



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 1.

$a, b, c \in \mathbb{N}^+$

$$\begin{aligned} a &: 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} & (1) \\ b &: 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} & (2) \\ c &: 2^{14} \cdot 3^{24} \cdot 5^{29} & (3) \end{aligned}$$

Заметим, что если a, b, c имеют ещё на 4-ю - то есть числа, кроме 2, 3, 5, то их можно разложить на эти числа и умножить на первого вычитаемого.

Значит, a, b, c где мин. произв-я a, b, c имеют только на 2, 3, 5.

$$a = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3}$$

$$b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3}$$

$$c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3}$$

тогда из (1): $a_1 + b_1 \geq 8$ (2): $b_1 + c_1 \geq 12$
 $a_2 + b_2 \geq 14$ и $b_2 + c_2 \geq 20$
 $a_3 + b_3 \geq 24$ $b_3 + c_3 \geq 29$

(3): $a_1 + c_1 \geq 14$
 $a_2 + c_2 \geq 24$
 $a_3 + c_3 \geq 29$

Рассмотрим случаи 2:

Заметим, что при $a_1 = 5, b_1 = 3, c_1 = 9$ все раб-ва выполняются, т.е. достигаются наименьшие случаи 2 $\Rightarrow a_1 = 5, b_1 = 3, c_1 = 9$

случаи 3:

Заметим, что если все три раб-ва выполняются, то $2a_2 + 2b_2 + 2c_2 \leq 55$, что невозможно, так как нецелочисленное

тогда увеличим $a_2 + c_2$ на 1, т.е. $a_2 + c_2 \geq 22$ тогда $a_2 + c_2 + 2b_2 \leq 14 + 20 = 34$
 $\Rightarrow b_2 = 9$
 $\Rightarrow a_2 = 7 \Rightarrow c_2 = 13$

т.е. равенства (минимального значения) не достигаются, а это означает минимальное значение на 4-ю - то есть 4-е вычитаемого

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
2
□3
□4
☐

5

6

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим случаи 5:

Заметим, что если $\frac{d}{dt} \ln \rho = 0$ в течение времени, т.е. ρ постоянно.

$a_3 + c_3 = 39$, то при $a \leq 17, c \leq 27, b \leq 0$ ^{исполн}
первое и второе неравенства (верно), а если второе не выполняется, то
не выполняется третье $\Rightarrow$ это лучший вариант.

Получаем, что:

$$a = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3} = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^{12}$$

$$b = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \leq 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \leq 2^3 \cdot 3^7$$

$$C = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^3 = 2^9 \cdot 3^{13} \cdot 5^{27}$$

и 200 килограмм бархата

to get $abc = 2^{(5+3+1)} \cdot 3^{(7+2+1)} \cdot 5^{(12+2+1)} = 2^9 \cdot 3^9 \cdot 5^9$

Obs: $2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2) Замечим, что PB — кас. к ω ,
 $P \rightarrow F \rightarrow E$ — секущая ω } из точки P

$$\Rightarrow PB^2 = PF \cdot PE$$

$$BC \cdot (1-k)^2 = k^2 \cdot 2x \cdot 7x$$

$$14x^2 \cdot (1-k)^2 = 14x^2 \cdot k^2$$

$$14x^2 \cdot (k^2 - (1-k)^2) = 0$$

Т.к. $x \neq 0$ (иначе $AB=0$), то

$$k^2 = (1-k)^2$$

$$k^2 = k^2 - 2k + 1$$

$$1 - 2k = 0$$

$$k = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow CP = \frac{BC}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$ $PE \parallel AB$, P — с.р. BC , то PE — с.р. ΔABC
(по признаку.)

$\Rightarrow$ ~~E — с.р. AC~~ , $EP = \frac{7x}{2}$, $FP = \frac{2x}{2} = x \Rightarrow EF = \frac{7x - 2x}{2} = \frac{5x}{2}$

$$8) \text{ Замечим, что } S(\Delta CEF) = \frac{EF}{EP} \cdot S(\Delta PEC) = \frac{EF}{EP} \cdot S(\Delta ABC) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{5}{2 \cdot 4} \cdot S(\Delta ABC) = \frac{5}{28} S(\Delta ABC)$$

$$\Rightarrow \frac{S(\Delta ABC)}{S(\Delta CEF)} = \frac{28}{5}$$

$$\text{Ответ: } \frac{28}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 3.

