



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



$$\frac{13+21+25}{2} \geq 30$$

$$\|a\|_2 = 26$$

$$\|a\|_2 + \|b\|_2 \geq 6$$

$$\|c\|_2 + \|b\|_2 \geq 14$$

$$\|a\|_2 + \|c\|_2 \geq 16$$

$$42$$

$$22$$

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

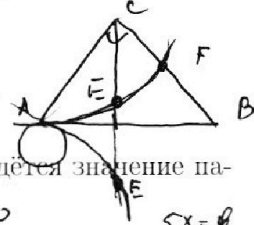
$$abc \geq \text{НОК}(ab, bc, ac) =$$

$$abc \geq 3^{15} \cdot 5^{28} \cdot 2^{16}$$



2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

$$\frac{SE \cdot EF}{AO \cdot CD} \sin x = \cos \left(\frac{9\pi - 2x}{10} \right)$$



3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$6a = 0$$

$$5x - b = 0$$

$$5x = b$$

$$x = \frac{b}{5}$$

$$\frac{3}{9}$$

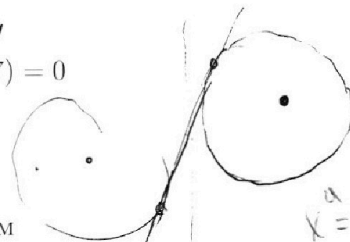
$$x^a = y$$

$$\log_x y = a \begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + (y+9)^2 = 4$$



$$x = \begin{pmatrix} 11 \\ -13 \end{pmatrix}$$

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

$$\arccos(\sin x) = \begin{pmatrix} 3 \\ x \end{pmatrix} =$$

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

$$\begin{pmatrix} 0,0 \\ 17,0 \end{pmatrix}$$

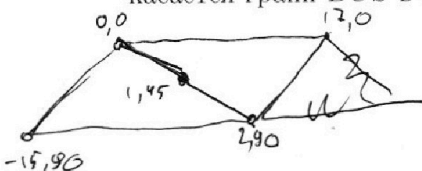
$$6(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 48$$

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

- а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

$$x_2 - x_1 + \frac{y_2 - y_1}{2} = 8$$

- б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.



$$\sin x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$$

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



н 1

$abc \rightarrow \text{НОК}(ab, bc, ac), \text{ т.к. } \begin{cases} abc : ab \\ abc : ac \\ abc : bc \end{cases}$

1) Обозначим за $\|x\|_p$ степень включения x в p в x .

2) тогда $\begin{cases} ab : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \\ bc : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \\ ac : 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \end{cases} \Rightarrow abc : 2^{22} \cdot 3^{36} \cdot 5^{52}$

тогда $abc : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$ (т.к. $\|abc\|_3 \leq 29 \Rightarrow \|(abc)^2\|_3 \leq 58$)

3) $\|ab\|_5 = \|a\|_5 + \|b\|_5 \geq 11$
 $\|ac\|_5 = \|a\|_5 + \|c\|_5 \geq 28$
 $\|bc\|_5 = \|b\|_5 + \|c\|_5 \geq 13$

тогда $\|abc\|_5 \geq \|ac\|_5 = 28$

$\|abc\|_5 \geq 28$

4) $\|abc\|_2 = \frac{\|a^2b^2c^2\|_2}{2} = \frac{\|ab\|_2 + \|bc\|_2 + \|ac\|_2}{2} \geq$
 $\geq \frac{6 + 14 + 16}{2} = 18$

тогда $abc : 2^{18}$

5) по 2, 3, 4 пунктам: $\begin{cases} abc : 2^{18} \\ abc : 3^{30} \\ abc : 5^{28} \end{cases}$

тогда $abc : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28} \Rightarrow abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

(т.к. $abc \neq 0$)

ПРИМЕР:

$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{11}$
 $b = 2^2 \cdot 3^{14}$
 $c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{17}$

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

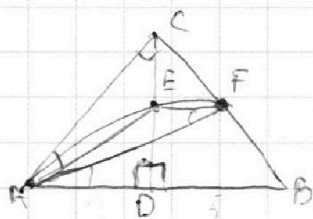
1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



