



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

III. н. $ac : 2^{14}$, но $abc : 2^{14}$

III. н. $ac : 3^{21}$, но $abc : 3^{21}$

III. н. $ac : 5^{39}$, но $abc : 5^{39}$

III. н. $a, b, c \in \mathbb{N}$, но $abc > 0$

и $abc \geq 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$

Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot A$, $b = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3} \cdot B$,

$c = 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3} \cdot C$, где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{Z}$ и не меньше 0.
 $A, B, C \in \mathbb{N}$, но не кратны $\{2, 3, 5\}$.

Тогда, из условия:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 8, & \alpha_1 + \gamma_1 \geq 14, & \beta_1 + \gamma_1 \geq 22, \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 14, & \alpha_2 + \gamma_2 \geq 21, & \beta_2 + \gamma_2 \geq 20, \\ \alpha_3 + \beta_3 \geq 12, & \alpha_3 + \gamma_3 \geq 39, & \beta_3 + \gamma_3 \geq 17. \end{cases}$$

$\alpha_1 = 5, \beta_1 = 3, \gamma_1 = 9$

$\alpha_2 = 12, \beta_2 = 0, \gamma_2 = 17$

$\alpha_3 = 8, \beta_3 = 6, \gamma_3 = 14$

- условия системы выполнены

Докажем, что $abc : 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

III. н. $ac : 5^{39}$, но $abc : 5^{39}$.

III. н. $(\alpha_2 + \beta_2) + (\alpha_2 + \gamma_2) + (\beta_2 + \gamma_2) \geq 14 + 21 + 20$

$2(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) \geq 55$, но

$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 27,5$

$abc : 3^{27,5}$, но $abc : 3^{28}$.

$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 28$ и $abc : 3^{28}$.

III. н. $(\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_1 + \gamma_1) + (\beta_1 + \gamma_1) \geq 8 + 14 + 12$, но

$2(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) \geq 34$

$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 17$

$abc : 2^{17}$

Значит, $abc : 2^{17}$.

Значит, $abc : 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

Тогда, $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

Равенство достигается при $a = 2^5 \cdot 3^{12} \cdot 5^8$

$b = 2^3 \cdot 3^6$ и $c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{39}$

$a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{12}$, $b = 2^3 \cdot 3^6$, $c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{17}$

Ответ: $abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

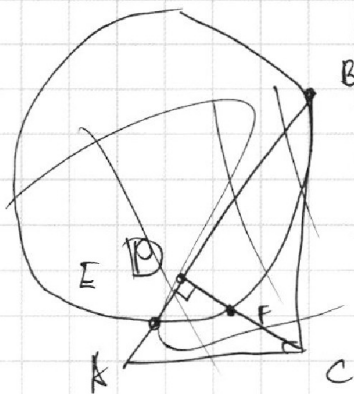
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

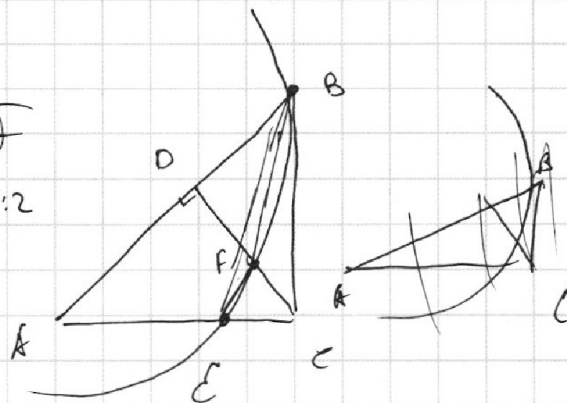
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AB \parallel E$
 $AB \parallel EF$
 $AD:DB = 5:2$

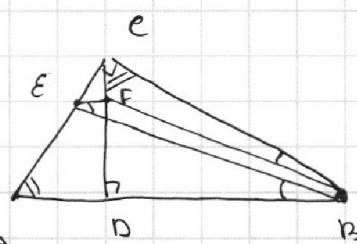
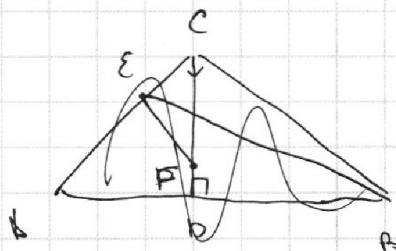
$S_{ABC} : S_{CEF}$



Решение.

т.к. $AB \parallel EF$ и BC — секущая
 и $\angle BCF = \angle EBF$ (оба
 опираются на дугу BF).

т.к. $EF \parallel AB$, то $\angle BCF = \angle ABE$ (как
 соответственные углы при $AB \parallel EF$ и секущей BE).



