



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Реш 6  $a = 2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot 5^{a_5}$ ,  $b = 2^{b_2} \cdot 3^{b_3} \cdot 5^{b_5}$ ,  
 $c = 2^{c_2} \cdot 3^{c_3} \cdot 5^{c_5}$ ,  $a_2, a_3, a_5, b_2, b_3, b_5, c_2, c_3, c_5 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .  
 $7 \mid a, 6 \mid b, c \in \mathbb{N}$ .  
 Тогда:  $ab = 2^{a_2+b_2} \cdot 3^{a_3+b_3} \cdot 5^{a_5+b_5} = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$ .

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 \geq 9 \\ a_3 + b_3 \geq 10 \\ a_5 + b_5 \geq 10 \end{cases}$$

Аналог, для  $bc$ :  $\begin{cases} b_2 + c_2 \geq 14 \\ b_3 + c_3 \geq 13 \\ b_5 + c_5 \geq 13 \end{cases}$ , для  $ac$ :  $\begin{cases} a_2 + c_2 \geq 19 \\ a_3 + c_3 \geq 18 \\ a_5 + c_5 \geq 30 \end{cases}$ .

Значит:  $\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 9 \\ a_2 + b_2 \geq 19 \\ b_2 + c_2 \geq 14 \end{cases} \Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 21$ .

$\begin{cases} a_3 + b_3 \geq 10 \\ b_3 + c_3 \geq 13 \\ a_3 + c_3 \geq 18 \end{cases} \Rightarrow a_3 + b_3 + c_3 \geq \frac{41}{2}$   
 т.к.  $a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,

$$a_3 + b_3 + c_3 \geq 21$$

$\begin{cases} a_5 + b_5 \geq 10 \\ b_5 + c_5 \geq 13 \\ a_5 + c_5 \geq 30 \end{cases} \Rightarrow a_5 + b_5 + c_5 \geq 27$   
 т.к.  $a_5, b_5, c_5 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  
 $a_5 + b_5 + c_5 \geq 27$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  
☒

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a \cdot b \cdot c \geq 2^{a_2+b_2+c_2} \cdot 3^{a_3+b_3+c_3} \cdot 5^{a_5+b_5+c_5} \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$$

$$abc; ac \Rightarrow abc: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$\Rightarrow a_5 + b_5 + c_5 \geq 30$$

$$abc \geq 2^{29} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$\text{Пример: } a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{10}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^2$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{20}$$

$$\text{Ответ: } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

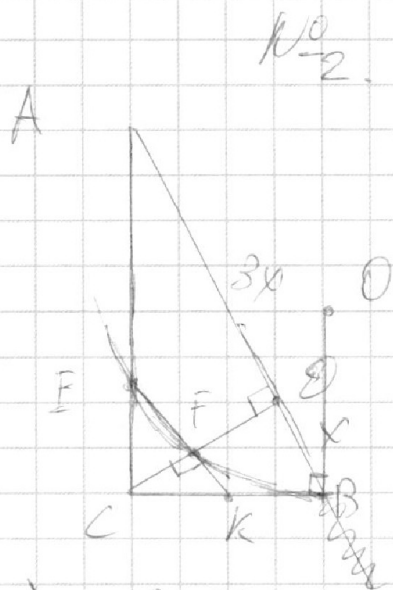
$\triangle ABC$   
 $W(O; R)$

$W \cap BC = B$   
касаясь.  
CE - высота  
 $W \cap CO = F$

$W \cap AC = E$   
 $AB \parallel EF$   
 $AO:OB = 3:1$

Найти:

$\frac{S(\triangle ABC)}{S(\triangle CEF)}$



Дано:  $EF \perp CB = K$

$EK \parallel AB$

$CO \perp AB$

$\Rightarrow CO \perp EK$

CF - высота ECK.

$\triangle ECK \sim \triangle CBO$

2)  $\angle CER = \angle CAD$ ,  $\angle EKE = \angle CBO$   
( $\angle CBO = \angle C$  при  $EK \parallel AB$  и секущих AC и BC).

