



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



- ✓ 1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

- ✓ 2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

- ✓ 3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

- ✓ 4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

Пусть x_1 — максимальная степень двойки, на которую делится a , x_2 — максимальная степень двойки, на которую делится b , x_3 — максимальная степень двойки, на которую делится c .

$$x_1, x_2, x_3 \in (\mathbb{N} \cup \{0\})$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 14 \\ x_2 + x_3 \geq 17 \\ x_1 + x_3 \geq 20 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\text{Сложив все три неравенства,} \\ &\text{мы получим} \\ &x_1 + x_2 + x_3 \geq \frac{51}{2} \end{aligned}$$

т.к. x_1, x_2, x_3 — целые неотрицательные,
то $x_1 + x_2 + x_3 \geq 26$

Заметим, что $x_1 = 9, x_2 = 5, x_3 = 12$ нам подходит.

П.к. нам необходимо минимизировать abc , то нам нужно сделать $x_1 + x_2 + x_3$ минимально возможными. П.к. $9 + 5 + 12 = 26$, а по следствию из системы мы получили $x_1 + x_2 + x_3 \geq 26$, то мы нашли минимум $x_1 + x_2 + x_3$.

~~Пусть x_1 — максимальная степень двойки, на которую делится a~~
Введем аналогичные обозначения y_1, y_2, y_3 , только для степени семи.

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \geq 10 \\ y_2 + y_3 \geq 17 \\ y_3 + y_1 \geq 37 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\text{Из третьего уравнения системы следует} \\ &y_1 + y_2 + y_3 \geq 37 \\ &\text{Для } y_3 = 17; y_2 = 20, y_1 = 20 - \text{решение системы} \\ &y_1 + y_2 + y_3 = 17 + 20 + 20 = 57. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} abc \geq 2^{26} \\ abc \geq 7^{37} \end{cases} \Rightarrow abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$$

"=" достигается при $a = 2^9 \cdot 7^{20}$, $b = 2^5 \cdot 7^{17}$, $c = 2^{12} \cdot 7^{17}$

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N2

т.е. $a, b \in \mathbb{N}$

$$\frac{a+b}{a^2 - 8ab + b^2}$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab}$$

Пусть мы можем сократить дробь
на какое-то K , тогда

$$a+b : K$$

$$(a+b)^2 - 8ab : K$$

$$(a+b) : K \Rightarrow (a+b)^2 : K \Rightarrow (a+b)^2 - 8ab : K \Rightarrow 8ab : K$$

Если $\frac{a}{b}$ - несократимая дробь, то

$$\text{НОД}(a, b) = 1 \Rightarrow \text{НОД}(a+b, b) = 1$$

$$\text{НОД}(a, a+b) = 1$$

$$a+b : K$$

$$8ab : K$$

$\Rightarrow$

$$8 : K$$

$$K \leq 8$$

Приведем пример, когда достигается $K=8$

$$a=3; b=5$$

$$\frac{3+5}{3^2 - 8 \cdot 3 \cdot 5 + 5^2} = \frac{8}{9 - 120 + 25} = \frac{8}{-91} = -\frac{8}{91}$$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

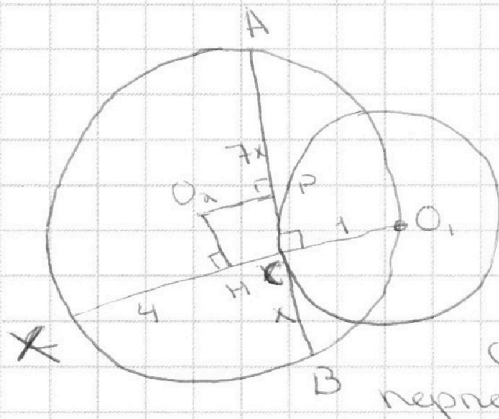
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3



Пусть X — точка касания AB и окруж.

Продлим радиус O_1X за точку X до пересечения с Ω в точке X .

Пусть O_1 — центр ω , O_2 — центр Ω .