т.к. $EF \parallel AB$, то
 $\angle CFE = \angle CBA = 90^\circ$

(1) т.к. CP — высота, то $\triangle CDB \sim \triangle ACB$ ($\angle CBA$ — общий, $\angle CDB = \angle ACB = 90^\circ$). Значит, $\angle DCB = \angle CAB$

(2) т.к. $\angle CBF = \angle EBA$, $\angle DCB = \angle CAB$, то $\triangle CFB \sim \triangle AEB$

Тогда, из (2) $\frac{AE}{CF} = \frac{AB}{CB}$, из (1) $\frac{AC}{CP} = \frac{AB}{CB}$

Значит, $\frac{AE}{CP} = \frac{AC}{CP} = \frac{AE+EC}{CF+FD}$

$AE(CF+FD) = (AE+EC)CF$

$AE \cdot FD = EC \cdot CF \Rightarrow \frac{EC}{AE} = \frac{FD}{CF}$

т.к. $EF \parallel AD$, то $\triangle CEF \sim \triangle CAD$ ($\angle ACD$ — общий,

$\angle EFC = \angle ADC = 90^\circ$). Тогда, $\frac{CE}{AC} = \frac{CF}{CD}$ (3)

$\frac{AC}{CE} = \frac{CD}{CF}$

$\frac{AC}{CE} = \frac{AE+EC}{CF} = \frac{AE}{CF} + 1$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{CD}{CF} = \frac{CE+FD}{CF} = \frac{FD}{CF} + 1.$$

Значит, $\frac{FD}{CF} + 1 = \frac{AE}{EC} + 1$

$$\frac{FD}{CF} = \frac{AE}{EC}$$

Т.к. $\frac{FD}{CF} = \frac{AE}{EC}$ и $\frac{FD}{CF} = \frac{EC}{AE}$ (из (3)),

то $\frac{AE}{EC} = \frac{EC}{AE} \Rightarrow AE = EC.$

Значит, $FD = CF$. Т.к. E и F - середины AC и CD соответственно.

Тогда, $S_{CEF} = \frac{1}{4} S_{ACD}$ (EF - средняя линия $\triangle ACD$).

Т.к. $AD : DB = 5 : 2$, то $DB = \frac{2}{5} AD$

$$S_{ABC} = S_{ADC} + S_{CDB} = \frac{1}{2} CD (AD + DB) =$$

$$= \frac{1}{2} CD \cdot AD \left(1 + \frac{2}{5}\right) = \frac{7}{10} CD \cdot AD.$$

$$S_{ADC} = \frac{1}{2} CD \cdot AD.$$

$$S_{CEF} = \frac{1}{4} S_{ADC} = \frac{1}{8} CD \cdot AD.$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{\frac{7}{10} CD \cdot AD}{\frac{1}{8} CD \cdot AD} = \frac{7 \cdot 8}{10} = 5,6.$$

Ответ: $S_{ABC} : S_{CEF} = 56 : 10$

или $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = 5,6.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{то } \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\cos x \text{ имеет период } 2\pi \quad \cos 0 = 1. \\ \cos 2\pi = 1.$$

~~Найдем решение на $\cos(\frac{\pi}{2}) = \cos \cos \frac{\pi}{2} = \sin \frac{\pi}{2}$~~

Положим, $f(x) = \arcsin(\cos x)$ — периодическая с периодом 2π .

$g(x) = \pi - 2x$ — строго убывающая функция

$\arcsin y$ — дает значение значения из промежутка $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Поэтому, ~~тогда~~ $f(x)$ принимает значение только из отрезка $[-5\pi; 5\pi]$.

$g(x) = \pi - 2x$ принимает значение $[-5\pi; 5\pi]$ только при $x \in [-2\pi; 3\pi]$.

Значит, решение $f(x) = g(x)$ есть только на $[-2\pi; 3\pi]$.

Сделаем замену переменной.

$$\text{Пусть } x = -y + \frac{\pi}{2}. \\ \text{Тогда, } \pi - 2x = 2y; \quad \cos x = \cos(\frac{\pi}{2} - y) = \sin y,$$

$$\text{то } \arcsin(\sin y) = 2y.$$

$$\arcsin(\sin y) = y - \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{и т.д. } y - \pi n \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}].$$

$$\text{то } \arcsin(\sin y) = 2y - \pi n = 2y \\ 8y = 2\pi n \quad y = \frac{\pi n}{4}$$

т.е. $\arcsin(\sin y) \in [-5\pi; 5\pi]$, но решение будет искать для $y \in [-2,5\pi; 2,5\pi]$.

$$\text{Положим, } \frac{5\pi n}{4} \in [-2,5\pi; 2,5\pi], \quad n \in [-2; 2].$$

Рассмотрим все $n \in [-2; 2]$.

$$n = -2, \quad y = -2,5\pi, \quad \sin(-2,5\pi) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1 \\ \text{то } \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \quad 2y = -5\pi \quad n = -2 \text{ решение.}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$n = -1. \quad y = -\frac{5}{4}\pi. \quad \sin y = +\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$10 \arcsin\left(+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 10 \cdot \left(+\frac{\pi}{4}\right) = +2,5\pi.$$

$$2y = -2,5\pi.$$

Значит, $n = -1$ ~~не решение~~.