$\Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CAD$ ,  $\triangle CKE \sim \triangle CBO$

(по 2-м углам).

$$\frac{CF}{CO} = \frac{EF}{AO} = \frac{OB}{EK} = \frac{FK}{OB}$$

$$\frac{EF}{FK} = \frac{AO}{OB} = 3:1 \Rightarrow KF = \frac{1}{4} KE.$$

3) По теореме Пифагора в треугольнике KBE, так как  $CB \perp AB$  и  $EK \parallel AB$ , то  $KB \perp EK$ .

$$KB^2 = KF \cdot KE$$

$$KB^2 = KF^2$$

$$KF = KB \quad 2KF = KB.$$

4)

из  $\triangle ECK$ ,  $\triangle CEF$ ,  $\triangle CBO$  и т. д. получаем,

$$\begin{cases} EC^2 + CK^2 = EK^2 \\ EK^2 + CF^2 = CK^2 \\ EK^2 + CF^2 = EC^2 \end{cases} \quad (A-2) \quad 2CF^2 + FK^2 + 9FK^2 = 16FK^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$CF = \sqrt{3} FK.$$

$$\text{tg } \angle FCK = \frac{FK}{\sqrt{3} FK}$$

$$\Rightarrow \angle FCK = 30^\circ$$

$$\begin{aligned} \angle CFK &= 90^\circ \quad CK = FK \cdot \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2FK \\ BC &= BK + CK = 4FK \\ \frac{KC}{BC} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{4) } \triangle ABC \sim \triangle ECK \text{ по 2-м углам } \angle CFE = \angle CAB_{\text{внеш}}, \\ \angle CFE = \angle CEA = \angle CEK \text{ (напрямую),} \\ \angle CFE = \angle CEA = \angle CEK \end{aligned}$$

$$\Rightarrow CK = \frac{FK}{\sin 30^\circ} = 2FK.$$

$$BC = BK + CK = 4FK.$$

$$\begin{aligned} \text{5) } \triangle ABC \sim \triangle ECF \text{ по 2-м углам } \angle CFE = \angle CAB_{\text{внеш}}, \\ \angle CFE = \angle CEA = \angle CEF \text{ - следствие из } EF \parallel AB \text{ и } AC. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{S(\triangle ABC)}{S(\triangle ECF)} &= \left( \frac{BC}{CF} \right)^2 = \left( \frac{4FK}{\sqrt{3}FK} \right)^2 = \frac{16}{3} \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

ответ:  $\frac{16}{3}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{NR3} \\ 5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$- \arcsin(\cos x)$$

$$5 \arcsin(\cos x) \in \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$$

$$\Rightarrow x \in [-3\pi; 2\pi]$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5 \arcsin(\cos x) = 2\pi - x.$$

$$5 \arccos(\cos x) = 2\pi - x.$$

$$I. x \in [0; \pi] \Rightarrow \arccos(\cos x) = x.$$

$$5x = 2\pi - x$$

$$x = \frac{\pi}{3} \in [0; \pi].$$

$$II. x \in [\pi; 2\pi] \Rightarrow \arccos(\cos x) = 2\pi - x.$$

$$10\pi - 5x = 2\pi - x.$$

$$x = 2\pi \in [\pi; 2\pi].$$

$$III. x \in [-\pi; 0) \Rightarrow \arccos(\cos x) = -x$$

$$-5x = 2\pi - x.$$

$$x = -\frac{\pi}{2} \in [-\pi; 0)$$

$$IV. x \in [-2\pi; -\pi) \Rightarrow \arccos(\cos x) = 2\pi + x$$

$$10\pi + 5x = 2\pi - x$$

$$x = -\frac{4\pi}{3} \in [-2\pi; -\pi).$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  
☐

