



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

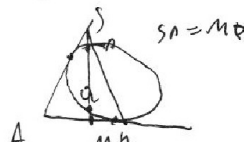
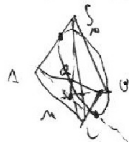
имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1. $(abc)^2: 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$; тогда

$(abc)^2: 2^{36} \cdot 3^{60} \cdot 5^{52}$ (н.д. мин. Вхождение

^{н.д.}
числа в $(abc)^2$ - четна):

тогда $abc: 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$;

abc - мин. $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$;

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$LF = \sqrt{LE^2 + EF^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{\sqrt{35}}(CF)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{10}} \cdot 14x^2 - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{35}} CF\right)^2};$$

$$CF^2 + 14x^2 = CF \cdot \sqrt{\frac{25}{35} CF^2 + \frac{35}{10} \cdot 14^2 x^4 + \frac{10}{35} CF^4 - 28 CF^2 x^2};$$

$$CF^4 + 28 CF^2 x^2 + 14^2 x^4 = CF^4 \cdot \frac{25}{35} + \frac{35}{10} \cdot 14^2 x^4 + \frac{10}{35} CF^4 - 28 CF^2 x^2;$$

$$28 CF^2 x^2 + 14^2 x^4 = \frac{35}{10} \cdot 14^2 x^4 - 28 CF^2 x^2 \quad | : x^2$$

$$28 CF^2 + 14^2 x^2 = \frac{35}{10} \cdot 14^2 x^2 - 28 CF^2;$$

$$56 CF^2 = 14^2 \cdot \frac{25}{10} x^2; \quad CF = \sqrt{\frac{14^2 \cdot 25}{10 \cdot 56}} x =$$

$$= \frac{\sqrt{35}}{2} x; \quad \triangle CEF \sim \triangle ABC; \quad k = \frac{AC}{CF} = \frac{\frac{\sqrt{14}}{2} x}{\frac{\sqrt{35}}{2} x} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{14}}{2} \cdot 2}{\frac{\sqrt{35}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}; \quad \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = k^2 = \frac{8}{5}. \quad \text{Answer: } \frac{8}{5}.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

реш.

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x \quad ;$$

$$\begin{cases} 10 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - (x + 2\pi n) \right) = 9\pi - 2x; n \in \mathbb{Z} \\ 10 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k \right) \right) = 9\pi - 2x; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5\pi - 10x + 20\pi n = 9\pi - 2x; n \in \mathbb{Z} \\ -5\pi + 10x - 20\pi k = 9\pi - 2x; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x + 4\pi + 20\pi n = 0 \\ 12x - 14\pi - 20\pi k = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2,5\pi n; n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{7}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi k; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

~~Ответ: $\left\{ -\frac{\pi}{2} + 2,5\pi n; \frac{7}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi k; n, k \in \mathbb{Z} \right\}$.~~

$$0 \leq \arccos(\sin x) \leq \pi; \quad 0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi;$$

$$-0,5\pi \leq x \leq 4,5\pi; \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2,5\pi n; n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{7}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi k; k \in \mathbb{Z} \end{cases};$$

тогда

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = 2\pi \\ x = 4,5\pi \\ x = \frac{7}{6}\pi \\ x = \frac{17}{6}\pi \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ -\frac{\pi}{2}; 2\pi; 4,5\pi; \frac{17}{6}\pi \right\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

знаем для любого x коэффициента,

только $\frac{4\sqrt{2}}{7}$ или меньше $-\frac{4\sqrt{2}}{7}$; чтобы

получить такое b ; а для остальных - нельзя;

т.е. только для x коэффициента

наим. значения b в 2 момента;

$$\text{тогда } \begin{cases} -\frac{5}{6a} > \frac{4\sqrt{2}}{7} \\ -\frac{5}{6a} < -\frac{4\sqrt{2}}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{6} < \frac{4\sqrt{2}a}{7} \\ -\frac{5}{6} < -\frac{4\sqrt{2}a}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -\frac{35}{24\sqrt{2}} \\ a < \frac{35}{24\sqrt{2}} \end{cases}$$

или для $a=0$; тогда

$$\text{ответ: } \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}} ; \frac{35}{24\sqrt{2}} \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

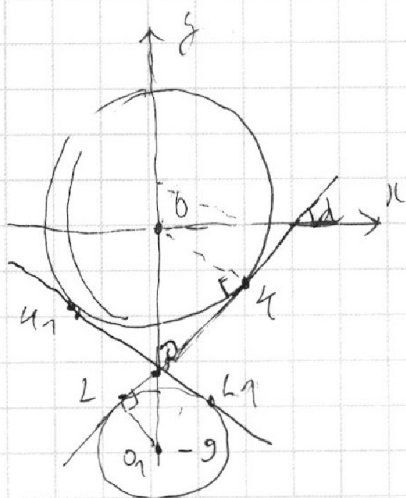
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4.