$$n = 0. \quad y = 0. \quad 2y = 0. \quad \sin(y) = 0.$$

$$10 \arcsin(0) = 10 \cdot 0 = 0.$$

$n = 0$ — решение

$$n = 1.$$

$$y = \frac{5}{4}\pi. \quad 2y = 2,5\pi. \quad \sin y = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$10 \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -10 \cdot \frac{\pi}{4} = -2,5\pi.$$

$n = 1$ — не решение

$$n = 2.$$

$$y = 2,5\pi. \quad 2y = 5\pi. \quad \sin y = 1.$$

$$10 \arcsin 1 = 10 \cdot \frac{\pi}{2} = 5\pi.$$

$n = 2$ — решение

$$n = \{-2; 0; 2\} \quad \text{— решение}$$

$$y = \{-2,5\pi; 0; 2,5\pi\}.$$

$$X = -y + \frac{\pi}{2}$$

$$X = \{-2\pi; \frac{\pi}{2}; 3\pi\}.$$

Ответ: $X \in \{-2\pi; \frac{\pi}{2}; 3\pi\}.$

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 10)^2 = 100 - 64 = 36 \end{cases} \end{cases}$$

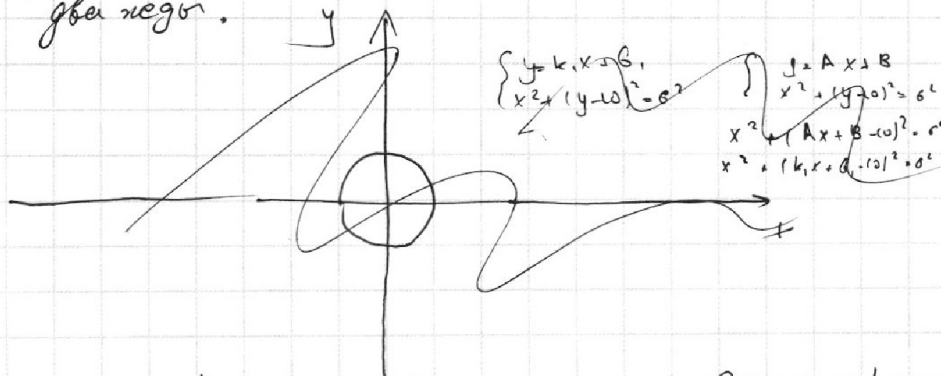
$ax - 3y + 4b = 0$ — уравнение прямой

$\omega_1: x^2 + y^2 = 1$

$\omega_2: x^2 + (y - 10)^2 = 36$ — уравнение окружностей ω_1 и ω_2

Система уравнений состоит из уравнения прямой и уравнения окружностей.

Прямая имеет две точки пересечения с окружностью. Т.к. решений должно быть и, то прямая пересекает каждую окружность в двух точках.



Т.к. центр 1 окружности — $O(0;0)$ и ее радиус $r = 1$, а центр второй $Q(0;10)$, а ее радиус — $R = 6$, то окружности не пересекаются ($OQ = 10$, $r + R = 7$).
 $ax - 3y + 4b = 0$, $3y = ax + 4b$
 $y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

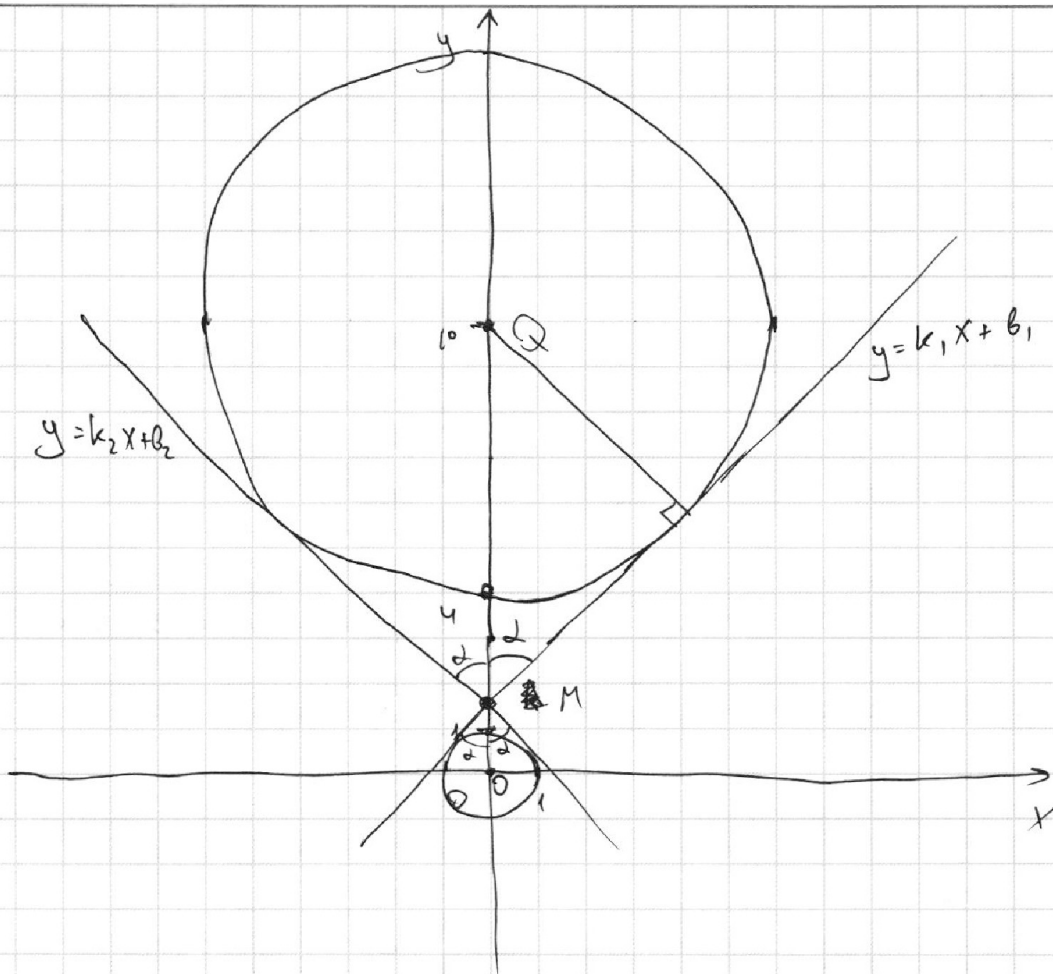
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Т.е. прямая задается как $y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$, то