2  
☐

3  
☒

4  
☐

5  
☐

6  
☐

7  
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\downarrow x \in [-3\pi; -2\pi) \Rightarrow \arccos(\cos x) = -2\pi - x$$

$$-10\pi - 5x = 2\pi - x$$

$$x = -3\pi \in [-3\pi; -2\pi)$$

$$\text{Ответ: } -3\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

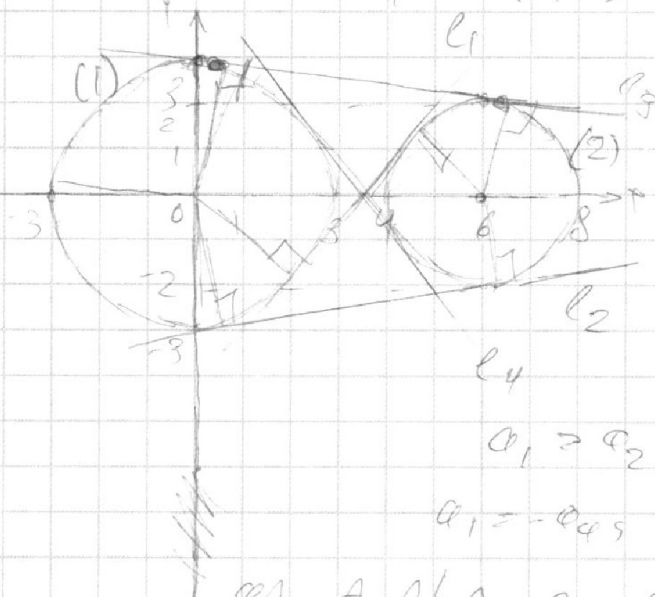


Реш.

$$\begin{cases} ax + 2y - 36 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

4-7: 76 - решение  
реш.

$$\begin{cases} y = -\frac{a}{2}x + \frac{36}{2} \\ x^2 + y^2 = 9 \quad (1) \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \quad (2) \end{cases}$$



$l_1, l_2, l_3, l_4$  - общие кас. концентрических окружностей.

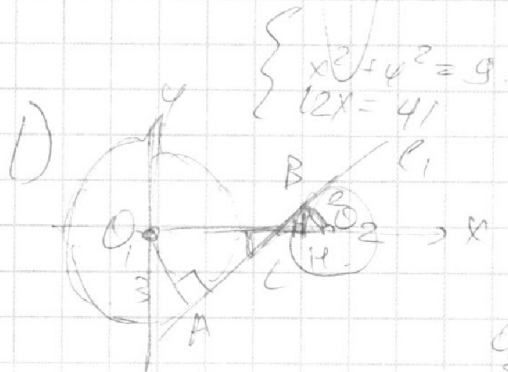
$A_1, A_2, A_3, A_4$  - их же касательные.

$$A_1 > A_2 > A_3 > A_4$$

$$A_1 = -A_4, A_2 = -A_3 \text{ (симметричны относительно } Ox)$$

$A_1, A_2, A_3, A_4$  - различные точки кас.

$$\begin{cases} y = kx + c \\ x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \text{ - решение задачи.}$$



$\Delta O_1 A C \sim \Delta O_2 B C$  по 2-углам

$$\frac{O_1 A}{O_2 B} = \frac{O_1 C}{O_2 C}$$

$$O_1 C = \frac{3}{2}, O_2 C = \frac{5}{2} \Rightarrow O_1 O_2 = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4$$

$$O_1 C = \frac{12}{5}, O_2 C = \frac{18}{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$N \neq 5$$

$$1) \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8.$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 - \frac{5}{2} \log_x 3 + 8 = 0$$

$$\log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 + 8 = 0$$

Пусть  $\log_x x = t$ . Тогда:  $(t \neq 0)$

$$t^4 + \frac{7}{2t} + 8 = 0.$$

$$2t^5 + 16t + 7 = 0.$$

$$t^4 + 8 = -\frac{7}{2t}$$

$$t^4 + 8 \geq 0 \text{ при } t \neq 0$$

$$\Rightarrow t < 0, \text{ при } t > 0 - \text{нет р-ов.}$$

При  $t < 0$ ,  $t^4 + 8 \searrow, -\frac{7}{2t} \nearrow$

$\Rightarrow$  Фр-е имеет не более 1 р-ва на

$t \in (-\infty; 0)$  в силу монотонности

$-\frac{7}{2t}$  - непрерывна, непрерывна на  $(-\infty; 0)$ .