O_2X — перпендикуляр

Опустим HN из O_2 на хорду XO_1 , и на хорду AB , обозначим основания перпендикуляров за H и P соответственно.

~~AC~~ ~~CB~~ по св-ву пересекającychся хорд $\frac{AC}{CB} = \frac{XC}{O_1C}$

$$XC = XO_1C = 7$$

$$HX = HO_1 = \frac{O_1X}{2} = 4$$

$$HC = HO_1 - O_1C = 3$$

Заметим, что O_2HCP — прямоугольник $O_2P = HC = 3$

$O_2X = 5$, т.к. O_2X — радиус

$$O_2H = \sqrt{O_2X^2 - XH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

$$PC = O_2H = 3$$

$$PA = \frac{AB}{2} = 4y$$

Пусть $CB = y$

$$PC = 7y - 4y = 3y = 3$$

$$y = 1$$

$$8y = 8$$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \quad N4$$

$$\frac{(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1})(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} = 2 - 7x$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0$$

$$\frac{2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} = 2 - 7x$$

$$\frac{2 - 7x}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} = 2 - 7x$$

$$(2 - 7x) \left(\frac{1}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} - 1 \right) = 0$$

$$\begin{cases} 2 - 7x = 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 1$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \quad (1)$$

$$(1) \text{ При } x > 0 \quad \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq \sqrt{2x^2 + 2x + 1} > 1$$

$$\text{При } x < 0 \quad \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \leq \sqrt{2x^2 - 5x + 3} \leq \sqrt{3}$$

~~При~~ $x = 0$ — не подходит

Ответ: $\frac{2}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

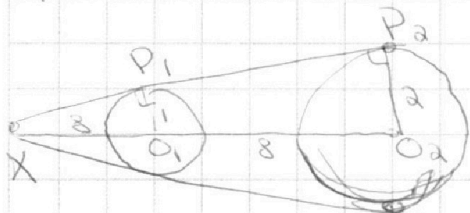
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6 (продолжение)

Тассометрии 4 мутант

касания



$$\triangle P_1 O_1 X \sim \triangle P_2 O_2 X$$

$$\frac{O_1 X}{O_2 X} = \frac{P_1 O_1}{P_2 O_2} = \frac{1}{2}$$

$$2 O_1 X = O_2 X$$

$$O_2 X - O_1 X = O_1 O_2 = 8$$

$$O_2 X - O_1 X = O_1 X = 8$$

X имеет координаты $(-16; 0)$

$$XP_1 = \sqrt{64 - 1} = \sqrt{63} \text{ по т. Пифагора для}$$

$$\triangle X P_1 O_1$$

Пусть P_1 имеет координаты $(x; y)$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x+16)^2 + y^2 = 63 \end{cases}$$

$$32x + 256 = 63 - 1$$

$$32x = -197$$

$$x = -\frac{197}{32}$$

$$y = \pm \sqrt{1 - \frac{197^2}{32^2}} = 2.32$$

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 = 1 \\ (x+16)^2 + y^2 = 63 \end{cases}$$

$$(x+16)^2 + y^2 = 63$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ -256 \\ \hline 63 \\ +193 \\ \hline 4 \\ 197 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 6 (продолжение)

Выведем из первого ур-я второе

$$16x + 256 - 64 = 62$$

$$16x = -130$$

$$x = -\frac{65}{8}$$

$$y = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{64}} = \pm \sqrt{\frac{63}{64}} = \pm \frac{\sqrt{63}}{8}$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ -128 \\ \hline 65 \\ 63 \end{array}$$

~~находим~~ найдем

Пока найдем

$$a = \pm \frac{\sqrt{63}}{16 \cdot 8 - 65} =$$

$$= \pm \frac{\sqrt{63}}{63} = \pm \frac{1}{\sqrt{63}}$$

$$\text{Ответ: } \pm \frac{\sqrt{5}}{95}; \pm \frac{1}{\sqrt{63}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N6 (продолжение)