а — определены наклон, а b — точку пересечения с Oy . Занеим $\frac{a}{3}$ на A , $\frac{4}{3}b$ на B .

Значит, нужно найти также A , то

из множества прямых параллельных $y = Ax$

хотя бы одна пересекает окружность.

Докажем, что ~~эти~~ A — прямые кас. A

Задают прямые ~~касательные~~ A и

имеющие наклон A больше, чем у внешней

касательной с тем же положением

наклона и наклон меньше, чем

у внутренней касательной

с отрицательным изгибом.

($\begin{cases} A > k_1 \\ A < k_2 \end{cases}$, где $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ касательные).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если $0 \leq A \leq k$, то т.к. $y = kx + b$, —
 одностороннее касательная, то
 при $B \leq b_1$ $y = Ax + B$ ~~не~~
 или не пересекает ω_2 или
 касательная ω_2 . А значит, наше
 решение на данном этапе решение.
 (пересечение уже не больше 3).
 (В отсутствие двух пересечений
 почему убедиться в том, что
 α (от точки на рисунке) уменьшается
 при ~~увеличении~~ ~~тогда~~ ~~М~~ от
 — угла между Oy и касательной из M
 уменьшается при ~~увеличении~~ ~~тогда~~
 M вниз по Oy ($\sin \alpha = \frac{R}{QM}$,
 QM — расстояние, значит α — уменьшается),
 а тем самым α тем больше
 тогда, $y = Ax + B$ не может быть касательной
 при $B < b_1$, или не пересекает ω_2
 в двух точках (наклон секущей не
 меньше касательной), а при $B = b_1$,
 $y = Ax + B$ не может быть касательной
 быть секущей, значит, $y = Ax + B$
 при $0 \leq A \leq k$, $B \leq b_1$ имеет
 $C \in \omega_2$ не более одной общей
 точки).
 С другой стороны при $B > b_1$,
 $y = Ax + B$ имеет не более одной
 общей точки с ω_1 (ситуация
 аналогичная с ω_2) ~~кроме~~ ~~тогда~~
 значит, A должно быть не меньше
 k_2 больше k ,
 При $k_2 \leq A \leq k$ все может самое
 т.к. ситуация симметрична,
 записав относительно Oy где
 ситуация $0 \leq A \leq k$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Тогда, $A \leq k_2$.

Или если $y = Ax + b_1$ и $y = Ax + b_2$
при $A > k_1$ будут секущей

для обеих окружностей
но так же при этом, что и
имеет не более одной общей точки
если $0 \leq A \leq k_1$.

Аналогично $y = Ax + b_2$ при $A < k_2$
тоже секущей к обеим
окружностям.

Отсюда используя k_1 и k_2 .

Из геометрии легко видим, что
обе касательные пересекутся на ОО,
т.е. на Оу.