При  $t = -\frac{2}{7}, -\frac{7}{2t} = 1 \leq t^4 + 8 \leq t^4 + 8.$

При  $t = -\frac{1}{18}, -\frac{7}{2t} = 63 > (\frac{1}{18})^4 + 8.$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



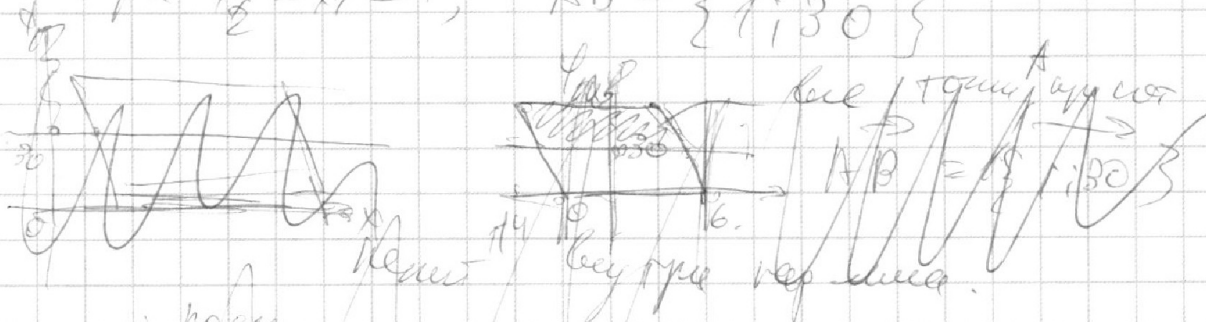
№6.

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33.$$

$$\Rightarrow y_2 - y_1 = -3(x_2 - x_1) + 33.$$

$$\vec{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\} = \{x_2 - x_1; -3(x_2 - x_1) + 33\}$$

при  $x_2 - x_1 = 1$ ,  $\vec{AB} = \{1; 30\}$



показали их на 60:

$$(y_2 - 30 + 1) (20 - 1 + 2)$$

порт. 3-й порядок порт. 3-й порядок.

$\{1; 3\}$  - вектор-скаляр QR и PR.

$$\text{т.е. } \vec{AB} = \{0; 33\} + (x_2 - x_1) \{1; 3\}$$

$\{0; 33\}$  - вектор-скаляр. 33 - значение y внутри

вектор-скаляр.  $\Rightarrow (y_2 - y_1) \in [-3; 23]$

20-е значение y,  $(x_2 - x_1) \in [-30; 20]$ .

$$(x_2 - x_1) \in [-3; 20]$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  
☐

