



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c \in \mathbb{N}$ ,  $ab: 2^{14} 7^{10}$ ,  $bc: 2^{14} 7^{14}$ ,  $ac: 2^{20} 7^{37}$ .  $(abc)_{\min} = ?$

Уточню:  $abc$  было наим., нужно, чтобы  $a, b, c$  состояли

только из степеней 2 и 7.  $a = 2^{k_1} 7^{n_1}$ ,  $b = 2^{k_2} 7^{n_2}$ ,  $c = 2^{k_3} 7^{n_3}$ ,  $k_1, k_2, k_3,$

$n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}_0$ , тогда  $ab = 2^{k_1+k_2} 7^{n_1+n_2} : 2^{14} 7^{10} \Rightarrow \begin{cases} k_1+k_2 \geq 14 & (1) \\ n_1+n_2 \geq 10 & (2) \end{cases}$  аналогично

$\begin{cases} k_2+k_3 \geq 14 & (3) \\ n_2+n_3 \geq 14 & (4) \end{cases}$   $\begin{cases} k_1+k_3 \geq 20 & (5) \\ n_1+n_3 \geq 37 & (6) \end{cases}$  предполагаем наим.

наим  $abc$ .  $(1)+(3)+(5) \Rightarrow 2(k_1+k_2+k_3) \geq 51 \Rightarrow k_1+k_2+k_3 \geq 25,5$ , т.к.

$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$ , то  $(k_1+k_2+k_3)_{\min} = 26$ , аналогично:  $(2)+(4)+(6) : 2(n_1+n_2+n_3)$

$\geq 64 \Rightarrow (n_1+n_2+n_3)_{\min} = 32$  III-е.  $(abc)_{\min} = 2^{26} 7^{32}$ , но, т.к.

$ac: 2^{20} 7^{37}$ , то  $a$  еще:  $7^{37}$ , а  $7^{12} / 7^{37}$ , то  $c$  еще

минимальная степень у 7 будет 37. Ответ:  $(abc)_{\min} = 2^{26} 7^{37}$

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2.

$\frac{a}{b}$  — несократима ( $a, b \in \mathbb{N}$ ), т.е.  $\text{НОД}(a, b) = 1$ .

$$\frac{a+b}{a^2-bab+b^2}, m_{\max} - ? \quad \underline{a+b} : m \sim a^2-bab+b^2 : m$$

$$\text{т.е. } a+b = km, k \in \mathbb{N}, \quad a^2-bab+b^2 = (a+b)^2 - 2ab \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{предположим, что } 2ab : m \Rightarrow 2ab = nm, n \in \mathbb{N}.$$

III.  $k, m_{\max}$ , то  $\delta$  резко уменьшается после сокращения  
~~и не сократится~~ (иначе можно подобрать число  $t$  на которое  
она сократится и такое значение  $m$  будет  $m_{\max}$ ).

$$\frac{a+b}{a^2-bab+b^2} = \frac{km}{k^2m^2-nm} = \frac{k}{k^2m-n} \quad \text{НОД}(k; k^2m-n) = 1, \text{ а значит}$$

$$\text{НОД}(k; n) = 1. \quad m_{\max} \text{ будет при наим. } k, \neq 1: a+b=m$$

$$\text{тогда } (a+b) : 2ab : (a+b). \quad 2ab = t(a+b), t \in \mathbb{N}. \quad t \left( \frac{a+b}{2ab} \right) = 1$$

$$= t \left( \frac{1}{2b} + \frac{1}{2a} \right) \text{ — несократима, а значит } \frac{1}{2b} + \frac{1}{2a} = \frac{1}{t} \text{ — несократима, тогда}$$

$$t \in \mathbb{N} \text{ предположим, что } t = \frac{2ab}{a+b}, \text{ т.е. } \text{НОД}(a, b) = 1,$$

$$\text{то } \frac{ab}{a+b} \text{ — несократима, т.е. макс. } m \text{ при } a+b=m=8.$$

Ответ:  $m=8$ .







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

нч.  $\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-4x$  ОДЗ:  $2x^2-5x+3 \geq 0$

$2x^2-5x+3 = (x-1)(2x-3)$ ,  $2x^2+2x+1$  не раскл. на мн, тк дискр.  $x \leq -1$  и  $x \geq \frac{3}{2}$  всегда  $\geq 0$

н.е.  $\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} > 0$  всегда множители не мн. квадрат

и правую часть на  $\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}$ .

$2x^2-5x+3 - 2x^2-2x-1 = (2-4x)(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1})$

$2-4x = (2-4x)(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1})$

$(2-4x)(1 - (\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1})) = 0$

1.  $x = \frac{2}{4}$ . 2.  $\frac{4}{9} - 5 \cdot \frac{2}{4} + 3 = \frac{8}{9} - \frac{10}{4} + 3 = -\frac{62}{36} + 3 > 0$  не подходит ОДЗ.