с 2



1) $\angle CAE = \angle EFA$ по теореме об углах между хордой и касательной

2) $\angle EFA = \angle FAB$ как накрест лежащие при $EF \parallel AB$

3) $\triangle AED$ и $\triangle ACF$

1) $\angle EAD = \angle CAF$ по 2) и 1)

2) $\angle ACF = \angle EDA = 90^\circ$

$\triangle AED \sim \triangle ACF$ по двум углам

тогда $\frac{AC}{AD} = \frac{CF}{DE}$

4) $\triangle CFE$ и $\triangle CBD$

1) $\angle CFE = \angle CBD$ как соответственные

2) $\angle CEF = \angle CBD$ как соответственные

при $EF \parallel BD$

тогда $\triangle CFE \sim \triangle CBD$ по двум углам

тогда $\frac{CE}{CD} = \frac{EF}{BD} = \frac{CF}{CB} = k \Rightarrow \frac{DE}{CD} = 1 - k$

$\frac{CE}{ED} = \frac{CF}{FB}$

5) по свойству медианы: $\frac{CA^2}{CB^2} = \frac{AD}{BD} = \frac{2}{5}$

6) $\frac{AC}{BC} \cdot \frac{DE}{AD} = \frac{CF}{BC} = k$ по 4) и 3)

$\frac{AC}{BC} \cdot \frac{CD}{AD} \cdot \frac{1}{1-k} = k$ по 5)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AC}{BC} \cdot \frac{CD}{AD} = K \cdot (1-K)$$

$$\sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \frac{CD}{AD} = K \cdot (1-K) \text{ по 5}$$

7) по свойству высоты пункт. треугольника:

$$CD = \sqrt{AD \cdot BD}$$

$$\frac{CD}{AD} = \frac{\sqrt{AD \cdot BD}}{AD} = \sqrt{\frac{BD}{AD}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

8) $K(1-K) = 1$
 $K^2 + 1 - K = 0$
 $K = \frac{1}{2}$

9) тогда $\frac{CE}{CD} = \frac{EF}{BD} = K = \frac{1}{2}$

$$S_{CEF} = \frac{1}{4} S_{CBD}$$

10) $\frac{S_{ACD}}{S_{CBD}} = \frac{AD}{BD} = \frac{2}{5}$

$$S_{CEF} = \frac{1}{4} S_{CBD} = \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2} S_{ACD} \right) = \frac{5}{8} S_{ACD}$$

8) $\frac{K}{K+1} = \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt{\frac{5}{2}} = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{2}$

9) $\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{\frac{1}{2} AD \cdot CD}{\frac{1}{2} \cdot CE \cdot EF} = \frac{AD}{EF} \cdot \frac{CD}{CE} = \frac{AD}{BD} \cdot \frac{BD}{FE} \cdot \frac{1}{K} =$
 $= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{K^2} = \frac{8}{5}$

Ответ: $\frac{8}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1



2



3



4



5



6



7



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$$10 \quad \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{5}\right) + \sin\left(\frac{9\pi}{10}\right) \cdot \sin\left(\frac{x}{5}\right)$$

$$(*) \sin 5y = \sin 2y \cdot \cos 3y + \cos 2y \cdot \sin 3y =$$

$$= 2 \cos y \cdot \sin y \cdot (4 \cos^2 y - 3 \cos^2 y) + (\cos^2 y - \sin^2 y)(3 \sin y - 4 \sin^3 y)$$

$$= \sin y (2 \cos^2 y (4 \cos^2 y - 3) + (\cos^2 y - \sin^2 y)(3 - 4 \sin^2 y)) =$$

$$= \sin y (2(1 - \sin^2 y)(4 - 4 \sin^2 y - 3) + (1 - 2 \sin^2 y)(3 - 4 \sin^2 y)) =$$

$$= \sin y (2(1 - \sin^2 y)(1 - 4 \sin^2 y) + (1 - 2 \sin^2 y)(3 - 4 \sin^2 y)) =$$

$$= \sin y (2 - 10 \sin^2 y + 8 \sin^4 y + 3 - 10 \sin^2 y + 8 \sin^4 y) =$$

$$= \sin y (8 \sin^4 y - 20 \sin^2 y + 5)$$

$$\sin x = \cos y \quad \frac{9\pi - 2x}{10} = y \Rightarrow \sin x = \cos y$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = \cos^2 y \Rightarrow 1 - \cos^2 x = 1 - \sin^2 y \Rightarrow \cos x = \pm \sin y$$

$$\sin x \cdot \sin y = \cos x (\pm \cos y)$$

$$\sin x \cdot \sin y \mp \cos x \cdot \cos y = 0$$

$$\cos(x \pm y) = 0$$

$$x \pm y = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x \pm \frac{9\pi - 2x}{10} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