2  
☐

3  
☐

4  
☐

5  
☐

6  
☒

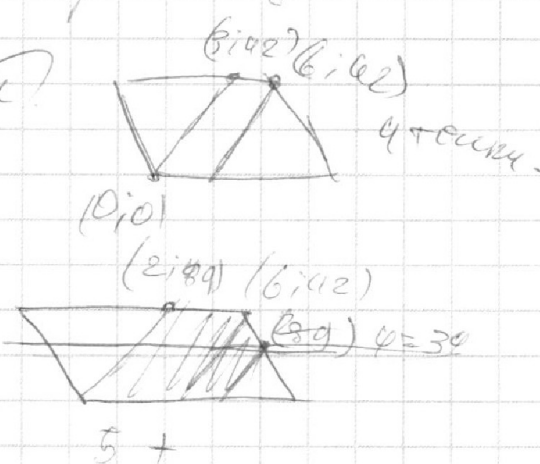
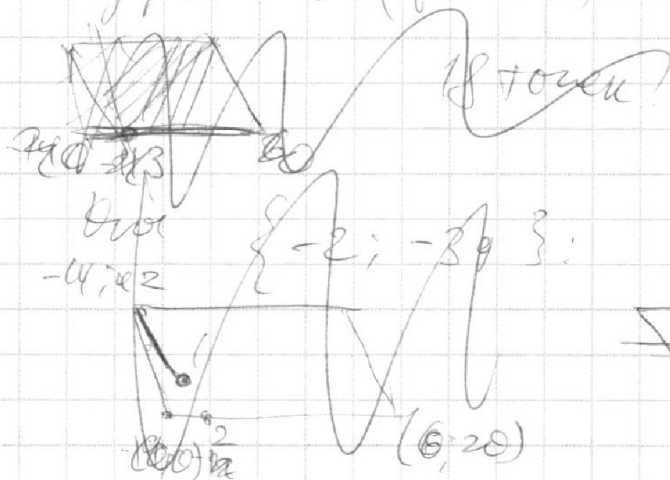
7  
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y_0 (x_6 - x_4) = -5,$$

$\{-2; -42\}$ ;  $76$  — длина  $\sqrt{42}$  касательной  
сфера  $OPQR$ ;  $OPQR$  — сфера  $OPQR$ ;



Ответ: 546.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что  
для прямой  $y = kx + c$

Заметим, что при  $k > a_1$ , при любых  $c$   
прямая пересечет ~~каждая~~ ~~каждую окружность~~  
 $M \leq 2$  - пересечет с окружностями

Аналог, при  $k < a_2$  также  $M \leq 2$  - пересечет с окружностями

при  $k \in (a_2; a_1)$ , существуют  $c$ , при которых  
есть 4 т. пер. с окружностями.

$$\text{т.е. } a_2 < -\frac{a}{2} < a_1$$

$$-2a_1 < a < -2a_2$$

$$a \in \left( -\frac{2\sqrt{31}}{\sqrt{5}}; \frac{2\sqrt{31}}{\sqrt{5}} \right)$$

$$\text{ответ: } \left( -\frac{2\sqrt{31}}{\sqrt{5}}; \frac{2\sqrt{31}}{\sqrt{5}} \right)$$