$$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases} \quad \text{— 2 окружности радиусами} \\ 5 \text{ и } 2; \text{ с } y \text{ - в точках} \\ 0 \text{ и } (0; -9).$$



L -касат. к двум окр.

$$O_1K = 5; O_2L = 2;$$

$$KO_2 = 9.$$

$$\frac{OK}{KO_2} = \frac{5}{9}; OK = \frac{5}{9} \cdot 9 = 5;$$

$$KO_1 = \frac{2}{9} \cdot 9 = 2.$$

$$\cos \alpha = \frac{OK}{KO_1} = \frac{5}{2} = \frac{25}{4} = \frac{7}{9};$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{1 - \frac{49}{81}}}{\frac{7}{9}} = \frac{\frac{4\sqrt{2}}{9}}{\frac{7}{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{7} \quad \text{— кр. коэф. } L;$$

L_1 и L_2 — вторая касат. к 2-й окр.; тогда $\frac{4\sqrt{2}}{7}$ — кр.

коэф. L_1 и L_2 ; $5x + 6ay - 6 = 0$ — м. прямой;

при $a = 0$; $5x - 6 = 0$ —, при $b = 0$ — 4 точки касания;

при $a \neq 0$; $y = -\frac{5x}{6a} + \frac{6}{6a}$; кр. коэф. $-\frac{5}{6a}$;

значит мы можем выбрать такой $\frac{6}{6a}$ сов. числ.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



р/5.

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{11}^2 \frac{1}{121} - 5;$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \cdot \frac{1}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \log_{11}^2 11 - 5;$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{16}{3} \frac{1}{\log_{11} x} + 5 = 0;$$

$$\log_{11}^4 (0,58) + \log_{0,58}^2 11 = \log_{0,121}^2 (11^{-13}) - 5;$$

$$\log_{11}^4 (0,58) + \log_{0,58}^2 11 = -\frac{13}{3} \log_{0,58}^2 11 - 5;$$

$$\log_{11}^4 (0,58) + \frac{16}{3} \frac{1}{\log_{11} 0,58} + 5 = 0;$$

$$\begin{cases} 3 \log_{11}^5 (0,58) + 15 \log_{11}^3 0,58 + 16 = 0 \\ 3 \log_{11}^5 (x) + 15 \log_{11}^3 x - 16 = 0; \end{cases}$$

$$3 \log_{11}^5 (x) + 15 \log_{11}^3 x - 16 = 0;$$

$$\begin{aligned} & 3 (\log_{11} x + \log_{0,58}^{0,5} x) (\log_{11}^4 x + \log_{11}^{0,5} x - \log_{11}^2 x \cdot \log_{11}^{0,5} x - \\ & - \log_{11}^{0,5} x \cdot \log_{11}^3 x + \log_{11}^2 0,58 \cdot (\log_{11}^2 x + 5)) = 0; \end{aligned}$$

$$A > 0; \text{ т.е. } x^5 + 5x^4 = (x+y)(x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 5x + 5y^2);$$

где $x^2 + 5$ и $x+y$ им. отрицат. знак; знаем

Вторая скобка имеет знак +, или равна 0 при $x=y=0$;

знаем $A > 0$; тогда $\log_{11} x + \log_{11} 0,58 = 0$;

$$\log_{11} x \cdot 0,58 = 0; \quad x \cdot 0,58 = 1; \quad x \cdot 8 = 2. \quad \text{Ответ: } 2.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

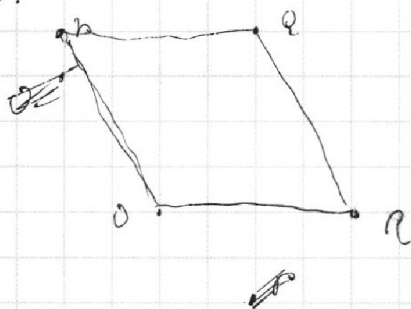
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6.



$$PQ: y = 4x + b; \quad \begin{cases} 10 = -15 \times 1 + b \\ 10 = \end{cases} \quad y = 10;$$

$$OR: y = 0; \quad OR: y = 4x + b; \quad \begin{cases} 0 = 0 + b \\ 10 = -15 \times 1 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 4 = -6 \end{cases};$$

$$PS: y = -6x;$$

$$QR: y = 4x + b; \quad \begin{cases} 10 = 2 \times 1 + b \\ 0 = 17 \times 1 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = -6 \\ b = 102 \end{cases}; \quad QR: y = -6x + 102$$

$$A: \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 10 \\ y_1 \geq -6x_1 \\ y_1 \leq -6x_1 + 102 \\ 0 \leq y_2 \leq 10 \\ y_2 \geq -6x_2 \\ y_2 \leq -6x_2 + 102 \\ 6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 10 \\ 0 \leq y_2 \leq 10 \\ 0 \leq y_1 + 6x_1 \leq 102 \\ 0 \leq y_2 + 6x_2 \leq 102 \\ (y_2 + 6x_2) - (y_1 + 6x_1) = 48 \end{cases}$$

$$\text{now } -15 \leq x_1 \leq 1; \\ -15 \leq x_2 \leq 1;$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