Или если $\sin d = \frac{r}{10-b_1}$, $\sin(90^\circ - d) = \frac{r}{b_1 - 0}$
на касательные

$$\sin d = \frac{r}{10-b_1}$$

касательные
радиусов

$$\frac{r}{10-b_1} = \frac{r}{b_1}$$

$$b_1 = \frac{10}{2}$$

$$\sin d = \frac{r}{b_1 - 0}$$

перпендикуляр

М имеет координаты $(0; b_1)$.

$$\frac{b_1}{10-b_1} = \frac{r}{r}$$

$$b_1 b_1 = 10 - b_1$$

$$2b_1 = 10$$

$$\sin d = \frac{1}{\frac{10}{2}} = \frac{2}{10}$$

$$k_1 = \cos(90^\circ - d) = \frac{\sin(90^\circ - d)}{\cos(90^\circ - d)}$$

$$= \frac{\sin 90^\circ \cos d - \cos 90^\circ \sin d}{\cos 90^\circ \cos d + \sin 90^\circ \sin d} = \frac{\cos d}{\sin d}$$

т.е. d - острый, то $\cos d = \sqrt{1 - \frac{4}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$

$$k_1 = \frac{\frac{\sqrt{51}}{10}}{\frac{2}{10}} = \frac{\sqrt{51}}{2}$$

$$k_2 = -k_1$$

значит,

$$\begin{cases} a > \frac{3\sqrt{51}}{2} \\ a < -\frac{3\sqrt{51}}{2} \end{cases}$$

$$\left[A > \frac{\sqrt{51}}{2}, \right] \left[A < -\frac{\sqrt{51}}{2}, \right]$$

Ответ: $a \in (-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{2}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{2}; +\infty)$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - 3\log_5 5 = \log_5 0,2 - 3$$

$$\log_5^4 y + 4\log_5 5 = \log_5 0,2 - 3$$

из данных равенств ясно, что $2x > 0$, $y > 0$ и $x > 0$ и $y > 0$.

$$625 = 5^4 \quad \log_5 0,2 = \frac{1}{3} \log_5 \frac{1}{5} \quad \log_5 0,2 = \frac{1}{3} \log_5 \frac{1}{5}$$

$$\log_5^4(2x) - 3 \cdot \frac{1}{\log_5 2x} = \frac{4}{3} \log_5 2x - 3$$

$$\log_5^4 y + 4 \cdot \frac{1}{\log_5 y} = -\frac{1}{3} \log_5 y - 3$$

$$\frac{\log_5^5 2x - 3 - \frac{4}{3} + 3\log_5 2x}{\log_5 2x} = 0$$

$$\frac{\log_5^5 y + 4 + \frac{1}{3} + 3\log_5 y}{\log_5 y} = 0$$

$$\log_5^5 2x + 3\log_5 2x - \frac{13}{3} = 0$$

$$\log_5^5 y + 3\log_5 y + \frac{13}{3} = 0$$

Значит, $\log_5^5 2x + 3\log_5 2x = -\log_5^5 y + 3\log_5 y$.

$$\log_5 y = B, \quad \log_5 2x = A$$

$$A^5 + 3A = -(B^5 + 3B)$$

$A^5 + 3A$ — строго возрастающая
 $-B^5 - 3B$ — строго убывающая.

Значит, решение для данных уравнений.

$$A = -B$$

Значит, $\log_5 2x = -\log_5 y$.

$$\log_5 2x + \log_5 y = \log_5 2xy = 0$$

$$2xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{2}$$

Ответ: $xy = \frac{1}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$O(0;0) \rightarrow (0;0)$$

$$P(-16; 80) \rightarrow (-80; 80)$$

$$Q(2; 80) \rightarrow (10; 80)$$

$$R(18; 0) \rightarrow (90; 80)$$

Точка $M(x; y)$ внутри параллелограмма
 будет ~~принадлежать~~ ^{иметь}
 целые координаты в знаменатель
 системе если $x \in \mathbb{Z}$, а $y \in \mathbb{Z}$.

Тогда, условие $5x_2 + y_2 - 5x_1 - y_1 = 45$
 превращается в $x_2 + y_2 - x_1 - y_1 = 45$.

Т.о. для точки A в новом
 параллелограмме нужно найти
 ко-ва. тогда в точке A
 сумма координат B на 45 больше
 суммы координат A и $x_2 \in \mathbb{Z}$, $y_2 \in \mathbb{Z}$.
 Т.е. $x_1 \in \mathbb{Z}$, $x_2 \in \mathbb{Z}$, но $y_2 - y_1 \in \mathbb{Z}$
 (т.е. $45 \in \mathbb{Z}$).

$$\text{т.к. } x_2 - x_1 + y_2 - y_1 = 45,$$

$$\text{то для } A(x_1; y_1)$$

$$x - x_1 + y - y_1 = 45$$

Если перенести начало $(0;0)$

$$\text{в } A, \text{ то } x + y = 45$$

$$y = 45 - x$$

Значит, решение
 принадлежит прямой
 параллельной

$$y = 45 - x,$$

а эти прямые
 параллельны
 QR и PO .

Расстояние от A до этой прямой равно

$$\frac{45 \cdot 45}{\sqrt{45^2}} = \frac{45}{2}$$

то решение есть.

