



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$\begin{cases} ab: 2^{19} 7^{10} \\ bc: 2^{17} 7^{17} \\ ac: 2^{20} 7^{37} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = x \cdot 2^{19} 7^{10} \\ bc = y \cdot 2^{17} 7^{17} \\ ac = z \cdot 2^{20} 7^{37} \end{cases}, x, y, z \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (abc)^2 = xyz \cdot 2^{19+17+20} \cdot 7^{10+17+37} = xyz \cdot 2^{56} \cdot 7^{64} =$$

$$xyz \cdot 2 \cdot (2^{25} \cdot 7^{32})^2, \text{ т.е. } (abc)^2 - \text{полный квадрат,}$$
$$(2^{25} \cdot 7^{32})^2 - \text{полный квадрат} \Rightarrow 2xyz - \text{полн. кв.},$$

как частное полн. кв. Заметим, что величина abc минимальна, когда величина xyz минимальна, а минимальный полный квадрат вида,

$$2xyz = 4 \text{ (это не 1, т.к. есть множитель 2)}$$

$$\text{при } x=y=1 \text{ и } z=2. \text{ Тогда } abc = \sqrt{2xyz \cdot (2^{25} \cdot 7^{32})^2} =$$
$$= 2 \cdot 2^{25} \cdot 7^{32} = 2^{26} \cdot 7^{32}$$

$$\text{Ответ: } 2^{26} \cdot 7^{32}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2

30
37
56

Т.к. дробь $\frac{a}{b}$ - несократима, то $\text{НОД}(a; b) = 1$.

Заметим, что $m = \text{НОД}(a+b; a^2-6ab+b^2)$

$$a^2-6ab+b^2 = (a+b)^2 - 8ab. \text{ Пусть } u = a+b,$$

$a^2-6ab+b^2$ есть общий делитель d . Тогда

$$\begin{cases} a+b : d \\ (a+b)^2 - 8ab : d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b : d \\ 8ab : d \end{cases}$$

Т.к. $\text{НОД}(a; b) = 1$ и $a+b : d$, то $a \not\vdash d$ и $b \not\vdash d$

Иначе, например, если $a : d$, то из $a+b : d$ и $b : d$,
т.е. $\text{НОД}(a; b) > 1$.

$$\text{Но из } 8ab : d \Leftrightarrow \begin{cases} 8 : d \\ a : d \\ b : d \end{cases}, \text{ значит } 8 : d,$$

значит максимальное $d = 8$.

Докажем, что оно подходит и $m = 8$:

$$\text{Пусть } a=3, b=5. \text{ Тогда } a+b=8, a^2-6ab+b^2=$$

$$= 9 - 6 \cdot 3 \cdot 5 + 25 = 34 - 90 = -56. \text{ Тогда}$$

$$\text{НОД}(a+b; a^2-6ab+b^2) = \text{НОД}(8; -56) = 8.$$

Ответ: $m = 8$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача Т. Тип: $g \in \mathbb{N}_{0,11}$:

$$25 = 16x^2 + 25 \frac{(7x^2 - 1)^2}{(x^2 + 1)(49x^2 + 1)} \mid \cdot (x^2 + 1)(49x^2 + 1)$$

$$25(x^2 + 1)(49x^2 + 1) = 16x^2(x^2 + 1)^2(49x^2 + 1) + 25(7x^2 - 1)^2;$$

$$25(49x^4 + 50x^2 + 1) = 16x^2(49x^4 + 50x^2 + 1) + 25(49x^2 - 14x^2 + 1)$$

$$\underline{25 \cdot 49x^4} + 25 \cdot 50x^2 + \underline{25} = 16 \cdot 49x^6 + 16 \cdot 50x^4 + 16x^2 +$$

$$+ \underline{25 \cdot 49x^4} - 25 \cdot 14x^2 + \underline{25};$$

$$25 \cdot 50x^2 = 16 \cdot 49x^6 + 16 \cdot 50x^4 + 16x^2 - 25 \cdot 14x^2$$

$$16 \cdot 49x^6 + 16 \cdot 50x^4 + 16x^2 - 25 \cdot 64x^2 \mid : 16x^2$$

$$49x^4 + 50x^2 + 1 - 25 \cdot 4 = 0;$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0; \mid$$