нз (проверяется)

$$\begin{cases} x + \frac{9\pi - 2x}{10} = \frac{\pi}{2} + \pi k & (1) \\ x - \frac{9\pi - 2x}{10} = \frac{\pi}{2} + \pi k & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad x - \frac{x}{5} - \frac{8\pi}{10} + \pi k &= -\frac{4\pi}{5} + \pi k \\ (2) \quad x + \frac{x}{5} &= \end{aligned}$$

$$(1) \quad x - \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{10} + \pi k = -\frac{4\pi}{10} + \pi k = -\frac{2\pi}{5} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \quad x + \frac{x}{5} = \frac{9\pi}{10} + \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{14\pi}{10} + \pi k = \frac{7\pi}{5} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{5}x = \frac{3\pi}{5} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{6}{5}x = \frac{2\pi}{5} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4}\pi + \frac{5}{4}\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{6}\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $\sin\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{5}{4}\pi n\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, n: 4n+8$

проверка: $\sin\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{5}{4}\pi n\right) = \cos\left(\frac{9\pi - \frac{3}{4}\pi - \frac{5}{4}\pi n}{10}\right)$

$\sin\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{5}{4}\pi n\right) = \cos\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{4}\pi n\right)$

верно $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}n\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Ответ: $\frac{3}{4}\pi + \frac{5}{4}\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\frac{\pi}{3} + \frac{5}{6}\pi n, n \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 & (2) \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 & (1) \end{cases}$$

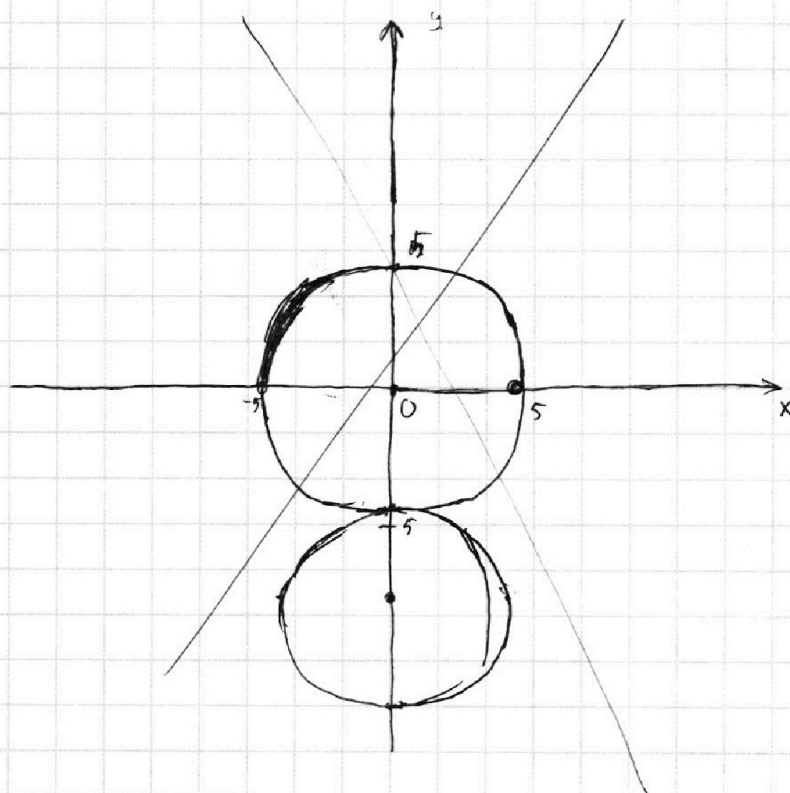
$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases}$$

$$(2) \quad 6ay = -5x + b$$

$$\begin{cases} a=0 \\ 5x=b \\ y = \frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a} \end{cases}$$

$$x = -\frac{6}{5}a \cdot y + \frac{b}{5}$$

Решим систему графически:



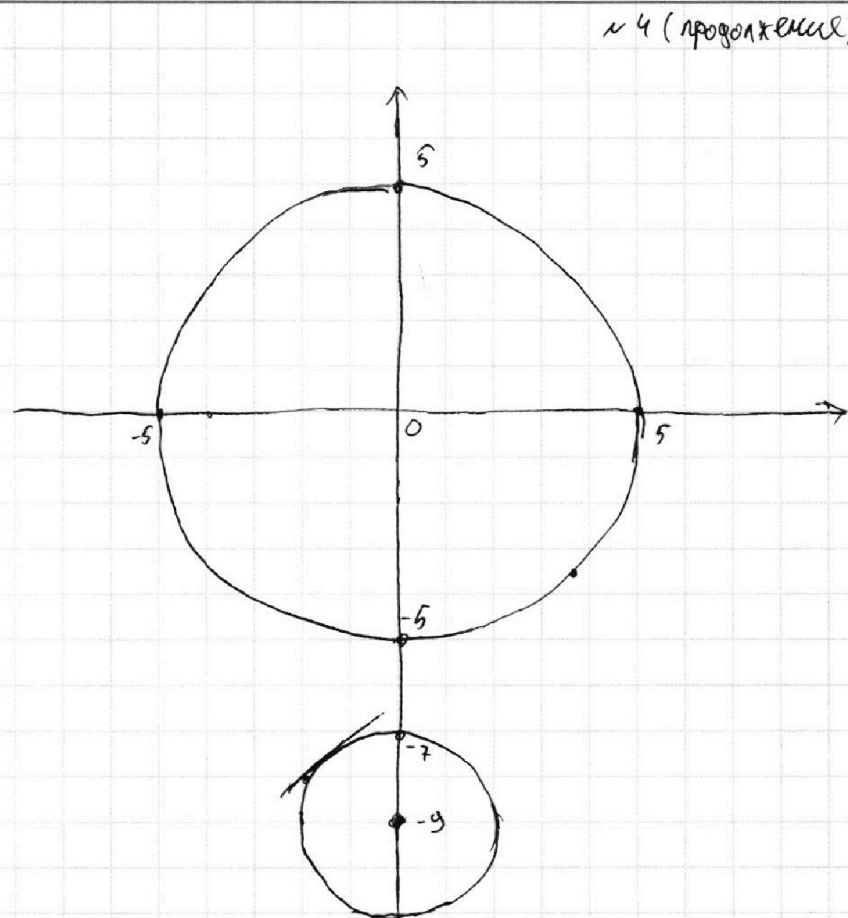
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



при $a=0$: ~~тогда~~ $b=5$ даёт 4 решения.

при $a \neq 0$: заметим $-\frac{b}{a}$ макс, $\frac{b}{a}$ на Π .

тогда $x^2 - 25 = kx + n$ имеет 2 решения

$$y^2 - 25 = (ky + n)^2 \text{ имеет 2 решения}$$

$$(y+9)^2 - 4 = (ky+n)^2 \text{ имеет 2 решения}$$

$$y^2(k^2+1) + 2nk \cdot y + n^2 + 25 = 0 \text{ - имеет 2 решения}$$

$$y^2(k^2-1) + (2nk-18)y + n^2+77=0 \text{ имеет 2 решения}$$

$$D_1 = n^2 k^2 - (n^2 + 25) \cdot (k^2 - 1) > 0$$

$$\frac{D_2}{4} = (n^2 k^2 - 9)^2 - (n^2 + 77)(k^2 - 1) > 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