2.  $\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1 \Rightarrow \sqrt{2x^2-5x+3} = 1 - \sqrt{2x^2+2x+1}$

$2x^2-5x+3 = 1 - 2\sqrt{2x^2+2x+1} + 2x^2+2x+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sqrt{2x^2+2x+1} = 4x-1 \Rightarrow 4x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{4}$

$4(2x^2+2x+1) = 16x^2 - 8x + 1 \Rightarrow 8x^2 + 8x + 4 = 0$

$\Rightarrow 4x^2 + 2x - 3 = 0$   $D_4 = 1 + 12 = 13 = (2\sqrt{61})^2$

$x_1 = \frac{1-2\sqrt{61}}{4} < \frac{1}{4} \notin$   $x_2 = \frac{1+2\sqrt{61}}{4} \geq \frac{1}{4}$  и  $\leq 1$  подходит ОДЗ.

Ответ:  $x = \left\{ \frac{2}{4}, \frac{1+2\sqrt{61}}{4} \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

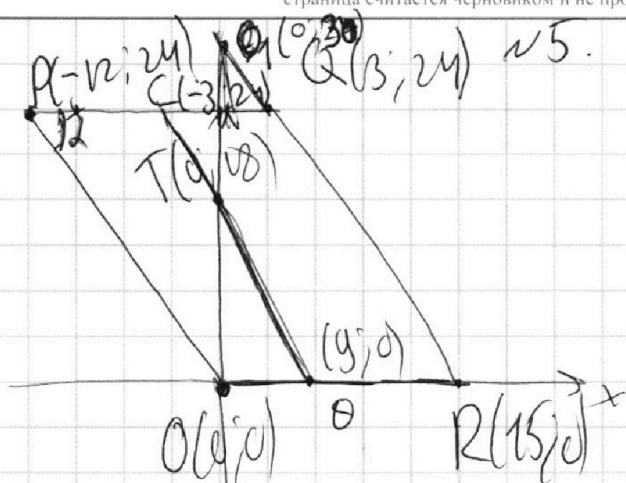
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \in OPR$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$f_{g2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left( \begin{array}{l} \text{Kontinuum } A \text{ u. } B \\ \text{begraben } A(x, y) \end{array} \right)$$

Выводим через  $x_1, x_2, y_1 \rightarrow y_2$  (H)

$$y_2 = -2x_2 + 2x_1 + y_1 + 12$$

Относительно  $X_2$  график имеет форму - прямая ||  $E_{\text{свободная}}$   
параллельная, т.е. если  $X_1$  для  $X_2$   $E_{\text{свободная}}$  график

принадлежностью кривизны, но с тем же значением  
справы 13 (изученных) точек. А затем в 6 параллельных  
матрих точек 14-16, а затем, задалась тем же значением  
принадлежностью кривизны, если  $2x_1 + y_1 + 12 \leq 30$  и  
 $2x_1 + y_1 + 12 \geq 0$ .  $\{y_1 \leq -2x_1 + 18$  и  $y_1 \geq -2x_1 + 12$

$2x_1 + y_1 \geq 12$   
 параметр  
 по ч. а. р.  $\begin{cases} y_1 \leq -2x_1 + 18 \\ y_1 \geq -2x_1 - 12 \end{cases}$

$$y_1 \geq -2x_1 \quad \text{и} \quad \begin{cases} y_1 \leq -2x_1 + 18 \\ y_1 \geq -2x_1 \end{cases}, \text{ m.c. на } x \text{ и } y \text{ макс}$$

определенные  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и проецируем через  $T(\omega, \tau)$ .  $C(-3/24)$   $D(9,0)$ ,  $PQ, PC, PD$ . Всего матриц

точка  $13.10 = 130$  и для каждой из этих точек  
номер в строке в  $B(x_2, y_2)$   $13-10$  строке  $13-16$  строке

Всего  $130 \cdot B = 1690$  человек, но, для каждого человека и про с учетом координат  $(0; x(x \in \mathbb{Z}))$ . Каждому из промежутков  $x \in [0; 9]$ . Каждому можно с учетом координат, что они являются с (1). общее число вариантов:  $2 \cdot (1690 - 130) = 3120$ . Ответ: 3120.

$A, B$  и  $\overline{B}, A$  равносильны

Emblem 3120

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~ 6.