$$\begin{cases} x^2 = 1; & n = 1, \text{ т.к. } n \geq 0 \text{ в силу упр. задачи} \\ n^2 = -\frac{99}{49} - \text{нет. р-н} \end{cases}$$

$$n = 1 \Rightarrow AB = 8x = 8.$$

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N4

25
230
228

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x \quad | \sqrt{}$$

$$\begin{aligned} 2x^2-5x+3+2x^2+2x+1-2\sqrt{2x^2-5x+3} \cdot \sqrt{2x^2+2x+1} &= \\ = 4x^2-28x+4; \end{aligned}$$

$$2\sqrt{2x^2-5x+3} \cdot \sqrt{2x^2+2x+1} = -45x^2+25x^2 \quad | \sqrt{}$$

$$\left\{ \begin{aligned} 4(2x^2-5x+3)/(2x^2+2x+1) &= (5x(-9x^2+5))^2 \\ 5x/(5-9x) &\geq 0; \quad (*) \end{aligned} \right.$$

$$\begin{cases} 4(4x^4+4x^3+2x^2-10x^3-10x^2-5x+6x^2+6x+3) = \\ = 25x^2(9x-5)^2 \end{cases}$$

$$4(4x^4-6x^3+2x^2+6x+3) = 25x^2(81x^2-90x+25)$$

$$16x^4-24x^3-8x^2+4x+12 = 2025x^4-2250x^3+625x^2;$$

Заметим, что $2x^2-5x+3-2x^2-2x-1=2-7x \Rightarrow$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2x^2-5x+3-(2x^2+2x+1);$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = (\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1});$$

$$(\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1});$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} &= 1 \\ \sqrt{2x^2-5x+3} &= \sqrt{2x^2+2x+1} \end{aligned} \right.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} \sqrt{2x^2+2x+1} = 1 - \sqrt{2x^2-5x+3} \quad | \sqrt{}^2 \\ 2x^2-5x+3 = 2x^2+2x+1 \\ 2x^2+2x+1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 244 \ 2 \\ 122 \ 2 \\ \hline 61 \end{array}$$

$$\begin{cases} 7x = 2 \\ 2x^2+2x+1 = 1 - 2\sqrt{2x^2-5x+3} + 2x^2-5x+3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -7x+3 = 2\sqrt{2x^2-5x+3} \quad | \sqrt{}^2 \\ x = \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -7x+3 > 0 \\ 49x^2-42x+9 = 4(2x^2-5x+3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 41x^2-22x-3 = 0 \\ x \leq \frac{3}{7} \\ x = \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{22+2\sqrt{61}}{41} \\ x = \frac{22-2\sqrt{61}}{41} \\ x \leq \frac{3}{7} \\ x = \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ x = \frac{22-2\sqrt{61}}{41} \end{cases}$$

$$\frac{2}{7} = 121 + 3 \cdot 41 = 121 + 123 = 244 = 4 \cdot 61$$

$$\frac{22-2\sqrt{61}}{41} \quad \sqrt{}^2 \quad \frac{3}{7}$$

$$\frac{154-14\sqrt{61}}{31} \quad \sqrt{}^2 \quad \frac{123}{14\sqrt{61}}$$

$$\frac{31}{14} \sqrt{\sqrt{61}}$$

$$\frac{31}{14} < 7 < \sqrt{61}$$

$$22 \quad 14\sqrt{61} \quad \sqrt{}^2 \quad 123-154$$

Ответ: $\frac{2}{7}, \frac{22-2\sqrt{61}}{41}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

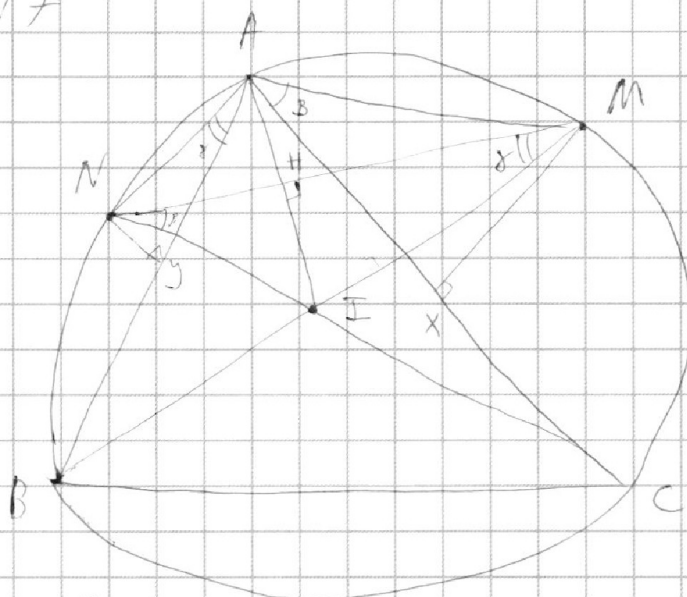
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N7



X, Y - основания высот.