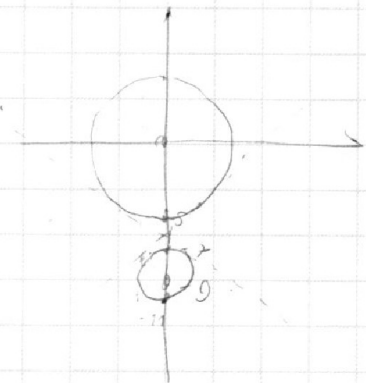


$$s + \omega s - 6 = 0$$

$$(x^2 + s^2 - 15) + (1 + s)^2 + 12s + 22 = 0$$

$$x^2 + s^2 = 25$$

$$x^2 + s^2 + 22 = 9$$



$$-\frac{2}{3} \cos_{11} 11 - 5 = -\cos_{11}^4 11 - 6 \cos_{11} 11$$

$$\cos_{11}^4 0.55 + \cos_{11}^4 11 = \frac{16}{3} \cos_{11}^4 11 - 5$$

$$\cos_{11}^4 0.55 + \frac{16}{3} \cos_{11}^4 11 - 5 = 0$$

$$\cos_{11}^4 11 - \frac{16}{3} \cos_{11}^4 11 + 5 = 0$$

$$3 \cos_{11}^5 0.55 - 5 \cos_{11}^5 0.55 + \frac{16}{3} = 0$$

$$3 \cos_{11}^5 11 + 15 \cos_{11}^5 11 - 16 = 0$$

$$3(\cos_{11}^5 0.55 + \cos_{11}^5 11) + 15(\cos_{11}^5 0.55 + \cos_{11}^5 11) =$$

$$= 3(\cos_{11}^5 0.55 + \cos_{11}^5 11) + 15 = 0$$

$$\cos_{11}^5 0.55 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$abc^2: 2 \cdot 36 \cdot 3 \cdot 5^2$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}$$



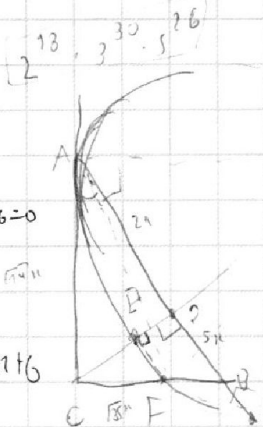
$$4(u+1)+6=0$$

$$u = \frac{-6}{4+1}$$

$$\frac{25}{35}CF^2$$

$$-\frac{1}{4}u = u+6$$

$$4u+6$$



$$CF = \sqrt{\frac{35}{4}} \cdot u$$

$$CF^2 = \frac{74^2 \cdot 25^2}{10 \cdot 56} \cdot u^2$$

$$74u^2 = CE \cdot CL$$

$$56CF^2 = 74u^2 \cdot \left(\frac{35}{10} - 4\right)u^2$$

$$\frac{CF}{\sqrt{35}u} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{35}} \cdot CF = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{AF}{CE} = \frac{AL}{AC} = \frac{FL}{AF}$$

$$10 \arccos(\sin \alpha) = 95^\circ - 2u$$

$$\frac{AC^2}{56CF}$$

$$\frac{CF}{2u} = \frac{5u}{CF}$$

$$5u \cdot \frac{CF}{\sqrt{35}u} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$CF^2 = 10u^2$$

$$\left(\frac{5}{\sqrt{35}}CF\right)^2 + \left(CL - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{35}}CF\right)^2 \cdot CF = 74u^2 + CF^2$$

$$CF = \sqrt{10}u$$

$$\frac{35}{10} \cdot 10u^2 \cdot 2 - 28CF^2 =$$

$$= 14u^2 + 28CF^2$$

$$CF^2 + \frac{35}{10}10u^2 - 28u^2(CF^2)$$

$$= CF^4 + 4^2u^4 + 28CF^2u^2$$

$$74u^2 = CE \cdot CL \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{35}} CF \cdot CL$$

$$CF^2 + 14u^2 = CF \cdot FL$$

$$\frac{15}{35}CF^4 + \left(\frac{35}{10}14u^4 + \frac{10}{35}CF^4 - 28u^2CF^2\right)$$

$$CL = \frac{74u^2 \cdot \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{10}}}{CF}$$

$$74u^2 = CE \cdot CL$$

$$\frac{25}{35}CF^2 + \left(74u^2 \cdot \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{10}} - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{35}}CF^2\right) \cdot CF =$$

$$= 74u^2 + CF^2 \cdot \left(\frac{25}{35}CF^2 + \left(74u^2 \cdot \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{10}} - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{35}}CF^2\right) / 2\right) \cdot CF =$$

$$= (74u^2 + CF^2)^2$$