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \text{ и} \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

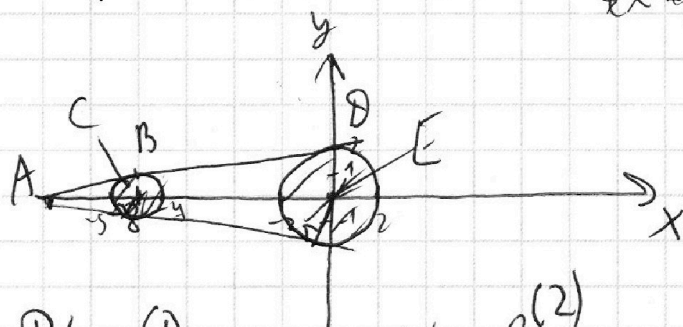
нарисуем графики ф-ции

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$

$(x+8)^2 + y^2 = 1$  - окр. с центром  $(-8, 0)$  радиус 1  
 $x^2 + y^2 = 4$  - окр. с центром  $(0, 0)$  радиус 2

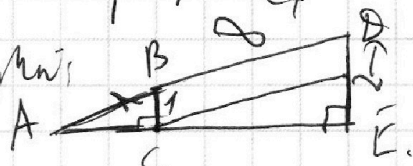
Заметим, что эта совокупность равносильна

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$



Р/с (1):  $y = ax + 10b$  - прямая, т.к. система должна иметь ровно 2 решения, то подходит только 2 прямые, изобр. на графике, они касаются окружности

Т.к. конструкция



приведем через C прямую  $DE$  и перес.  $DE$  в  $E$ .

т.т.  $BC \perp DE$  - параллельны  $\Rightarrow CT = 8, DT = 1 \Rightarrow TE = 1 \Rightarrow CE = \sqrt{63}$

$$\tan \angle ABC = \frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} = \frac{DE}{AC + CE} = \frac{1}{AC + \sqrt{63}} \Rightarrow 2AC = AC + \sqrt{63} \Rightarrow AC = \sqrt{63} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \tan \angle ABC = \frac{1}{\sqrt{63}}$ . В ур-ии (2)  $y = ax + 10b$  ~~так~~  $a = \tan \angle ABC$  касалась, т.е. либо  $a = \tan \angle ABC = \frac{1}{\sqrt{63}}$ , либо  $a = -\tan \angle ABC = -\frac{1}{\sqrt{63}}$ .

Для каждого из этих случаев подбирается единственная  $b$  (взависимости от этой прямой). Ответ:  $a = \frac{1}{\sqrt{63}}$  или  $a = -\frac{1}{\sqrt{63}}$ .



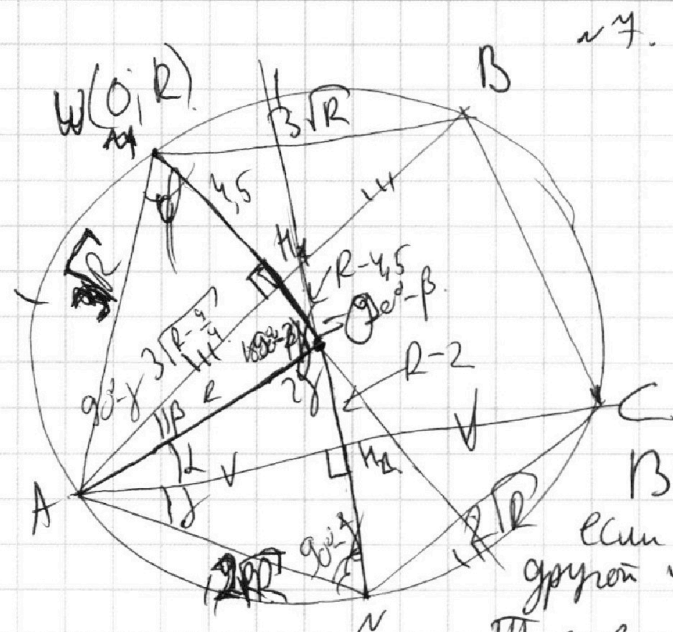
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AM_1 = 1.5, AM_2 = 2$   
т.к. дуги  $AM$  и  $MB$  равны,  
то равны и стягивающие  
их хорды, т.е.  $AM = MB$ , тогда  
из равенства  $\Delta$ -ков  $AMH_1$  и  $MH_2B$   
 $AH_1 = H_1B$ , аналогично  
 $AH_2 = H_2C$