Пусть A имеет координаты $(x; y)$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 & (1) \\ (x + \frac{16}{3})^2 + y^2 = \frac{160}{9} & (2) \end{cases}$$

$$(2) - (1) \quad 2 \cdot \frac{16}{3}x + \frac{256}{9} = \frac{160}{9} - 4$$

$$\frac{32}{3}x = \frac{160 - 36 - 256}{9}$$

$$\frac{32}{3}x = -\frac{132}{9}$$

$$32x = -\frac{132}{3}$$

$$x = -\frac{33}{24} = -\frac{11}{8}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ 256 \\ 160 \\ \hline 96 \\ 1 \\ 96 \\ + 36 \\ \hline 132 \\ - 132 \quad 4 \\ \hline 12 \quad 33 \end{array}$$

$$y = \pm \sqrt{4 - \frac{33^2}{8^2}}$$

$$y = \pm \sqrt{4 - \frac{33^2}{24^2}} = \pm \sqrt{\frac{(2 \cdot 24 - 33)(2 \cdot 24 + 33)}{24^2}} =$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 48 \\ + 33 \\ \hline 81 \end{array}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{5 \cdot 81}{24^2}} = \pm \sqrt{\frac{45}{64}} = \pm \frac{3\sqrt{5}}{8}$$

~~В~~ Коэффициент b в уравнении $y = ax - 10b$ отвечает за сдвиг прямой.

Получается, чтобы прямая касалась окружностей угловой коэффициент ~~(a)~~

$$a = \pm \frac{\frac{3\sqrt{5}}{8}}{(\frac{16}{3} - \frac{11}{8})} = \pm \frac{9\sqrt{5}}{128 - 33} = \pm \frac{9\sqrt{5}}{95}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

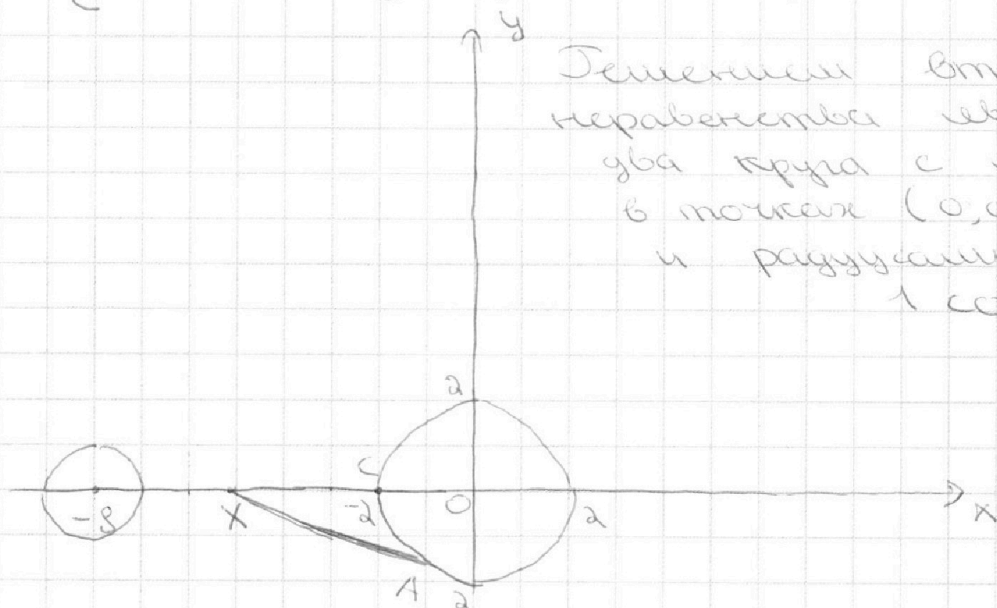
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



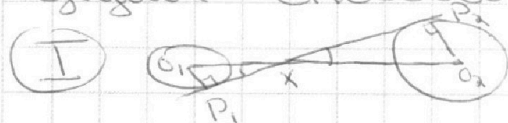
$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

Заменим вторую
неравенство двумя
двумя кругами с центрами
в точках $(-8, 0)$ и $(0, 0)$
и радиусами 1 и
2 соответственно.



П.к. по условию должно быть **только**
решения, то прямая (1) должна
касаться этих окружностей.

