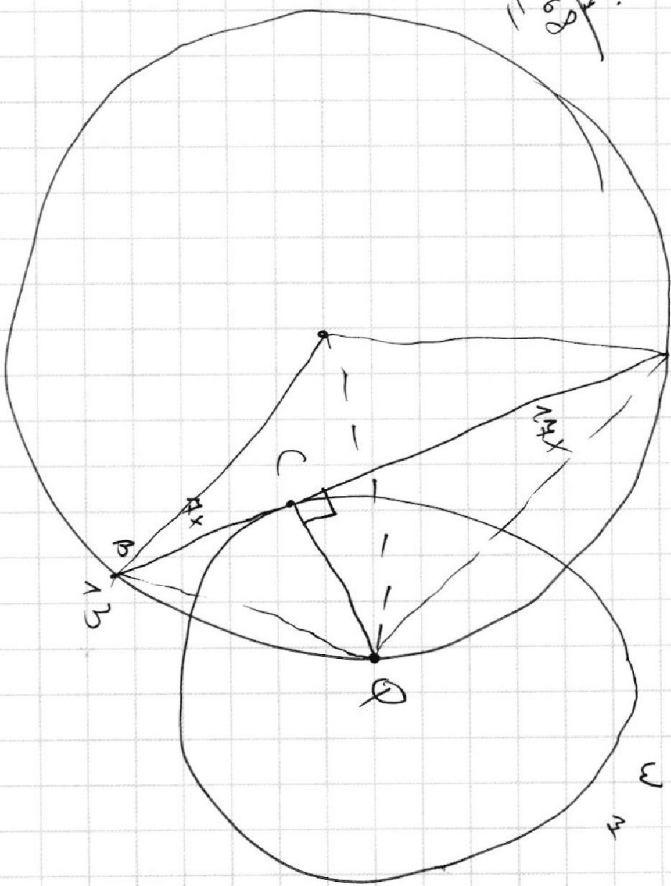
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи.
Решение которой представлено на странице:

- | | |
|--------------------------|---|
| ☐ | 1 |
| ☐ | 2 |
| ☐ | 3 |
| ☐ | 4 |
| ☐ | 5 |
| ☐ | 6 |
| ☐ | 7 |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,

страница считается черновиком и не проверяется. Порядк QR-кода неупустим!

МФТИ



$$\sin \angle AQB = \frac{2R}{x} = \frac{26}{13}$$
$$\sin \angle AQB = x \cdot \frac{12}{13}$$

$$A. \sqrt{49+289x^2} = \sqrt{49+49x^2}$$

$$x \cdot \frac{12}{13}$$

$$2 \cdot 13 \cdot 13$$

$$\sqrt{338}$$

$$2 \cdot 13 \cdot 13$$

$$2 \cdot 13 \cdot 13$$

$$\frac{12}{13}$$

$$5 \cdot 13x^2$$

$$-49 + 49x^2 + 289x^2 + 49 =$$

$$-2$$

$$\cos \angle AQB = \frac{168}{28224}$$

$$\frac{168}{28224}$$

$$\frac{168}{28224}$$

$$\frac{168}{28224}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a, b, c \in \mathbb{N}$, $ab: 2^{15} 7^{11}$, $bc: 2^{14} 7^{18}$, $ac: 2^{23} 7^{39}$.

$\min(ab, bc, ac) = ?$

Решение. Пусть $t := ab, c$. Перенумеруем

числа ab, bc и ac . Получим

$ab \cdot bc \cdot ac = a^2 b^2 c^2 = (abc)^2 = t^2$. Из

условия, $ab: 2^{15} 7^{11}$, $bc: 2^{14} 7^{18}$, $ac: 2^{23} 7^{39}$,

откуда $t: 2^{45} 7^{68}$. Заметим,

что раз t^2 — квадрат натур. числа $t \in \mathbb{N}$,

$t^2: 2^{90}$ и 90 — четное, то $t^2: 2^{46}$, так

как простые числа могут входить в

квадраты натур. чисел только в четных

степенях. Значит, $t^2: 2^{46} 7^{68}$.

