



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



+ 1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

+ 2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .

+ 3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

+ 4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

+ 5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

+ 6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.



1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

решение: Оценка:

Обозначим $\text{ord}_p(x) \rightarrow$ степень включения простого множителя p в факторизацию числа x ($p, x \in \mathbb{N}$, $p \rightarrow$ простое) (наибольшая степень p , на которую делится число x).

Тогда по условию $\text{ord}_2(ab) \geq 9$; $\text{ord}_3(ab) \geq 10$;
 $\text{ord}_2(bc) \geq 14$; $\text{ord}_3(bc) \geq 13$;
 $\text{ord}_2(ac) \geq 19$; $\text{ord}_3(ac) \geq 18$;
 $\text{ord}_5(ab) \geq 10$; $\text{ord}_5(bc) \geq 13$; $\text{ord}_5(ac) \geq 30$.

(по признаку делимости двух чисел в степени x включений простых).

Также очевидно свойство: $\text{ord}_p(xy) = \text{ord}_p(x) + \text{ord}_p(y)$ (по аб-у включений), откуда

$$\begin{aligned} \text{ord}_2(a) + \text{ord}_2(b) &= \text{ord}_2(ab) \geq 9 \\ \text{ord}_2(b) + \text{ord}_2(c) &= \text{ord}_2(bc) \geq 14 \\ \text{ord}_2(a) + \text{ord}_2(c) &= \text{ord}_2(ac) \geq 19 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} &\Rightarrow 2 \cdot (\text{ord}_2(a) + \text{ord}_2(c)) + \\ &\quad + \text{ord}_2(b) \geq 42 \Rightarrow \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 21 &\leq \text{ord}_2(a) + \text{ord}_2(b) + \text{ord}_2(c) = \text{ord}_2(abc). \Rightarrow \\ &\Rightarrow abc : 2^{21}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ord}_3(a) + \text{ord}_3(b) &= \text{ord}_3(ab) \geq 10 \\ \text{ord}_3(b) + \text{ord}_3(c) &= \text{ord}_3(bc) \geq 13 \\ \text{ord}_3(a) + \text{ord}_3(c) &= \text{ord}_3(ac) \geq 18 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} &\Rightarrow 2 \cdot (\text{ord}_3(a) + \text{ord}_3(c)) + \\ &\quad + \text{ord}_3(b) \geq 41 \Rightarrow \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 20,5 &\leq \text{ord}_3(a) + \text{ord}_3(b) + \text{ord}_3(c) = \text{ord}_3(abc) \\ \text{но т.к. } \text{ord}_3(abc) &\in \mathbb{Z}, \text{ то } \text{ord}_3(abc) \geq 21, \text{ и } \\ &abc : 3^{21}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ord}_5(a) + \text{ord}_5(b) &= \text{ord}_5(ab) \geq 10 \\ \text{ord}_5(b) + \text{ord}_5(c) &= \text{ord}_5(bc) \geq 13 \\ \text{ord}_5(a) + \text{ord}_5(c) &= \text{ord}_5(ac) \geq 30 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} &\Rightarrow 2 \cdot (\text{ord}_5(a) + \text{ord}_5(c)) + \\ &\quad + \text{ord}_5(b) \geq 53 \Rightarrow \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 26,5 &\leq \text{ord}_5(a) + \text{ord}_5(b) + \text{ord}_5(c) = \text{ord}_5(abc) \\ \text{но т.к. } \text{ord}_5(abc) &\in \mathbb{Z}, \text{ то т.к. } 30 \leq \text{ord}_5(ac) \leq \text{ord}_5(ac) + \\ &+ \text{ord}_5(b) = \text{ord}_5(abc), \text{ то } \text{ord}_5(abc) \geq 30 \Rightarrow abc : 5^{30} \\ &(\text{от } 1/2) \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Вывода, т.к. числа $2^{21}; 3^{21}; 5^{30} \rightarrow$ попарно взаимно-
просты, то т.к. $abc : 2^{21}; abc : 3^{21}; abc : 5^{30}$, то
 $abc : 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$ а т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, то
 $abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$.