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

т.е. $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$, то $\arcsin(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(x)$

$$10 \cdot \frac{\pi}{2} - 10 \arccos(\cos x) = \pi - 2x$$

$$4\pi = 10 \arccos(\cos x) - 2x$$

$$x + 2\pi = 5 \arccos(\cos x)$$

$$y = \arccos(\cos x)$$

1. $x \in [0; \pi]$:

$$\Rightarrow \arccos(\cos x) = x$$

$$x + 2\pi = 5x$$

$$2\pi = 4x$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

2. $x \in [\pi; 2\pi]$

$$\arccos(\cos x) = 2\pi - x$$

$$x + 2\pi = 10\pi - 5x$$

$$6x = 8\pi$$

$$x = \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$$

3. $x \in [2\pi; 3\pi]$

$$x + 2\pi = 5x - 10\pi$$

$$12\pi = 4x$$

$$x = 3\pi, \text{ не принадлежит промежутку.}$$

4. $x \in [3\pi; 4\pi]$: $\arccos(\cos x) = 4\pi - x$

$$x + 2\pi = 20\pi - 5x$$

$$6x = 18\pi \quad x = 3\pi$$

5. $x \in [-\pi; 0]$: $\arccos(\cos x) = -x$

$$2\pi + x = -x + 5$$

$$2x = -2\pi$$

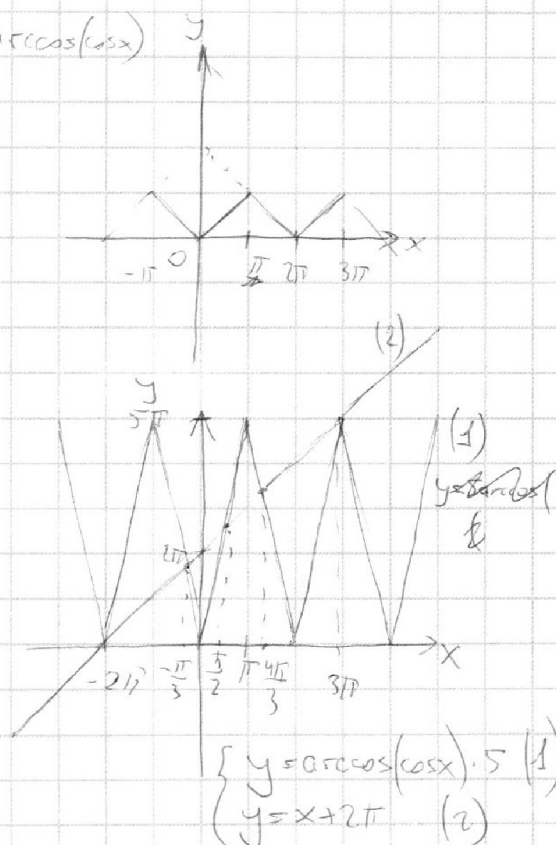
$$x = -\frac{\pi}{3}$$

6. $x \in [-2\pi; -\pi]$: $\arccos(\cos x) = x + 2\pi$

$$x + 2\pi = 5 \cdot (x + 2\pi)$$

$$4 \cdot (x + 2\pi) = 0$$

$$x = -2\pi$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что т.ч. область значений
 $\arccos(t)$ — $[0; \pi]$, то

область значений $\arccos(\cos x)$ — $[0; \pi]$

при $x > 3\pi$ $x + 2\pi > 5\pi$

при $x < -2\pi$ $x + 2\pi < 0$

$\Rightarrow$ на $(-\infty; -2\pi) \cup (3\pi; +\infty)$ нет корней

$\Rightarrow$ мы можем рассмотреть

$[2\pi; 3\pi]$ и найти все корни на интервале $-\pi$ — все корни

данного уравнения

$\Rightarrow$ Ответ: $-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4.