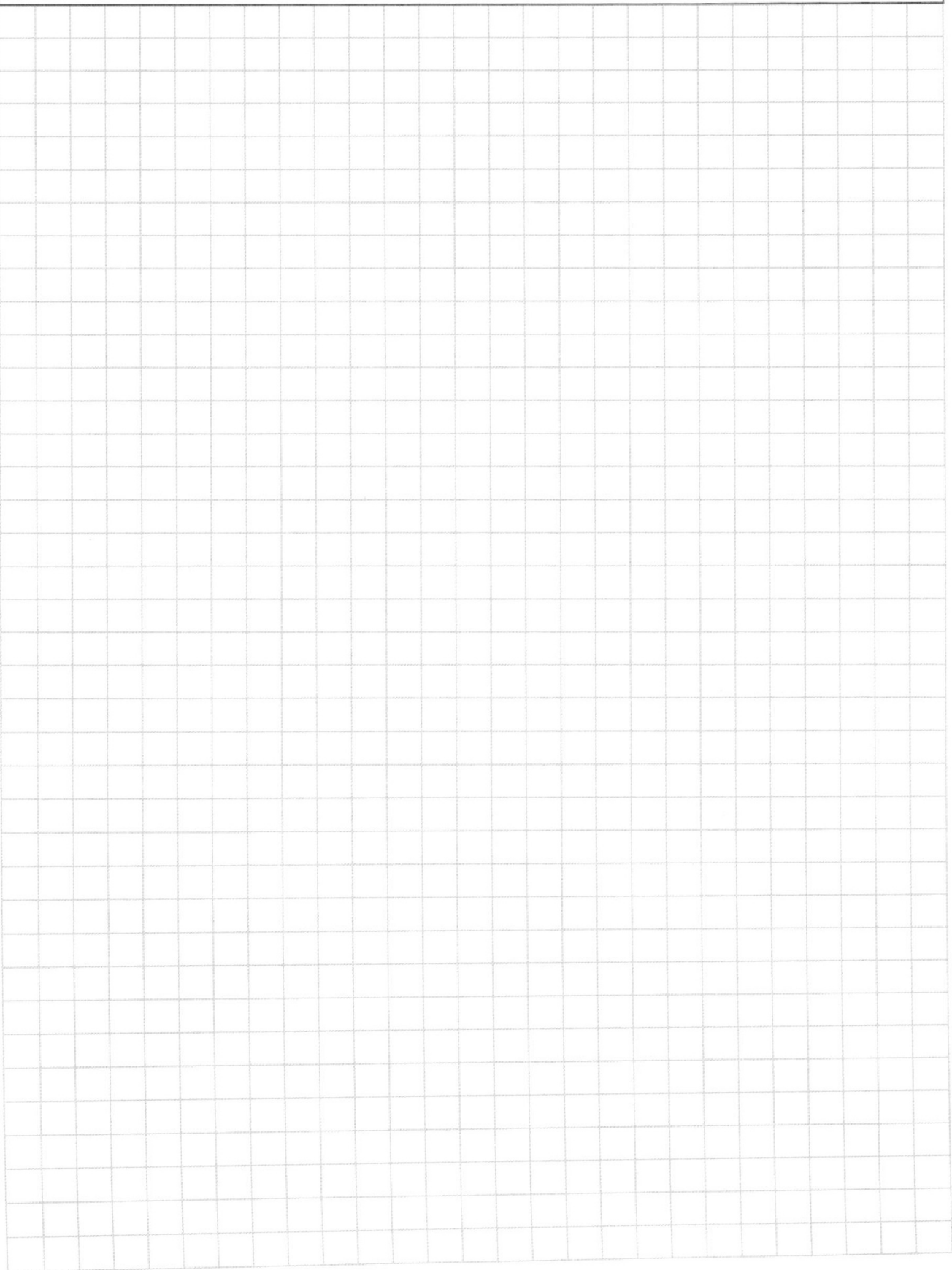
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5) \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_x 243 - 8.$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \frac{5}{2} \log_x 3 - 8.$$