Пример: пусть $a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{15}$
 $b = 2^2 \cdot 3^3$, тогда

$$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{15}$$

$$\begin{aligned} ab &= 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{15} & (ab : (2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}) \rightarrow \text{верно}) \\ bc &= 2^{14} \cdot 3^{14} \cdot 5^{15} & (bc : (2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}) \rightarrow \text{верно}) \\ ac &= 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} & (ac : (2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}) \rightarrow \text{верно}) \end{aligned}$$

$$abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} \rightarrow \text{совпадает с оценкой.}$$

$$\text{Вывод: } 1 + 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} \}$$

(сф. 2/2)

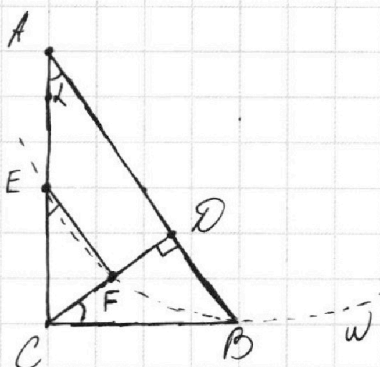
1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2 Дано:

$\triangle ABC: \angle C = 90^\circ$;
 ω - Окр. $(O; R) \rightarrow$ касается
 прямой BC в точке B ;
 $CD \rightarrow$ высота $\triangle ABC$; $(DE \perp AB)$;
 $\omega \cap CD = \{F\}$; $\omega \cap AC = \{E\}$;
 $EF \parallel AB$; $AD:DB = 3:1$;

$\triangle ABC$; $\triangle DEF - ?$



Решение:

Пусть $\angle BAC = \alpha$ (обозначение), где $0 < \alpha < 90^\circ$
 (острый угол в прямоугол. треуго. ABC) ($\alpha \in \mathbb{R}$).

Т.к. BC касается ω в B и $EF \parallel AB$ (по усл.),
 то $\angle BEF = \angle CAB = \alpha$; $\angle ADE = \angle EFC = 90^\circ$ (по св-у
 паралл. прямых о соотв. углах при секущей).

Рассмотрим $\triangle BAC$ и $\triangle BCD$:

- $\angle B$ - общий.
- $\angle BCA = 90^\circ = \angle BDC \Rightarrow \triangle BAC \sim \triangle BCD$ (по двум углам) $\rightarrow$

$$\Rightarrow \angle CAD = \alpha = \angle BCD; \quad \frac{AD}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$$

(по сф. подобных треуго.).

Откуда $BD \cdot AB = BC^2$; Аналогично $AD \cdot AB = AC^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \frac{AD}{BD} = \frac{3}{1} = 3$ (по условию) $\Rightarrow \frac{BC}{AB} = \sqrt{3}$;

Рассмотрим $\triangle ABC: \angle C = 90^\circ \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \alpha = 30^\circ$ (по св-у тангенса острого угла
 прямоугол. треуго.; известной тангенс известного
 острого угла).

Т.к. $BC \rightarrow$ касательная к ω , то $\angle BEF = \beta = \angle CBF$
 (по теор. об угле между кас. и хордой).

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Отсюда $F \rightarrow$ точка Шалтая для $\triangle BCE$ (по опр. точки Шалтая труг.). (последующие св-а точки Шалтая мы докажем).

Пусть ρ — опис. окруж. $\triangle CEF$ (дем. постр.), тогда т.к. $\angle CEF = \alpha = \angle BCF$, то $BC \rightarrow$ касательная к ρ в точке C (по теор. обратной теор. об угле между касательной и хордой).

Пусть $EF \cap BC = M$ (дем. постр.), тогда, т.к.

$E \in \omega; E \in \rho; F \in \omega; F \in \rho \rightarrow EF$ — рад. ось ω и ρ .
(т.к. $\deg_{\omega}(E) = 0 = \deg_{\omega}(F) = \deg_{\rho}(E) = \deg_{\rho}(F)$)
(по опр. рад. оси двух окруж.)
(п.з. $\deg_{\omega}(X) \rightarrow$ множество точек X , относительно окружности ω).