Воспользуемся теоремой:  
если хорда окружности  $1$   
группы и дуги её концов,

то эта хорда - диаметр. Т.е. если продолжим  $AM_1$  и  $AN_2$ ,  
то они будут диаметрами из  $\Delta$ -ка  $AH_1O$ :  $AH_1^2 = R^2 - (R-0.5)^2 =$

$$\Rightarrow AH_1 = \sqrt{9R - \frac{81}{4}}, \text{ аналогично из } \Delta\text{-ка } AOH_2: AH_2 = 2\sqrt{R - 1}$$

$$\text{из } \Delta\text{-ка } AMH_1: AM = \sqrt{9R - \frac{81}{4} + \frac{81}{4}} = 3R, \text{ из } \Delta\text{-ка } AH_2 \cdot AN =$$

$$= \sqrt{4R - 4 + 4} = 2R. \cos \angle OAH_2 = \frac{2\sqrt{R-1}}{R}, \angle OAH_1 = \beta.$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{2\sqrt{R-1}}{R} \cdot \frac{3\sqrt{R-\frac{9}{4}}}{R} - \frac{R-2}{R} \cdot \frac{R-1.5}{R} = \frac{6\sqrt{R-1}\sqrt{R-\frac{9}{4}}}{R^2} - \frac{R-2}{R} \cdot \frac{R-1.5}{R}$$

$$\cos(90^\circ - \beta) = \sin \beta = \frac{R-1.5}{R} \text{ По теореме из } \Delta\text{-ка } AHO:$$

$$9R = R^2 + R^2 - 2R^2 \cdot \frac{R-1.5}{R} = 2R^2 - 2R^2 \cdot \frac{R-1.5}{R}$$

$$R \angle H_2 AN = \gamma, \angle AH_2 N = 90^\circ - \gamma. \cos(90^\circ - \gamma) = \sin \gamma = \frac{1}{\sqrt{R}}$$

$$\angle AMO = \varphi \cos \varphi = \frac{1.5}{\sqrt{R}} \text{ из т. Косинусов } \Delta\text{-ков } AMO \text{ и } AON:$$

$$R^2 = 9R + R^2 - 2 \cdot 3R \cdot R \cdot \frac{1.5}{\sqrt{R}}$$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Условие  $a, b, c \in \mathbb{N}$ ,  $ab: 2^{14} 7^{10}$ ,  $bc: 2^{17} 7^{14}$ ,  $ac: 2^{20} 7^{37}$   
 $\frac{abc}{abc} \quad a = 2^{k_1} 7^{n_1}, \quad b = 2^{k_2} 7^{n_2}, \quad c = 2^{k_3} 7^{n_3}$   
 $ab = 2^{k_1+k_2} 7^{n_1+n_2}, \quad bc = 2^{k_2+k_3} 7^{n_2+n_3}, \quad ac = 2^{k_1+k_3} 7^{n_1+n_3}$

$\begin{cases} k_1+k_2 \geq 14 \\ k_2+k_3 \geq 17 \\ k_1+k_3 \geq 20 \end{cases} + 2(k_1+k_2+k_3) \geq 51 \Rightarrow k_1+k_2+k_3 \geq 25,5, \text{ т.е.}$   
 Нам  $k_1+k_2+k_3=26$ , аналогично с

$n_1+n_2+n_3: 2(n_1+n_2+n_3) \geq 67 \Rightarrow n_1+n_2+n_3 \geq 33,5, \text{ т.е. } \min = 32$

Ответ  $abc_{\min} = 2^{26} 7^{32}$

$\frac{a}{b}$  - несократимая,  $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$  (т.е.  $\text{НОСР}(a, b) = 1$ )

$\frac{a+b}{a^2-ba+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$ .  $a+b = km, \quad 8ab = nm$ .  
 $\frac{a+b}{m} \in \mathbb{Q}$  и  $\frac{8ab}{m} \in \mathbb{Q}$ .  $a+b = km, \quad 8ab = nm, \quad k, n \in \mathbb{N}$

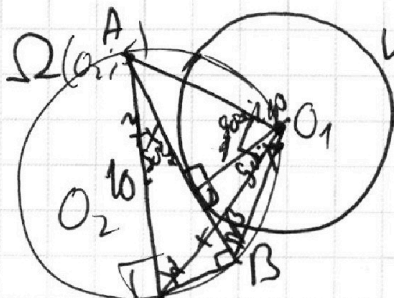
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = k^2 m^2 + \frac{nm}{2} = k^2 m^2 + \frac{nm}{2}$

$a^2 + b^2 = k^2 m^2 - \frac{nm}{4} = m(k^2 m - \frac{n}{4})$

$\frac{km}{k^2 m^2 - \frac{nm}{4}} = \frac{km}{k^2 m^2 - nm} = \left( \frac{k}{k^2 m - n} \right) \frac{km}{m}$

$fg(x) = \frac{8x}{100-6x^2}$

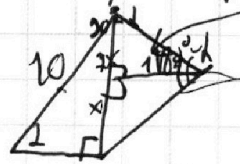
$fg(x) = \frac{8x}{1-x^2}$



$w(a, 1)$

А О1 В Точка В пер.

$180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$



$fg(x) = \frac{8x}{1-x^2}$

$fg(p+q) = \frac{fg(p)fg(q)}{1-fg(p)fg(q)} = \frac{8x}{1-x^2}$