Прямая, может касаться окружностей
двумя способами



В I случае $\triangle O_1 P_1 X \sim \triangle O_2 P_2 X$ по двум
углам $\Rightarrow \frac{O_1 X}{X O_2} = \frac{O_1 P_1}{O_2 P_2}$

В ~~II~~ нашем случае у X будет координата
 $(-\frac{16}{3}; 0)$

Пусть XA касается окр $x^2 + y^2 = 4$

$$XC = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3} \quad XA^2 = XC \cdot XO = \frac{10}{3} \cdot \frac{16}{3} = \frac{160}{9}$$

$$XA = \frac{4}{3}\sqrt{10}$$



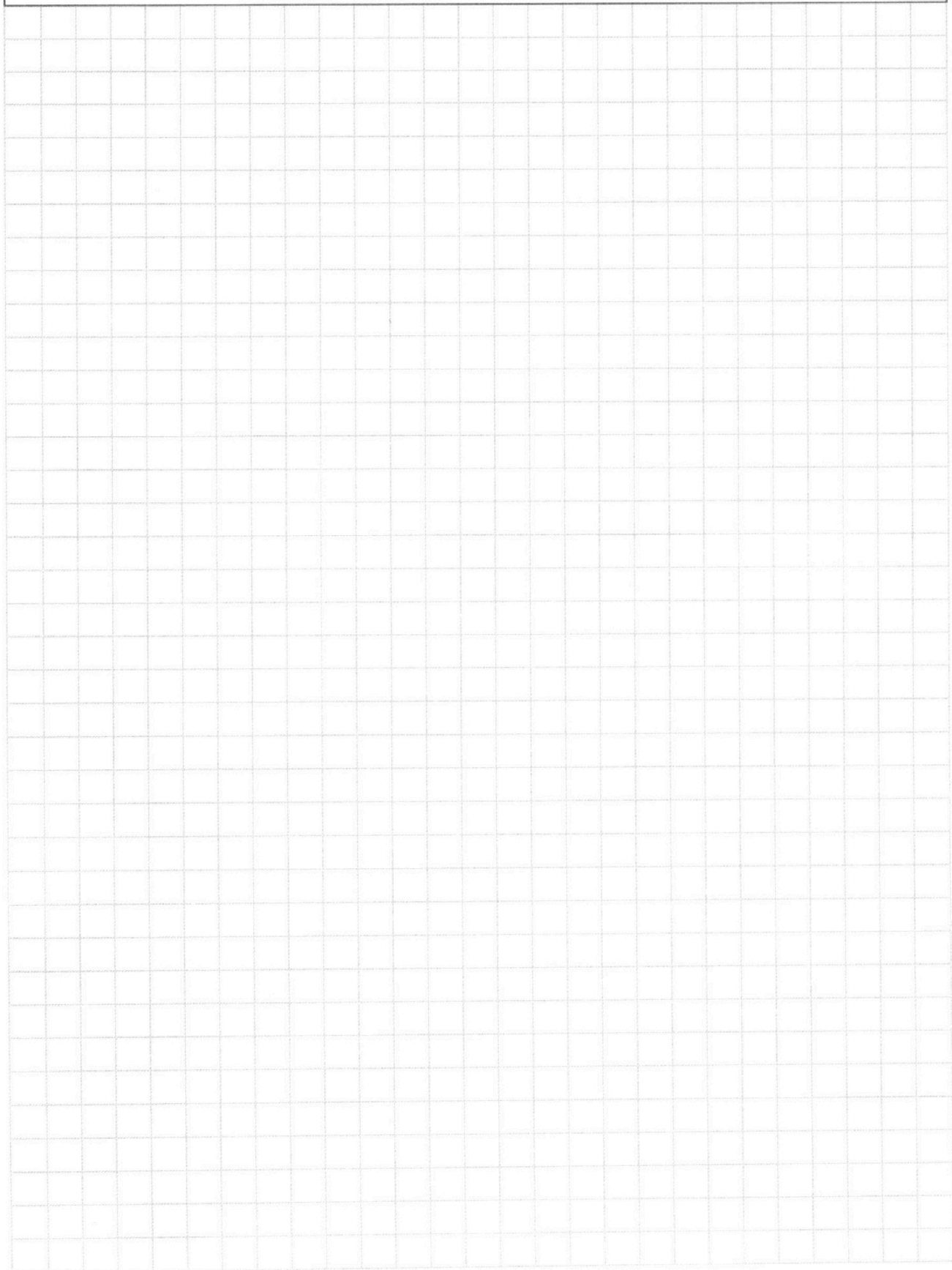
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$$(x+8)^2 + y^2 = 1$$