А т.к. $M \in EF$, то $\deg_{\omega}(M) = \deg_{\rho}(M)$ (по опр. рад. оси).

Отсюда $MC^2 = ME \cdot MF = \deg_{\rho}(M) = \deg_{\omega}(M) =$
 $= ME \cdot MF = MB^2$ (по теор. о квадрате касательной; по св-у множества точек 0 совб. отрезков)

Отсюда $MB = MC \Rightarrow M$ — сер. BC (по известное св-о точки Шалтая). А т.к. $EF \parallel AB$ (по условию), а также $M \rightarrow$ сер. BC ; $M \in EF$, то EF — ср. линия $\triangle ABC$ (по признаку ср. линии труг.). (т.к. если провести серединную ср. линию труг. ABC , то она пройдет через M (по опр. ср. линии труг.) и будет паралл. AB (по теор. о ср. линии труг.). Отсюда она совпадает с EF (по аксиоме паралл. прямых)).

Отсюда $E \rightarrow$ сер. AC (по опр. ср. линии труг.), а
 $F \rightarrow$ сер. AD (по св-у ср. линии труг. о совб. медианах).

Отсюда EF — ср. линия $\triangle CAD$ (по опр. ср. линии труг.).

Отсюда $EF = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} AB = \frac{3}{8} AB$.
(по теор. о ср. линии труг.; по аксиоме (стр. 2/3))

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

изм. Δ резубов). /по условию).

Рассмотрим ΔABC : $\angle C = 90^\circ$ (по усл.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AC = AB \cos A = AB \cdot \cos 30^\circ = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8 \cdot \sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ (по опр. косинуса остроугольного угла прямоугольного треугольника);

Рассмотрим ΔCEF и ΔBAC :

- $\angle CFE = \angle ACB = 90^\circ$
- $\angle CEF = 30^\circ = \angle BAC \Rightarrow \Delta CEF \sim \Delta BAC \Rightarrow$ (по двум углам)

$$\Rightarrow \frac{AC}{CE} = \frac{BC}{EF} \Rightarrow \frac{AC^2}{CE^2} = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$$

(по св-у подобных треугольников об отношении площадей
относится как квадрат коэффициента подобия).

Ответ: $5 + 5\frac{1}{3}$.

(стр. 3/3)

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



23) Решение:

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) \Leftrightarrow$$

т.к. левая и правая части равны, то
равны и аргументы этих частей.

$$\Leftrightarrow \cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi, \text{ где } k \in \mathbb{Z} \\ \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi, \text{ где } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6}{5}x = \frac{2}{5}\pi + 2k\pi, \text{ где } k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{4}{5}x = \frac{2}{5}\pi + 2k\pi, \text{ где } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}k\pi, \text{ где } k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}k\pi, \text{ где } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}k\pi, \text{ где } k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}k\pi, \text{ где } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

т.к. $\arcsin y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, где $y \in \mathbb{R}$ ($y \in [-1; 1]$).

$$\text{то } -\frac{5\pi}{2} \leq 5 \arcsin(\cos x) \leq \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3\pi \leq 5 \arcsin(\cos x) - \frac{\pi}{2} \leq 2\pi, \text{ т.е. } -3\pi \leq x \leq 2\pi.$$

Отсюда 1) $\begin{cases} -3\pi \leq \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}k\pi \leq 2\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -9 \leq 1 + 5k \leq 6 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10 \leq 5k \leq 5 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq k \leq 1 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ k=0 \\ k=-1 \\ k=-2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; -\frac{4}{3}\pi; -3\pi \rightarrow \text{некорректные значения } x$$

2) $\begin{cases} -3\pi \leq -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}k\pi \leq 2\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq -1 + 5k \leq 4 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq k \leq 1 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ k=0 \\ k=-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

(стр. 1/2)

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\Rightarrow 2\pi; -\frac{\pi}{2}; -3\pi \rightarrow$ порождающие значения из этой серии.