л 4 (продолжение)

$$\frac{D_1}{4} = 1^2 - 25k^2 + 25 > 0$$

$$\frac{D_2}{4} = 18nk + 81 - 77k^2 + 77n^2 > 0$$

$$\frac{b^2}{25} - 25 \cdot \frac{36a^2}{25} + 25 > 0$$

$$18 \cdot \frac{6ab}{25} - 77 \cdot \frac{6a^2}{25} + \frac{b^2}{25} > 0$$

$$\begin{cases} b^2 - 25 \cdot 36a^2 + 25 > 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -18 \cdot 6ab - 77 \cdot 6a^2 + b^2 > 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 - 25 \cdot 36a^2 + 25 > 0 \\ -6 \cdot 18a^2 + 18ab + 81 \\ -6 \cdot (18a^2 + 18ab + b^2) + b^2 + 6 \cdot 4a^2 > 0 \end{cases}$$

$$b > 25(36a^2 - 1)$$

$$77b^2 + 24a^2 > 6 \cdot (9a + b)^2$$

① рассмотрим

$$F(a) > 0.$$

$$-77 \cdot 6a^2 - 18 \cdot 6ab + b^2 > 0$$

$$\frac{D}{4} = (6 \cdot 9)^2 + 4 \cdot 6 \cdot 77b^2 = 6^2 \cdot 9^2 \cdot b^2 + 4 \cdot 6 \cdot 77b^2 =$$

$$= (b \cdot \sqrt{6 \cdot 4 \cdot 77 + 6^2 \cdot 9^2})^2 = (b \cdot \sqrt{3764})^2$$

$$- \frac{(54 - \sqrt{3764})b}{77 \cdot 6} < a < - \frac{\sqrt{3764}b + 9 \cdot 6 \cdot b}{77 \cdot 6} \quad \text{при } b \leq 0$$

$$- \frac{(54 + \sqrt{3764})b}{77 \cdot 6} < a < - \frac{(54 - \sqrt{3764})b}{77 \cdot 6} \quad \text{при } b > 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим как неравенство от b

$$b^2 + 25 \geq 25 \cdot 36 a^2$$

$$\begin{cases} \sqrt{b^2 + 25} \leq +a, & a < 0 \\ \sqrt{b^2 + 25} \geq a, & a > 0 \end{cases}$$

Рассмотрим как неравенство от b

$$b^2 - 18 \cdot 6 \cdot a \cdot b - 77 \cdot 6 a^2 \geq 0$$

$$\frac{D}{4} = (6 \cdot 9)^2 a^2 + 77 \cdot 6 a^2 = 6 a^2 (54 + 77)$$

$$\text{при } a < 0: \quad 54a - \sqrt{6 \cdot 131} |a| < b < 54a + \sqrt{6 \cdot 131} |a|$$

$$\text{при } a > 0: \quad \begin{cases} \sqrt{b^2 + 25} \geq a \cdot 30 & \Leftrightarrow b \geq \sqrt{a^2 \cdot 900 - 25} \\ \sqrt{b^2 + 25} \geq 54a - \sqrt{6 \cdot 131} \cdot a \\ 54a + \sqrt{6 \cdot 131} \cdot a \geq b \end{cases}$$

Все решения на b , есть

$$54a + \sqrt{6 \cdot 131} \cdot a > \sqrt{900a^2 - 25}$$

$$a^2 (54 + 6\sqrt{6 \cdot 131})^2 > 900a^2 - 25$$

что всегда выполняется



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

если $a < 0$:

$$\begin{cases} b^2 + 25 < 30 a^2 \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} -54|a| - \sqrt{6 \cdot 131}|a| < b < -54|a| + \sqrt{6 \cdot 131}|a| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + 25 < 30 a^2 \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} -54|a| - \sqrt{6 \cdot 131}|a| < b \\ b > \sqrt{6 \cdot 131}|a| + 54|a| \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b^2 &= 30 a^2 \\ (\sqrt{6 \cdot 131} + 54)^2 |a|^2 &< 30 a^2 \end{aligned}$$