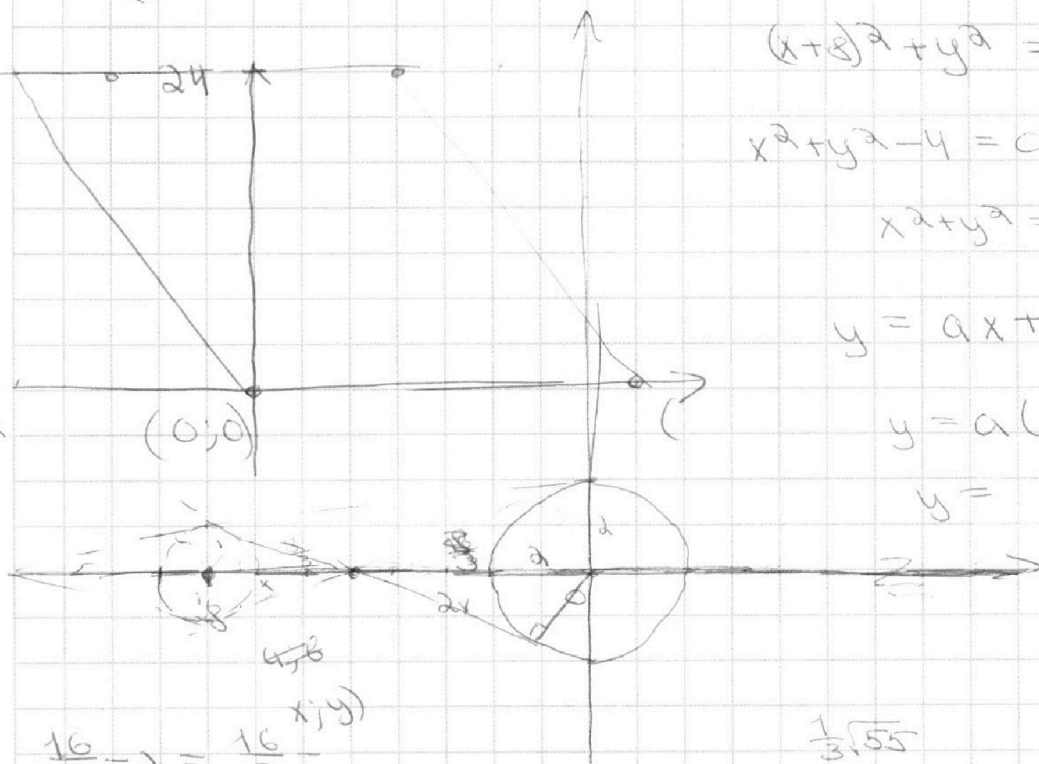
$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$y = ax + 10b$$

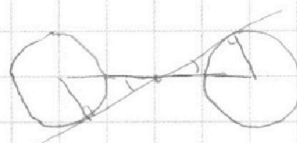
$$y = a(x-8) \perp$$

$$y =$$



$$\frac{16}{3} - 2 = \frac{16}{3} - \frac{10}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\frac{64}{9} - 1 = \frac{55}{9} = \frac{1}{3}\sqrt{55}$$



$$(x+8)^2 + y^2 = 1$$

$$(x + \frac{16}{3})^2 + y^2 = \frac{1}{3}\sqrt{55} + \frac{55}{3}$$

$$16x + 64 - \frac{22}{3}x + \frac{256}{9} = \frac{52}{3}$$

$$-\frac{16x}{3} = 64 - \frac{256}{9} + \frac{52}{3}$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$\sqrt{2(x-1)(x-\frac{3}{2})} + \sqrt{2(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}} = 1$$