Откуда корни данного уравнения могут быть только числами из множества:

$$\{-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{3}; +2\pi\}.$$

Проверка:

$$1) x = -3\pi; \quad \cos(-3\pi) = \cos \pi = -1; \\ \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}; \\ x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 3\pi = -\frac{5\pi}{2}$$

$$\text{Откуда } 5 \arcsin(\cos(-3\pi)) = 5 \cdot (-\frac{\pi}{2}) = -\frac{5\pi}{2} = -3\pi + \frac{\pi}{2};$$

$$2) x = -\frac{4\pi}{3}; \quad \cos(-\frac{4\pi}{3}) = \cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}; \\ \arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}; \\ x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6};$$

$$\text{Откуда } 5 \arcsin(\cos(-\frac{4\pi}{3})) = 5 \cdot (-\frac{\pi}{6}) = -\frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{3}.$$

$$3) x = -\frac{\pi}{2}; \quad \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0; \\ \arcsin(0) = 0; \\ x + \frac{\pi}{2} = 0;$$

$$\text{Откуда } 5 \arcsin(\cos(-\frac{\pi}{2})) = 5 \cdot 0 = 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2};$$

$$4) x = \frac{\pi}{3}; \quad \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}; \\ \arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}; \\ x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6};$$

$$\text{Откуда } 5 \arcsin(\cos(\frac{\pi}{3})) = 5 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3};$$

$$5) x = 2\pi; \quad \cos 2\pi = \cos 0 = 1; \\ \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}; \\ \frac{\pi}{2} + x = \frac{5\pi}{2};$$

$$\text{Откуда } 5 \arcsin(\cos(\frac{5\pi}{2})) = 5 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi;$$

Откуда все эти 5 корней $\rightarrow$ корни нашего уравн.

$$\text{Ответ: } \{-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{3}; +2\pi\}.$$

(ср. 2/2)

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

решение:

$$\begin{cases} ax + 2y - 3z = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \quad (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 & (3) \\ (x-6)^2 + y^2 = 2^2 & (4) \end{cases}$$

(3) $x^2 + y^2 = 3^2 \rightarrow$ ур-е окружности с центром $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{3}$.

(4) $(x-6)^2 + y^2 = 2^2 \rightarrow$ ур-е окружности с центром $(6;0)$ и радиусом $\sqrt{2}$.

(1) $ax + 2y - 3z = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}z \rightarrow$ ур-е прямой (невертикальной, т.е. коэфф. при y не равен 0).

Т.к. прямая может пересекать окружность не более, чем в 2-ух точках, то чтобы данная система имела ровно 4 решения, то наша прямая должна пересекать обе окружности по 2-ух точкам (наискрестно).

$\sqrt{-\frac{a}{2}}$ $\rightarrow$ угловой коэфф. нашей прямой.

$\sqrt{+\frac{3}{2}z}$ $\rightarrow$ свободный коэфф. прямой.

Откуда для фиксированного $a \in \mathbb{R}$ мы можем подобрать z , т.е. для данного углового коэфф.

$\sqrt{-\frac{a}{2}}$ мы можем прямую $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}z$ перенести на любой вектор вида $(0; \frac{3}{2}z)$.

Очевидно такими операциями, мы можем добиться того, чтобы график (1) проходил через любую точку плоскости.

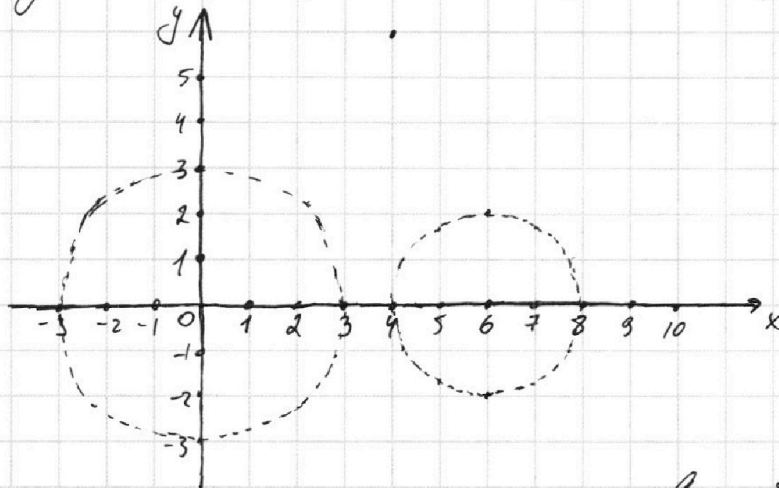
(стр. 1/4)

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Изобразим график (2): (2 окружности).