$$-1 \leq 0$$

$$42 - 30 \log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 + 8 = 0.$$

$$0(0,0) \quad 1 \quad 30$$

$$\log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 + 8 = 0.$$

$$11 \quad 11$$

$$\frac{11}{2} \quad 24 \quad 104$$

$$\frac{1}{2} \quad 24$$

$$40$$

$$21$$

$$2 \log_3^5 x + 16 \log_3 x + 7$$

$$= 0.$$

$$2 \log_3^4 x$$

$$21$$

$$2 \log_3^4 x$$

$$21$$

$$2 \log_3^4 x$$

$$21$$

$$2 \log_3^4 x$$

$$21$$

$$2 \log_3^4 x$$

$$21$$

$$2 \log_3^4 x$$

$$21$$

$$2 \log_3^4 x$$

$$21$$

$$2 \log_3^4 x$$

$$21$$

$$2 \log_3^4 x$$

$$21$$

$$42 - 2; -4112$$

$$-13 \quad 12$$

$$2 \log_3^4 x$$

$$21$$

$$2 \log_3^4 x$$

$$21$$

$$2 \log_3^4 x$$

$$21$$

$$2 \log_3^4 x$$

$$21$$

$$2 \log_3^4 x$$

$$21$$

$$2 \log_3^4 x$$

$$21$$

$$2 \log_3^4 x$$

$$21$$

$$2 \log_3^4 x$$

$$21$$

$$2 \log_3^4 x$$

$$21$$

$$2 \log_3^4 x$$

$$(\log_2 4)^2 = 4 \log_2 4 \cdot \log_2 4 + \frac{7}{2} \log_x 3 + 8 = 0.$$

$$(\log_2 4) = 1 \quad (\log_2 \frac{1}{4}) = -1$$

$$\frac{7}{2} \log_x 3 \leq 8.$$

$$\log_x 3 \leq \frac{16}{7}.$$

$$\log_x 3 \leq \frac{16}{7}$$

$$\log_x 3 \leq \frac{16}{7}$$

$$\log_x 3 \leq \frac{16}{7}$$

$$\log_x 3 \leq \frac{16}{7}$$

$$\log_x 3 \leq \frac{16}{7}$$

$$\log_x 3 \leq \frac{16}{7}$$

$$\log_x 3 \leq \frac{16}{7}$$

$$\log_x 3 \leq \frac{16}{7}$$

$$\log_x 3 \leq \frac{16}{7}$$

$$\log_x 3 \leq \frac{16}{7}$$

$$\log_x 3 \leq \frac{16}{7}$$

$$\log_x 3 \leq \frac{16}{7}$$

$$\log_x 3 \leq \frac{16}{7}$$

$$\log_x 3 \leq \frac{16}{7}$$

$$\log_3^4 54 = \frac{7}{2}.$$

$$\log_x 3 \leq \frac{16}{7}$$

$$\log_x 3 \leq \frac{16}{7}$$

$$(\log_2 x)^2 = (-\log_2 x)^2 \cdot x^{\frac{10}{7}}$$

$$= (\log_2 \frac{1}{x})^2.$$

$$3 \sqrt[4]{16} \geq x \neq 1.$$

$$3 \sqrt[4]{16} \geq x \neq 1.$$

$$3 \sqrt[4]{16} \geq x \neq 1.$$

$$3 \sqrt[4]{16} \geq x \neq 1.$$

$$3 \sqrt[4]{16} \geq x \neq 1.$$

$$3 \sqrt[4]{16} \geq x \neq 1.$$

$$3 \sqrt[4]{16} \geq x \neq 1.$$

$$3 \sqrt[4]{16} \geq x \neq 1.$$

$$3 \sqrt[4]{16} \geq x \neq 1.$$

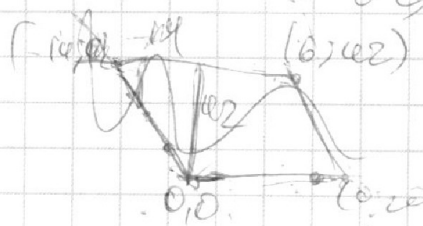
$$3 \sqrt[4]{16} \geq x \neq 1.$$

$$3 \sqrt[4]{16} \geq x \neq 1.$$

$$3 \sqrt[4]{16} \geq x \neq 1.$$

$$3 \sqrt[4]{16} \geq x \neq 1.$$

$$3 \sqrt[4]{16} \geq x \neq 1.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



IV

$$x \in [2\pi; -2\pi]$$

$$\cos \frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$-\frac{8\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$20\pi + 5x = 2\pi - x$$

$$x = -\frac{4\pi}{3}$$

$$\cos \left( -\frac{4\pi}{3} \right) =$$

V

$$y \in [-3\pi; -2\pi]$$

$$\cos \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$-\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{7\pi}{3}$$

$$y_2 = 3y_1 + 3x_2 = y_1 + 3y_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 0x + 2y - 3z = 0 \\ (x^2 + y^2 + z^2 - 100 + 32) = 0 \end{cases}$$

$$-2\pi = x \neq x \cos$$

$$-2\pi - x$$

$$-10\pi - 5x = 2\pi - x$$

$$-12\pi = -4x$$

$$x = 3\pi$$

$$\cos \frac{\pi}{3}, 2\pi, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{4\pi}{3}, 3\pi$$