Пусть $\angle B = 2\beta$
 $\angle C = 2\gamma$.

1) Тогда $\angle MNC =$
 $\angle MAC = \frac{\angle B}{2} = \beta$
(т.к. M - сев. дуга)

Аналогично $\angle NMB =$
 $= \angle NAB = \gamma$.

2) По длине отрезков $AM = MI$ и $AN = NI \Rightarrow$

$AMIN$ - ромб и $AI \perp MN$ и $HI = \frac{AI}{2}$.

3) $AN \cdot \sin \beta = \frac{MX}{AM}$; $AM \cdot \sin \beta = \frac{9}{2}$. Аналогично

$AN \cdot \sin \gamma = 2$. $HI = \sin \gamma \cdot MI$, но $MI = AM \Rightarrow$

$HI = \sin \gamma \cdot AM$. Аналогично $HI = \sin \beta \cdot AN \Rightarrow$

$HI^2 = \sin \gamma \cdot AM \cdot \sin \beta \cdot AN = \sin \beta \cdot AM \cdot \sin \gamma \cdot AN =$

$= \frac{9}{2} \cdot 2 = 9 \Rightarrow HI = 3 \Rightarrow AI = 186$

Ответ: 186

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

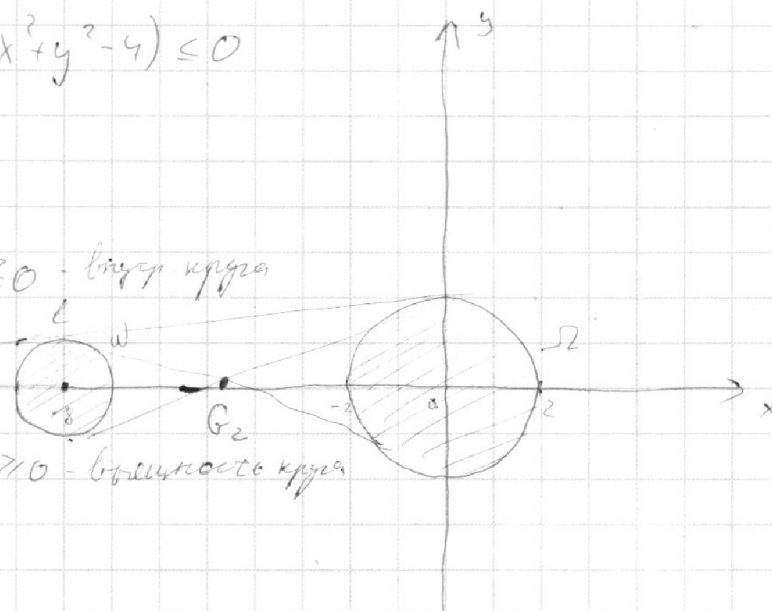


N6

$$\begin{cases} ax + y + 10b = 0 \\ 1/(x+8)^2 + y^2 - 1 / (x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$$y = -ax - 10b$$

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 - \text{внутри круга} \\ G_1: x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \\ (x+8)^2 + y^2 - 1 \geq 0 - \text{вне круга} \\ x^2 + y^2 - 4 \leq 0 \end{cases}$$



Заметим, что любая прямая L , которая пересекает W или Ω имеет на себе бесконечно много решений.

Если прямая не пересекает W и Ω или касается одной из них, то система имеет 0 или 1 решение.

И только если в касании сойдут окружности, то у системы будет два решения.

Из условия задачи получаем, что $y = -ax - 10b$ произвольная прямая, задаваемая параметрами a .