нет решения

ответ: при $a > 0$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\times 5$

$$\begin{cases} \log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \log_{11}^4 \left(\frac{1}{2}y\right) + \log_{\frac{1}{2}y} (11) = \log_{\left(\frac{1}{2}y\right)^3} (11^{-13}) - 5 \end{cases} \quad (2)$$

$$\textcircled{1} \quad \log_{11}^4 x + \frac{6}{\log_{11} x} = \frac{1}{3} \log_x \left(\frac{1}{121}\right) - 5$$

$$\log_{11}^4 \left(\frac{1}{2}y\right) + \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}y} (11)} = \frac{1}{3} \log_{\left(\frac{1}{2}y\right)} (11^{-13}) - 5$$

$$\log_{11}^4 x + \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \log_{11} (x) - 5$$

$$\frac{\log_{11}^5 x + \left(6 + \frac{2}{3}\right)}{\log_{11} (x)} = -5$$

$$\log_{11}^5 x + \frac{20}{3} + 5 \log_{11} (x) = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \log_{11}^4 \left(\frac{1}{2}y\right) + \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}y} (11)} = \log_{\frac{1}{2}y} - 13$$

$$\textcircled{1} \quad \log_{11}^4 x - 6 \frac{1}{\log_{11} (x)} = -\frac{2}{3} \log_{11} (x) - 5$$

$$\textcircled{2} \quad \log_{11}^4 \left(\frac{1}{2}y\right) + \frac{1}{\log_{11} \left(\frac{1}{2}y\right)} = -\frac{13}{3} \log_{11} \left(\frac{1}{2}y\right) - 5$$

$$\text{Тогда: } \begin{cases} \log_{11}^5 x + 5 \log_{11} x = 5 + \frac{1}{3} = \frac{16}{3} \\ \log_{11}^5 \left(\frac{1}{2}y\right) + 5 \log_{11} \left(\frac{1}{2}y\right) = -\frac{16}{3} \end{cases}$$

$$\text{тогда } \log_{11}^5 x + \log_{11}^5 \left(\frac{1}{2}y\right) + 5 \left(\log_{11} \left(\frac{1}{2}xy\right)\right) = 0$$

$$\left(\log_{11}^4 x + \log_{11}^4 \left(\frac{1}{2}y\right)\right) \cdot \left(\log_{11}^4 (x) - \log_{11}^3 (x) \cdot \log_{11}^4 \left(\frac{1}{2}y\right) + \log_{11}^2 (x) \cdot \log_{11}^2 \left(\frac{1}{2}y\right) - \log_{11}^4 (x) \cdot \log_{11}^3 \left(\frac{1}{2}y\right) + \log_{11}^4 \left(\frac{1}{2}y\right) + 5\right) = 0$$

$$\log_{11} \left(\frac{1}{2}xy\right) \cdot \left(\log_{11}^4 x \log_{11}^4 \left(\frac{1}{2}y\right) \log_{11}^2 (x) \cdot \log_{11}^2 \left(\frac{1}{2}y\right) - \log_{11} (x) \cdot \log_{11} \left(\frac{1}{2}y\right) (\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 y) + 5\right) = 0$$

$= 0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

и 5 (продолжение)

тогда:

$$\log_{11}\left(\frac{1}{2}xy\right) = 0 \quad (2)$$

$$\left[\log_{11}^4(x) + \log_{11}^4\left(\frac{1}{2}y\right) + \log_{11}^2(x) \cdot \log_{11}^2\left(\frac{1}{2}y\right) - \log_{11}(x) \cdot \log_{11}\left(\frac{1}{2}y\right) \right] \cdot \log_{11}^2(x) \cdot \log_{11}^2\left(\frac{1}{2}y\right) + 5 = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (1) \quad & \log_{11}^3 x \left(\log_{11}(x) - \log_{11}\left(\frac{1}{2}y\right) \right) + \log_{11}^3\left(\frac{1}{2}y\right) \left(\log_{11}\left(\frac{1}{2}y\right) - \log_{11}(x) \right) + \\ & + 5 \log_{11}^2 x \cdot \log_{11}^2\left(\frac{1}{2}y\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\log_{11}^3 x - \log_{11}^3\left(\frac{1}{2}y\right) \right) \left(\log_{11}(x) - \log_{11}\left(\frac{1}{2}y\right) \right) + \log_{11}^2\left(\frac{1}{2}y\right) \log_{11}^2 x + \\ & + 5 \log_{11}^2 x \cdot \log_{11}^2\left(\frac{1}{2}y\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\left(\log_{11}(x) - \log_{11}\left(\frac{1}{2}y\right) \right)^2 \left(\log_{11}^2(x) + \log_{11}(x) \cdot \log_{11}y + \log_{11}^2 y \right) + 5 + \log_{11}^2 x \cdot \log_{11}^2 y = 0$$