Рассмотрим прямую $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b$
посмотрим при каких значениях b она
может пересекать (3). (р.ф. если $a=0$, то $b=0 \rightarrow$
 $\rightarrow$ ось абсцисс пересекает (3) в 4-х точках $\rightarrow$
 $\rightarrow a=0 \rightarrow$ подходит, далее рассмотрим $a \neq 0$).

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b \end{cases} \Rightarrow x^2 + \left(-\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b\right)^2 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + (ax - 3b)^2 = 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + a^2x^2 + 9b^2 - 6abx = 36 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (a^2 + 4)x^2 - 6abx + (9b^2 - 36) = 0 \rightarrow$ у данного уравнения должно быть 2 решения, поэтому $\frac{D}{4} > 0$

$$0 < \frac{D}{4} = (3ab)^2 - (a^2 + 4)(9b^2 - 36) \Rightarrow a^2b^2 - (a^2 + 4)(b^2 - 4) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2 - a^2b^2 + 4a^2 - 4b^2 + 16 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 4 > b^2 \Leftrightarrow -\sqrt{a^2 + 4} < b < \sqrt{a^2 + 4};$$

Посмотрим при каких значениях b она
может пересекать (4).

$$\begin{cases} (x-6)^2 + y^2 = 4 \\ y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b \end{cases} \Rightarrow x^2 - 12x + 36 + \left(\frac{a}{2}x - \frac{3}{2}b\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 48x + 144 + a^2x^2 - 6abx + 9b^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot (a^2 + 4) - 2x(24 + 3ab) + (9b^2 + 144) = 0;$$

(стр. 2/4)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

у данного ур-я так же должно быть 2 реал. корни, т.е. $D/4 > 0$, т.е.

$$0 < \frac{D}{4} = (ab+24)^2 - (a^2+4)(b^2+128) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 9a^2b^2 + 144ab + 144 \cdot 4 - 9a^2b^2 - 128a^2 - 36b^2 - 512 &> 0 \Rightarrow 144ab + 144 \cdot 4 - 128a^2 - 36b^2 - 512 > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 36ab + 144 - 32a^2 - 9b^2 - 128 > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -9b^2 + 36ab - 32a^2 + 16 > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 9b^2 - 36ab + 32a^2 - 16 < 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (18)^2 - 9 \cdot (32a^2 - 16) = 6^2 \cdot (9a^2 - 8a^2 + 4) = \\ &= 6^2 \cdot (a^2 + 4) \Rightarrow \frac{18a - \sqrt{a^2+4} \cdot 6}{9} < b < \frac{18a + 6\sqrt{a^2+4}}{9}, \end{aligned}$$

$$\text{т.е. } 2a - \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4} < b < 2a + \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4};$$

Откуда 2 условия на b :

$$\begin{cases} 2a - \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4} < b < 2a + \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4}, \\ -\sqrt{a^2+4} < b < \sqrt{a^2+4} \end{cases};$$

Откуда, чтобы такое b существовало, необходимо потребовать:

$$1) \sqrt{a^2+4} > 2a - \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4} \Leftrightarrow \frac{5}{3}\sqrt{a^2+4} > 2a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{a^2+4} > 6a \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a < 0 \end{cases} \begin{cases} 25a^2 + 100 > 36a^2 \Leftrightarrow \\ 100 > 11a^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a < 0 \end{cases} \begin{cases} 0 \leq a < \sqrt{\frac{100}{11}} \Leftrightarrow a < \frac{10}{\sqrt{11}}; \\ a < 0 \end{cases}$$