$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6}$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 1}}{2}$

$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 + 2(1 - 2x)\sqrt{3x^2 + 5x + 1}$

$12 = -3\sqrt{3x^2 + 5x + 1} + 1 + 81x^2 - 18x$

$12 + 8 = -4\sqrt{3x^2 + 5x + 1}$

$\frac{3}{10}$

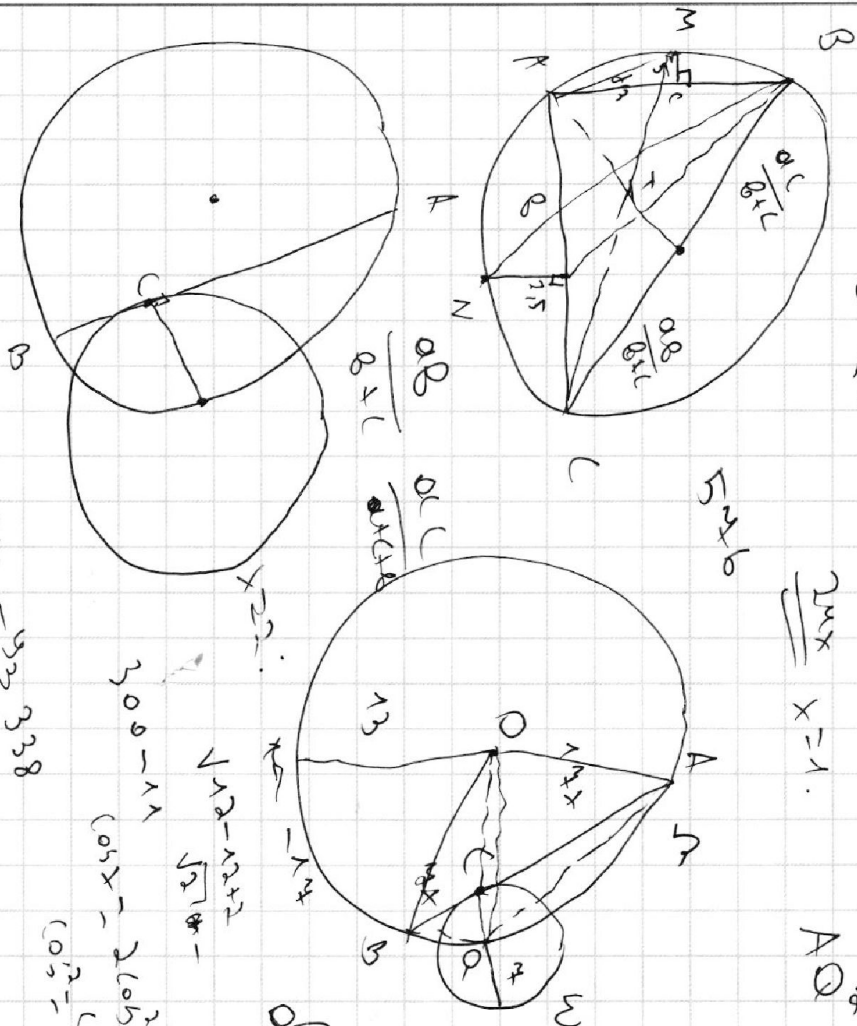
$\frac{12}{40} = \frac{3}{10}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



5(49)

10(49) 5(49)

-1

$$\frac{2x}{x} = 1.$$

AQ

$$13 + 6 + 2$$

$$- \sqrt{3-3}$$

$$49x^2 - 2 \cdot 169 - 2 \cdot 169 \cdot \cos \angle BOA$$

$$\cos \angle BOA = 49 + 49x^2$$

$$49x^2 = BO^2 - 49$$

$$BO^2 = 49 + 49x^2$$

$$BO = 7\sqrt{1+x^2}$$

$$AO^2 = 49 + 289x^2$$

$$\angle BOA = -14x \cdot 14x =$$

$$OC^2 = R^2 - 15^2 =$$

$$\cos^2 \angle BOA = \frac{2 \cos^2 \angle BOA - 1}{2} = \frac{2 \cos^2 \angle BOA - 1}{2}$$

$$OC^2 = 169 - 149x^2$$

$$2x \cdot 1 - 2x \cdot 1 = -2x \cdot 1 - 33 \cdot 338$$

$$\cos \angle BOA = \cos \angle BOA$$

$$\cos \angle BOA = 1 - \frac{49 + 49x^2}{2 \cdot 169}$$

$$\sqrt{\cos \angle BOA} = \sqrt{\cos \angle BOA}$$

$$2x \cdot 1 - 2x \cdot 1 = -2x \cdot 1 - 33 \cdot 338$$

$$\sqrt{2x \cdot 1 - 2x \cdot 1} = \sqrt{2x \cdot 1 - 2x \cdot 1}$$