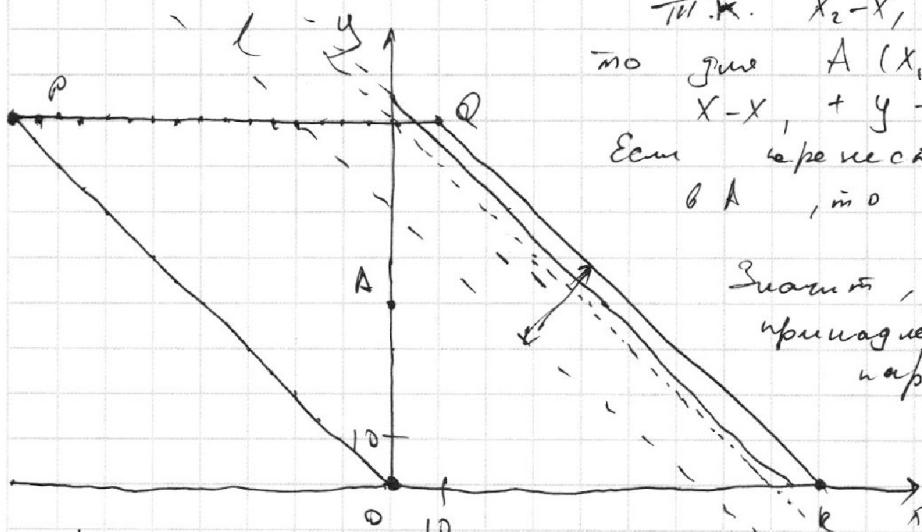
Тогда, если A правее l , где $P(l; QR)$.

$$\text{тогда } \frac{45 \cdot 45}{2} = 1012.5$$

При движении A по прямой параллельной QR ,

иное решение не имеется. Значит, можно

рассчитать 1012.5 . Ответ: 1012.5



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

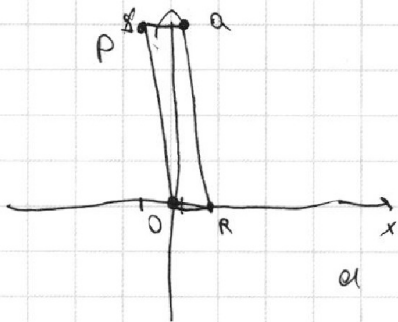
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что прямая QR задается уравнением

$$y = -5x + 90.$$

Прямая PQ : $y = -5x$
а QR и PQ параллельны Ox .

т.к. $5x_2 + y_2 - 5x_1 - y_1 = 45$

Посмотрим какое наименьшее значение принимает $5x_2 + y_2$ при (x_2, y_2) внутри параллелограмма. Внутри параллелограмма y_2 — неотрицательна.

т.к. можем (x_2, y_2) выбрать внутри $PQRO$, то (x_2, y_2) выберем с левой стороны от QR . т.е. при неотрицательном y_2 ,

$$y_2 = -5x + 90, \quad x \geq x_2$$

$$x = \frac{y_2 - 90}{-5} = 18 - \frac{y_2}{5}.$$

$$x_2 \leq 18 - \frac{y_2}{5}.$$

Тогда, $5x_2 + y_2 \leq 5(18 - \frac{y_2}{5}) + y_2 = 90$.
 y_2 не больше 80 т.к. PQ имеет
ниже (x_2, y_2) , а PQ задается
как $y = 80$.

Тогда, $x_2 + y_2 \leq 18 + \frac{4 \cdot 80}{5} = 18 + 64$

т.к. (x_2, y_2) выберем от PO , то при неотрицательном y_2 x_2
 $y_2 = -5x$ $x \leq x_2$
 $x_2 \geq -\frac{y_2}{5}$

Заметим, ищем можем задаться
системой $\begin{cases} 0 \leq y_2 \leq 80 \\ -\frac{y_2}{5} \leq x_2 \leq 18 - \frac{y_2}{5} \end{cases}$

Для точек $A(x_1, y_1)$ ищем
расстояния от начала координат
в 5 раз по оси x .

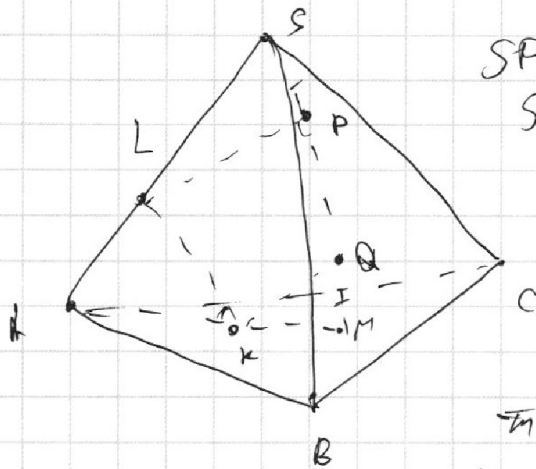
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$SP = MQ \quad SA = 18$$

$$S_{ABC} = 100 \quad BC = 18$$

Точки L, P, Q, K
лежат в одной
плоскости, которая
задаётся прямой
 AM и SA .

т.е. эти четыре
точки лежат в одной

плоскости на одной сфере, т.е.
 L, P, Q, K - лежат на одной окружности.
т.е. сфера касается AM и SA
(AM касается (ABC) в M и точка
касания K в AM), т.е.
окружность тоже касается
 AS в L и AM в K .