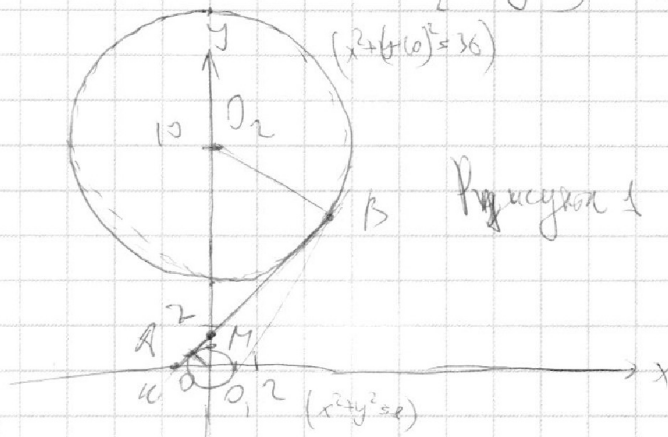
$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

Также $a, b \neq 0$ найдется λ при котором
имеет 4 решения

Заключим, что $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 10)^2 = 36 \end{cases}$

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 10)^2 = 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{ax}{3} + \frac{4b}{3} \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 10)^2 = 36 \end{cases}$$



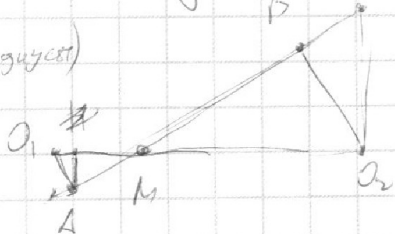
Заключим, что
сформулировано в системе - 2
окр-сти, а первое ур-е - прямая
случай $\frac{a}{3}$ и точки пересечения
с осью абсцисс

Рассмотрим при $a \neq 0$
Каждое ур-е описывает окружность касательную к двум окр-стям:

O_1, O_2 - центры, A, B - точки касания, $M = O_1 O_2 \cap AB$

Рисунок 2

$O_1 A = 1$ (радиус)
 $O_2 B = 6$
 $O_1 O_2 = 10$



$\triangle O_1 A M \sim \triangle O_2 B M$ (по 2 углам, один - общий)
по двум-верши.

$$\Rightarrow \frac{O_1 M}{O_1 A} = \frac{O_2 B}{O_2 M} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow O_1 M = \frac{1}{6+1} \cdot 10 = \frac{10}{7}$$

Тогда $AM \leq O_1 M \Rightarrow OA^2 = \sqrt{100 - \frac{100}{49}} = \frac{\sqrt{4900 - 100}}{7}$

Тогда $AM \leq O_1 M \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{4900 - 100}}{7}$

Аналогично $\angle M O_2 B = 90^\circ$ - $\angle M O_1 A = \angle M O_2 B$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Получаем, что при $a > \frac{3\sqrt{54}}{7}$ ~~и~~
~~можно~~ ~~стан~~ ~~здесь~~ ~~при~~ $b = \frac{30}{28}$ и будет 4 точки пересечения,
и при $a \leq \frac{3\sqrt{54}}{7}$ не получится, тогда было 4 точки
пересечения

~~и~~ ~~ответ~~: график ~~или~~
Заметим, что ~~уравнение~~ симметрично относительно оси ~~и~~ ординат
~~симметрично~~
~~симметрично~~

Значит, при $a < 0$ будет всё то же самое, но с минусом,
т.е., если получилось a , то $-a$ тоже получится

Значит, при $a < 0$ получится $a \leq -\frac{3\sqrt{54}}{7}$

Ответ: $(-\infty; -\frac{3\sqrt{54}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{54}}{7}; +\infty)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x} 3.625 - 3$$

Пусть $\log_5(2x) = t$, тогда

$$\text{т.е. } \log_{2x} 5 = \frac{1}{\log_5 2x} = \frac{1}{t}$$

$$\log t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{t} - 3 \quad , \text{ т.е. } \log_{8x} 3.625 = \log_{(2x)^3} 5^4 = \frac{4}{3} \log_{2x} 5$$

$$\frac{3t^5 - 9 - 4 + 9t}{3t} = 0$$

$$\frac{3t^5 + 9t - 13}{3t} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3t^5 + 9t - 13 = 0 & (1) \\ t \neq 0 \end{cases}$$

$$\log_5^5 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0.2 - 3$$

Пусть $\log_5 y = p$, тогда

$$p^5 + \frac{4}{p} = -\frac{1}{3p} - 3$$

$$\frac{3p^5 + 12 + 1 + 9p}{3p} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3p^5 + 9p + 13 = 0 & (2) \\ p \neq 0 \end{cases}$$