$$t = x - 1$$

$$\sqrt{2 + (t - \frac{1}{2})} + \sqrt{2(t + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}}$$

$$-(4x^2 + 3x + 3) = 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3}\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$0 = 9 -$$

$$\sqrt{2(t + \frac{1}{4})(t - \frac{1}{4})}$$

$$2 + t - \frac{1}{8}$$

$$x = \frac{45}{2}$$

$$\begin{array}{r} 128 \\ - 33 \\ \hline 95 \end{array}$$

$$2x^2 - 5x$$

$$a: 2^{p_1}$$

$$p_1 + p_2 \geq 0$$

$$b: 7^{p_2}$$

$$p_2 + p_3 \geq 17$$

$$c: 7^{p_3}$$

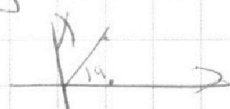
$$p_1 + p_3 \geq 37$$

$$p_1 + p_2 + p_3 \geq 37$$

$$p_1 + p_3 \geq 37$$

$$p_1 = 17$$

$$y = ax$$



$$\begin{array}{l} x_1 + d_3 + d_2 \geq 51 \\ x_1 + d_3 + d_2 \geq 26 \end{array}$$

$$2d_2 \geq 1$$

$$d_2 \geq 1$$

$$2x^2 - 5x + 3$$

$$x < 0$$

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 3$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \geq \sqrt{3} > 1$$

$$a, b, c$$

$$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$a^2 b^2 c^2: 2^{51} \cdot 7^{54}$$

$$a: 2^{d_1}$$

$$b: 2^{d_2}$$

$$c: 2^{d_3}$$

$$d_1 + d_2 \geq 14$$

$$d_2 + d_3 \geq 17$$

$$d_1 + d_3 \geq 20$$

$$2^{26} \cdot 7^{37}$$

$$d_1 + d_2$$

$$d_1 + d_3 + 2d_2 \geq 21$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$(2 - 7x) \left(\frac{1}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} - 1 \right) = 0$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - 8ab} \quad \text{НОД}(a; b) = 1$$

$$8ab : d$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x \quad 8 : d$$

$$D = 25 - 24 = 1$$

$$D = 4 - 8$$

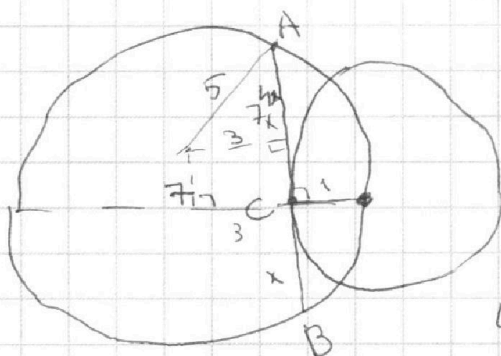
$$x = \frac{5 \pm 1}{4} = \frac{3}{2}, 1$$

$$D < 0$$

$$2 - 5x \neq 2x$$

$$\sqrt{2(x-1)(x-\frac{3}{2})} -$$

$$\frac{3+5}{(3+5)^2 - 8 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{8}{8^2 - 120} = \frac{1}{8-15} = -\frac{1}{17}$$



$$2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1 +$$

$$+ 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 49x^2 + 28x + 4$$

$$4x^2 - 3x + 2\sqrt{\quad} = 49x^2 - 28x$$

$$45x^2 + 25x = 2\sqrt{\quad}$$

(8)

$$2(x-1)(x-\frac{3}{2}) \geq 0$$

$$x \in (-\infty; 1) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$$

$$5x(9x-5)$$

$$(2x^2 - 5x + 3) - (2x^2 + 2x + 1) = 2 - 7x$$

A

B

$$2x^2 + 2x + 1 = 2(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}) +$$

$$A - B = (\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B}) = 2 - 7x \cdot 2(x + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$4x^2 + 3x + 3 + 2\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 0$$