$$5 > 0, \quad \log_{11}^2 x \cdot \log_{11}^2\left(\frac{1}{2}y\right) \geq 0; \quad \log_{11}^2(x) + \log_{11}(x) \cdot \log_{11}\left(\frac{1}{2}y\right) + \log_{11}^2\left(\frac{1}{2}y\right) \geq 0 \text{ как полный квадрат, } \left(\log_{11}(x) - \log_{11}\left(\frac{1}{2}y\right) \right)^2 \geq 0$$

тогда это уравнение не имеет решений

$$(2) \quad \log_{11}\left(\frac{1}{2}xy\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}xy = 1$$

$$xy = 2$$

Ответ: 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

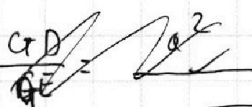
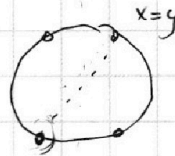
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ЧЕРНОВИК

$$x = \frac{\pi}{2} - y$$

$$x =$$

$$\frac{CE}{CD} = \frac{x}{\frac{\theta^2}{\sqrt{a^2 + \theta^2}}} \Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{\theta^2 - x\sqrt{a^2 + \theta^2}}{\theta^2}$$



$$\frac{GE}{GD} = \frac{x\sqrt{a^2 + \theta^2}}{a^2} \Rightarrow \frac{GD}{EG} = \frac{a^2}{x\sqrt{a^2 + \theta^2}} \Rightarrow \frac{DE}{GE} = \frac{a^2 + x\sqrt{a^2 + \theta^2}}{\sqrt{a^2 + \theta^2}}$$

$$\frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{GE}{CD} = \frac{x\sqrt{a^2 + \theta^2} \cdot \theta^2 - x^2(a^2 + \theta^2)}{\theta^2 \cdot a^2 + \theta^2 \cdot x \cdot \sqrt{a^2 + \theta^2}} = \frac{a^4}{(a^2 + \theta^2)(\frac{a^4}{a^2 + \theta^2} + a^2)}$$

$$\frac{GD}{GC} = \frac{AD^2}{CA^2} \Rightarrow \frac{GD}{CD} = \frac{AD^2}{AD^2 + AC^2}$$

$$\sin 3x =$$

$$= \sin x \cdot \cos 2x + \cos x \cdot \sin 2x =$$

$$= -\sin^3 x + \cos^2 x \sin x + 2\cos^2 x \sin x$$

$$\arccos(\sin x)$$

$$\arccos(\cos x) = x$$

$$x = \frac{\pi}{2} - y + 2\pi k$$

$$x = x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$3\cos x - 4\cos^3 x \sin x = \cos y$$

$$\pi - x =$$

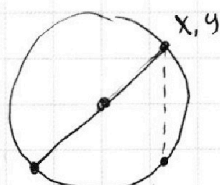
$$x = \frac{\pi}{2} - y + 2\pi k$$

$$x = y + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\pi - x = \frac{\pi}{2} - y + 2\pi k$$

$$\pi - x = y + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \frac{y}{5}$$



$$\cos x \cdot \cos 2x - \sin x \cdot \sin 2x =$$

$$= \cos^3 x - \cos x \cdot \sin^2 x - 2\cos^2 x \cdot \sin^2 x =$$

$$= \cos^3 x - 3\cos x (1 - \cos^2 x) =$$

$$= 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\sin 5x = \sin 2x \cdot \cos 3x + \cos 2x \cdot \sin 3x$$

$$2\cos x \cdot \sin x \cdot (4\cos^3 x - 3\cos x)$$

$$x = y$$

$$\sin^2 x$$

$$x = y$$

$$x = y$$

$$x = y$$

$$x = y$$

$$x = y$$

$$x = y$$

$$x = y$$

$$x = y$$

$$x = y$$

$$x = y$$

$$x = y$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