Заметим, что

$$f(t) = 3t^5 + 9t - 13$$

$$g(p) = 3p^5 + 9p + 13$$

Значит, тогда

$$f'(t) = 15t^4 + 9$$

$$g'(p) = 15p^4 + 9$$

Заметим, что $f'(t) > 0$ при всех t , $g'(p) > 0$ при всех p , то
Ф. и. в. зр., значит, у них не более одного корня на $\mathbb{R}$
(т.е. область значений логарифма $-\mathbb{R}$)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Также заметим, что если есть $t = t_0$, y является решением системы (1), то $p = -t_0$ является решением системы (2):

$3t_0^5 + 9t_0 - 13 = 0$ — первое уравнение системы (1) (исполнено при t_0 верно)
 $-3t_0^5 - 9t_0 + 13 = 0$ — второе уравнение системы (2) в $-t_0$:
 $3(-t_0)^5 + 9(-t_0) + 13 = 0$
 $-3t_0^5 - 9t_0 + 13 = 0$
 $3t_0^5 + 9t_0 - 13 = 0$
 ↑ верно из предположения.

Заметим, что $f(1) = 3 + 9 - 13 = -1 < 0$
 $f(2) = 3 \cdot 32 + 9 \cdot 2 - 13 = 96 + 5 = 101 > 0$
 $\Rightarrow$ в силу непрерывности f и g (т.е. это непрерывные функции) существует t_0 при $1 < t_0 < 2$: $f(t_0) = 0$

Значит, для $\begin{cases} \log_5 2x = t_0 \\ \log_5 y = -t_0 \end{cases}$

$\Rightarrow \log_5 2x + \log_5 y = 0$

$\begin{cases} \log_5 2xy = 0 \\ x > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 2xy = 1$
 $xy = \frac{1}{2}$

Итого: $\frac{1}{2}$

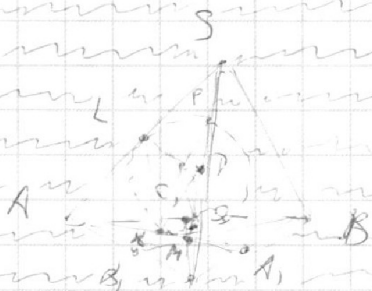
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение:

1) Т.ч. $SP \perp AQ$, B

середина SM — середина PQ

2) Д.ч. P — с.р. SM

ΔABC — т.р. $AB \perp AC$, $BC \perp AB$

AA_1, BB_1, CC_1 — высоты

$AA_1, BB_1, CC_1 \perp H$

$\Delta AAS \perp H$, L

$\Delta A(BC) \perp H$, $K \in AM$

$\Delta ASM \perp P, Q$, $SP \perp AQ$

$S(ABC) = 100$, $BC = 16$

3) Контр: AA_1, BB_1, CC_1

4) $\Delta A(BC) \perp H$, $SM \perp L$

$R(\Delta) = 5$

Контр: $\Delta ABC \perp A(BC)$

$p = 144$

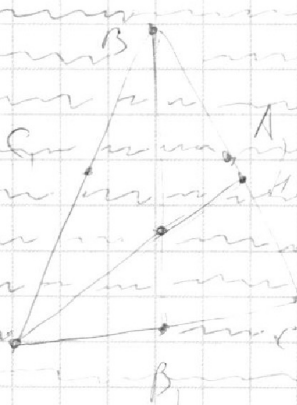
$q = 16$

$\times 36$
 36

18

$5x + y, z - 5x - 5y = 45$

$88 + 28 \quad 284 \quad 248 \quad 900 \quad 561 \quad 1029 \quad 1005 \quad 156 \quad 1225 \quad 1729$



$1 \quad 4 \quad 9 \quad 16 \quad 25 \quad 36 \quad 49 \quad 64 \quad 81 \quad 100$

$144 \quad 169 \quad 196 \quad 225 \quad 256 \quad 289 \quad 324 \quad 361 \quad 400 \quad 441 \quad 484 \quad 529 \quad 576 \quad 625$