Пусть $10b = c$. Тогда приводим систему:
 $y = -ax - c$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax+y+c \neq x^2+y^2-4 \\ ax-y+c = \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + (ax+c)^2 = 4 \\ (x+8)^2 + (ax+c)^2 = 1 \end{cases}$$

где оба уравнения имеют одно р-е.

$$(a^2+1)x^2 + 2acx + c^2 - 4 = 0$$

$$(a^2+1)x^2 + (2ac+16)x + c^2+63 = 0$$

$$\begin{cases} D_1 = a^2c^2 - (a^2+1)(c^2-4) = 0 \\ D_2 = (ac+8)^2 - (a^2+1)(c^2+63) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a^2 - c^2 + 4 = 0 \quad (1) \\ -63a^2 + c^2 + 16ac + 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$a^2c^2 - (a^2c^2 - 4a^2 + c^2 - 4) = 0$$

$$a^2c^2 + 16ac + 64 - (a^2c^2 + 63a^2 + c^2 + 63) = 0$$

$$\begin{cases} c^2 = 4a^2 + 4 \\ c^2 = -63a^2 + 16ac + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a^2 + 4 = -63a^2 + 16ac + 1 \\ 4a^2 - c^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 67a^2 - 16ac + 3 = 0 \\ 4a^2 - c^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

Из второй системы можем получить следующие:

$$8(2x+8) = -3; 16x = -67; x = -\frac{67}{16}$$

$$\text{Из 1: } a^2c^2 = 4a^4 + 4a^2 \text{ и } c^2 = 4a^2 + 4$$

$$\text{Из 2: } 16ac = 63a^2 + c^2 - 1,$$

$$256a^2c^2 = (63a^2 + c^2)^2 - 2(63a^2 + c^2) + 1$$

$$\text{Подставим из 1, получим: } 4 \cdot 256(a^4 + a^2) = (67a^2 + 4)^2 - 2(67a^2 + 4) + 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 (продолжение) Пусть $16b = c$

$$1024a^4 + 1024a^2 = 4488a^3 + 536a^2 + 16 - 134a^3 - 84a^2$$

$$8965a^4 - 622a^3 + 9 = 0,$$

У окружностей ω и Ω есть два центра симметрии (внеш. и внутр.) Вследствие из сим-ии, что эти центры лежат на Ox . Пусть

$G_1(x_1; 0)$ и $G_2(x_2; 0)$. Т.к. отношение радиусов окружностей равно 2, то центр ω - сев.

отрезка G_1O . Тогда $x_1 = -16$ и мы ищем касательные из G_1 к Ω .

$y = ax + c$ проходит через $(-16; 0) \Rightarrow -16a + c = 0; 16a = c$

и ур-ие $x^2 + (ax + c)^2 = 4$ имеет один корень $\Rightarrow$

$$(a^2 + 1)x^2 + 2acx + c^2 - 4 = 0, D_x = a^2c^2 - (a^2 + 1)(c^2 - 4) = 0;$$

$$4a^2 - c^2 + 4 = 0 \Rightarrow 4a^2 - 256a^2 + 4 = 0, -252a^2 + 4 = 0;$$

$$a^2 = \frac{4}{252} \Rightarrow a = \pm \sqrt{\frac{1}{63}} = \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{7}}$$

Если G_2 - центр внутр. симметрии, то G_2 делит отрезок $(O; \text{центр } \omega)$ в отношении $2:1$, считая от O .
 $\Rightarrow x_2 = -8 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{16}{3}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6 (продолжение)

Мы ищем касательные из G_2 к Ω :

$y = ax + c$ проходит через $(-\frac{16}{3}, 0) \Rightarrow$

$$0 = -\frac{16}{3}a + c; \quad 16a = 3c. \text{ и}$$

$x^2 + (ax^2 + c)^2 = 4$ имеет один корень, т. е.

$$4a^2 - c^2 + 4 = 0; \quad 36a^2 - (16a)^2 + 36 = 0,$$

$$36 = 220a^2; \quad a^2 = \frac{36}{220} = \frac{9}{55}; \quad a = \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$$

$$\text{При } a = \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{7}} \quad 16a = \pm \frac{16}{3} \sqrt{\frac{1}{7}} = 106, \text{ т. е.}$$

$$b = \pm \frac{8}{15} \sqrt{\frac{1}{7}}$$

$$\text{При } a = \pm \frac{3}{\sqrt{55}} \quad 16a = \pm \frac{16 \cdot 3}{\sqrt{55}} = 308, \text{ т. е.}$$

$$b = \pm \frac{8}{5\sqrt{55}}$$

$$\text{Ответ: } \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{7}}, \quad \pm \frac{3}{\sqrt{55}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