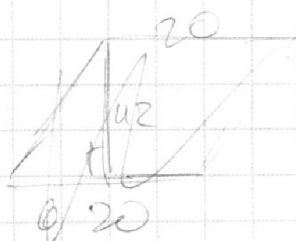
$$y_2 = y_1$$

$$y_2 - y_1 = 3(x - x) + 3$$

$$y = -\frac{4}{2}x + \frac{36}{2}$$

$$80 + 4^2 =$$

$$14\sqrt{10}$$



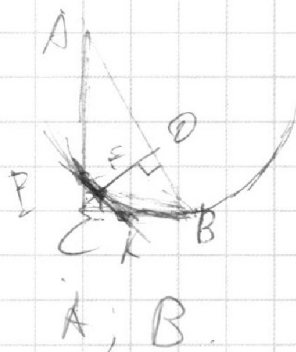
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AO:OP = 3:1$$

$$KB^2 = KF \cdot KE$$

$$KF \cdot KE = :$$

$$AO:OB = EF:FK = 3:1$$

$$KF:KE = 4KF^2$$

$$5 \arcsin(\cos x) \in \left[ \frac{8\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \right] = \left[ \frac{4\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \right]$$

$$5 \arcsin(\cos x) = 4\pi - x$$

$$5 \arcsin(\cos x) = 4\pi - x$$

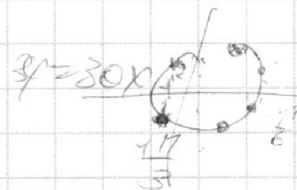
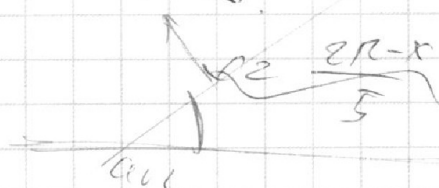
$$[-3\pi; 2\pi] \quad \{1; 30\}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5 \arcsin(\cos x) = 4\pi - x$$

$$5 \arccos(\cos x) = 2\pi - x$$

$$\arccos(\cos x) = \frac{2\pi - x}{5}$$

$$x \in [0; \pi]$$



$$\arccos(\cos \frac{4\pi}{3}) = \frac{4\pi}{3}$$

$$5x = 2\pi - x$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

$$x \in [\pi; 2\pi]$$

$$5(2\pi - x) = 2\pi - x$$

$$x = 2\pi$$

$$x \in [-\pi; 0]$$

$$5x = 2\pi - x$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1)

$$66: 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$6C: 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

2)

$$a = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^{10} \quad ac: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^{10} \quad 162 \geq 9$$

$$c = 2^{14} \cdot 3^{11} \cdot 5^{20} \quad b_2 + c_2 \geq 14$$

$$a_2 + c_2 \geq 19$$

$$21 \cdot 5 + 161 = -7$$

$$2 + (1^4 + 1) = -7$$

$$2^{10} (10 + 6 + c) \geq 22$$

3)

$$1^4 + 8 = -\frac{7}{26}$$

$$1 < 0$$

$$49 + 63 \geq 10$$

$$63 + 63 \geq 13$$

$$a_3 + c_3 \geq 48$$

$$\begin{cases} 6^2 + 6^2 = 16x^2 \\ c^2 + x^2 = 62 \end{cases}$$

$$c^2 + 4x^2 = 48$$

$$a_3 + b_3 + c_3 \geq \frac{47}{2}$$

$$2c^2 + 10x^2 = 66x^2$$

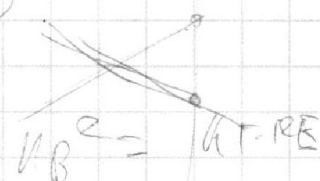
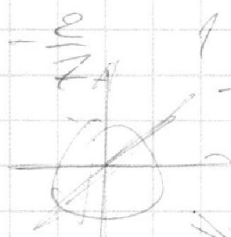
$$c^2 = 3x^2$$

$$c = \sqrt{3}x$$

$$21 \cdot 5 \cdot 27 \cdot 2$$

$$S_{\triangle} = EK \quad CK = 2EK$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{18}$$



$$KB = \frac{1}{4} KE$$

$$CK = 2EK$$

$$CK = 2EK$$