Тогда считая точки M
равна MK^2 и $MQ \cdot MP =$
 $= MQ \cdot (MQ + QP)$ т.е. $MP =$
сегмент окружности.

Считая точки S равна SL^2 и
 $SP \cdot SQ = SP(SP + PQ)$.

т.е. $SP = MQ$, т.е. $MQ(MQ + QP) = SP(SP + PQ)$.

Значит, считая точки M и S
аналогично окружности равны.

Значит, $MK^2 = SL^2$, $MK = SL$.

Также можем считать считая
точки A аналогично с AM
окружности. Она равна AL^2 и AK^2
(L и K - точки касания). Значит, $AL = AK$.

Тогда, $AK + KM = AL + LS = AS$.

Значит, $AM = SA = BC = 18$.

т.е. M делит AA_1 в отношении $2:1$,
т.е. $AA_1 = \frac{3}{2} AM = 24$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AA_1 \cdot BC \cdot \sin(\angle AA_1 B) = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 18 \cdot \sin 2 = 100$$

$$24 \cdot 8 \cdot \sin 2 = 100 \quad \sin 2 = \frac{100}{192}$$

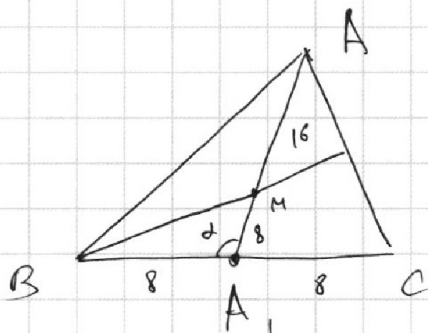
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение

Заметим, что $MA_1 = \frac{1}{2} AA_1 = 8$.
 $BA_1 = A_1C = \frac{1}{2} BC = 8$.

Значит, MA_1 — медиана
равного треугольника
и которой

увеличена. Значит, $\triangle BMC$ —
прямоугольный.

Т.к. $\sin \alpha = \frac{100}{192}$

$\sin(\angle MBA_1) = \sin(90^\circ - \frac{\alpha}{2})$
равнобедренный ($MA_1 = BA_1$).

По теореме

т.к. $\sin \alpha = \frac{100}{192}$, то $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \frac{100 \cdot 100}{192 \cdot 192}} =$

$$= \pm \sqrt{\frac{2304}{2304} - \frac{625}{2304}} = \pm \frac{\sqrt{1679}}{48}$$

По теореме косинусов для $\triangle BMA_1$ и $\triangle A_1CM$
находим BM и MC . (без обращения внимания на знак $\angle BA_1M < \angle MA_1C$).

$$BM^2 = 8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8^2 \cdot \frac{\sqrt{1679}}{48} =$$

$$= 128 \left(1 - \frac{\sqrt{1679}}{48} \right)$$

$$CM^2 = 128 \left(1 + \frac{\sqrt{1679}}{48} \right)$$

$$CC_1 = \frac{3}{2} CM = \frac{3}{2} \sqrt{CM^2}$$

$$BB_1 = \frac{3}{2} \sqrt{BM^2}$$

$$CC_1 \cdot BB_1 = \frac{9}{4} \cdot \sqrt{128 \cdot 128 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{1679}}{48} \right) \left(1 + \frac{\sqrt{1679}}{48} \right)} =$$

$$= \frac{9}{4} \cdot 128 \cdot \sqrt{1 - \frac{1679}{48^2}} = 9 \cdot 32 \cdot \sqrt{\frac{625}{48^2}} = 9 \cdot 32 \cdot \frac{25}{48} =$$

$$= 6 \cdot 25 = 150$$

$$AA_1 \cdot CC_1 \cdot BB_1 = 24 \cdot 150 = 3600$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

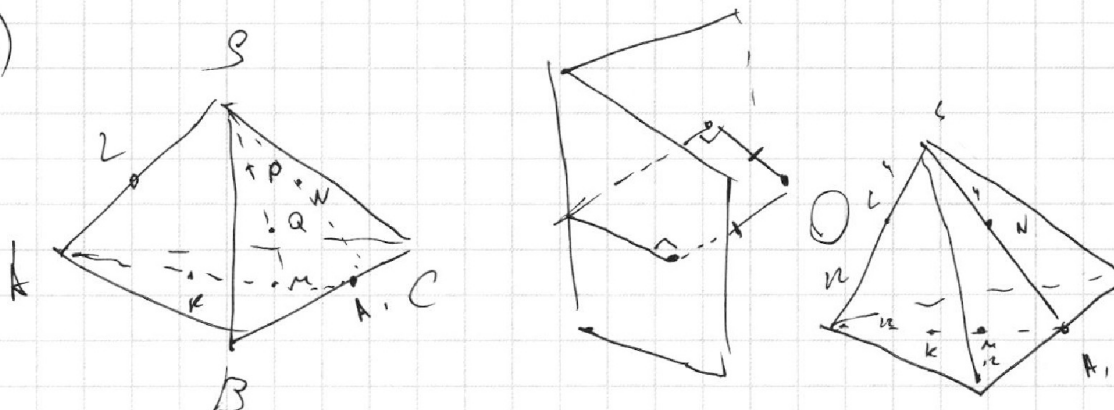
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

8)



~~Т.к. Δ — плоскость тетраэдра
в плоскости L, N, K
Т.к. L, N, K принадлежат Δ и
лежат в одной плоскости Δ
Т.к. Δ — плоскость (SBC) в плоскости N ,
 Δ принадлежит AS в точке L , то
сторона AS относительно Δ
равна SL^2 и SN^2 .
значит, $SL = SN = 4$.~~

В пункте (а) мы получили, что $AL = AK$,
 $SL = KM$, $AS = AM$ значит, $\frac{AL}{AS} = \frac{AK}{AM} = \frac{AK}{AS}$

Тогда, $LK \parallel SM$.

Рассмотрим плоскость SM (они не совпадают).
Зададим прямые SM и SN (они не совпадают).

Т.к. $SM \parallel LK$ и $SM \cap SN = S$, то
 SM лежит в этой плоскости.

Тогда, точки L, K, P, Q, N лежат
в одной плоскости. А т.к.

все эти точки принадлежат сфере
и одной плоскости, то они все
на одной окружности.

При этом SN касается этой
окружности в N .

Следовательно точка S относительно этой
окружности равна SL^2 и SN^2 .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

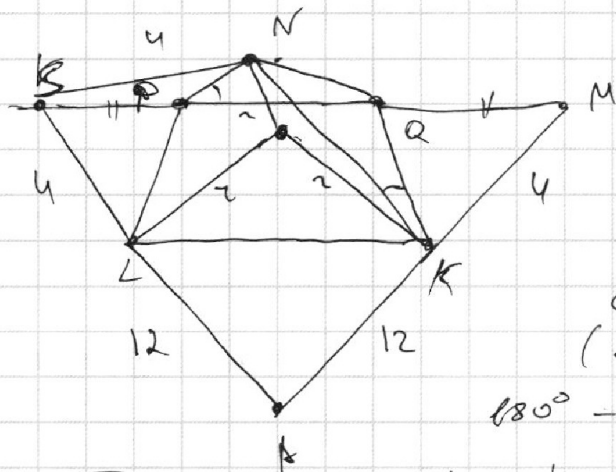
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Тогда $SN = SL = 4$.



Теперь, если мы найдем KN , то из $\triangle KON$, где O — центр сферы найдем $\angle KON$, а линейный угол двугранного угла между (SBC) и (ABE) равен $180^\circ - \angle KON$.

т.к. $SN \subset (ASM)$, то $AM \cap BC = SN \cap BE$, т.к. (ASM) пересекает BC в одной точке.

Тогда, SN — медиана в $\triangle SBC$, ведь SN проходит через A_1 .

Две точки A_1 сферический относительно той же окружности эти равны.

$$A_1N^2 \text{ и } A_1K^2 \text{ т.к. } A_1N = A_1K = AA_1 - AK = 24 - 12 = 12.$$

Тогда, $SA_1 : NA_1 = SL : AL = 4 : 12$ ($AL = SA - SL = 16 - 4 = 12$).

Тогда, $\angle N \parallel AA_1$.

$$AA_1 = 24, SA = 16, SA_1 = 12 + 4 = 16.$$

$\triangle SAA_1$ — равнобедренный

т.к. $\cos(\angle SA_1K) = \frac{A_1K}{SA_1} = \frac{12}{16}$ (т.к.

$AK = 12, KA_1 = 12$, то SK — медиана, а значит, высота).

По теореме косинусов для $\triangle KA_1N$:

$$\begin{aligned} KN^2 &= NA_1^2 + A_1K^2 - 2 \cdot A_1K \cdot NA_1 \cdot \cos(\angle SA_1K) = \\ &= 12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cdot \frac{12}{16} = 144 \cdot 2 \left(1 - \frac{12}{16}\right) = \frac{4}{16} \cdot 2 \cdot 144 = \\ &= 82. \quad KN = \sqrt{82} = 3 \cdot 2 \sqrt{2} = 6\sqrt{2}. \end{aligned}$$

т.к. в $\triangle KON$, OK и ON — радиусы, то $KO = ON = 5$. По теореме косинусов.

$$KN^2 = OK^2 + ON^2 - 2 \cdot OK \cdot ON \cdot \cos(\angle KON) =$$

$$= 2 \cdot 25 - 2 \cdot 25 \cdot \cos(\angle KON) = 6\sqrt{2}$$

$$5 \cdot (1 - \cos(\angle KON)) = 6\sqrt{2}$$

$$1 - \cos(\angle KON) = \frac{6\sqrt{2}}{5}$$

$$\cos(\angle KON) = \frac{25 - 36\sqrt{2}}{25}. \text{ Ответ: а) } 360^\circ; \text{ б) } 180^\circ - \arccos\left(\frac{25 - 36\sqrt{2}}{25}\right).$$