$$2) 2a + \frac{2}{3}\sqrt{a^2+4} > -\sqrt{a^2+4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a > -\frac{5}{3}\sqrt{a^2+4} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a \leq 0 \end{cases} \begin{cases} 36a^2 > 25a^2 + 100 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a \leq 0 \\ a > -\sqrt{\frac{100}{11}} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{10}{\sqrt{11}} < a. \quad (\text{ср. 3/4})$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Отсюда $-\frac{10\sqrt{11}}{11} < a < \frac{10\sqrt{11}}{11}$ (при a в этом
промежутке 2 данных интервала очевидно
имеют общую точку $\rightarrow$ определяем значение b
для данного a .)
Ответ: $(-\frac{10\sqrt{11}}{11}; +\frac{10\sqrt{11}}{11})$.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

$$\begin{array}{l} \text{ОДЗ: } \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x^2 > 0 \\ x^2 \neq 1 \\ 5y > 0 \\ 5y \neq 1 \\ 25y^2 > 0 \\ 25y^2 \neq 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ x \neq 1 \\ y > 0 \\ y \neq \frac{1}{5} \end{array} \right.$$

пусть $a = \log_3 x$, где $a \in \mathbb{R}$; (на ОДЗ).
 $b = \log_3(5y)$, где $b \in \mathbb{R}$;

тогда $\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x} = \frac{1}{a}$, т.е. $a \neq 0$.

$$\log_{x^2} 243 = \frac{1}{2} \log_x 3^5 = \frac{5}{2} \log_x 3 = \frac{5}{2a}; \quad (\text{т.к. } x > 0)$$

$$\log_{5y} 3 = \frac{1}{\log_3 5y} = \frac{1}{b}, \text{ т.е. } b \neq 0; \log_{25y^2}(3^4) =$$

$$= \frac{4}{2} \log_{5y} 3 = \frac{4}{2b} \quad (\text{т.к. } 5y > 0)$$

В итоге получаем 2 ур-а:

$$\begin{cases} a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8 \\ b^4 + \frac{6}{b} = \frac{11}{2b} - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a^5 + 16a = 5 - 16a \\ 16b^5 + 16b = 11 - 16b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^5 + 16a + 7 = 0 \\ 2b^5 + 16b - 7 = 0 \end{cases}; \text{ В итоге}$$

$$2(a^5 + b^5) + 16(a + b) = 0 \Leftrightarrow (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) +$$

$$+ (a + b) \cdot 8 = 0 \Leftrightarrow (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 8 = 0 \end{cases}$$

(стр. 1/2)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 8 = 0$, тогда

$$a^4 + \frac{a^2b^2}{4} \geq 2\sqrt{a^4 \cdot \frac{a^2b^2}{4}} = \sqrt{a^6b^2} = |a^3b| \geq a^3b$$

(по нер-ву Коши).

$$b^4 + \frac{a^2b^2}{4} \geq 2\sqrt{b^4 \cdot \frac{a^2b^2}{4}} = \sqrt{a^2b^6} = |ab^3| \geq ab^3$$

(по нер-ву Коши).

$$\begin{aligned} \text{Откуда } a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 8 &= \\ &= (a^4 + \frac{a^2b^2}{4} - a^3b) + (b^4 + \frac{a^2b^2}{4} - ab^3) + \frac{a^2b^2}{2} + 8 \geq 8 \end{aligned}$$

(разбили на неотрицательные слагаемые)

Получили противоречие, т.е. $a^4 - a^3b + b^4 - a^2b - ab^3 + 8 \neq 0$,
а это значит, что $a + b = 0$, т.е.

$$\log_3 x + \log_3 5y = 0 \Leftrightarrow \log_3 5xy = 0 \Leftrightarrow 5xy = 1 \Leftrightarrow xy = \frac{1}{5} \rightarrow$$

$\rightarrow$ единственное возможное значение xy .

Пример: $x = 3, y = \frac{1}{15}$

Р. 2. Такие x и y существуют, т.к. $3a^5 + (6a+7) = 0$
уравнение 5-ой (нечётной степени) $\rightarrow$ имеет
хотя бы 1 корень (вещное $0 \rightarrow$ не корень)
тогда $x = 3^a \rightarrow$ исконое. Аналогично $y = 3^b \rightarrow$
 $\rightarrow$ исконое).

Ответ: $1 + \frac{1}{5}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

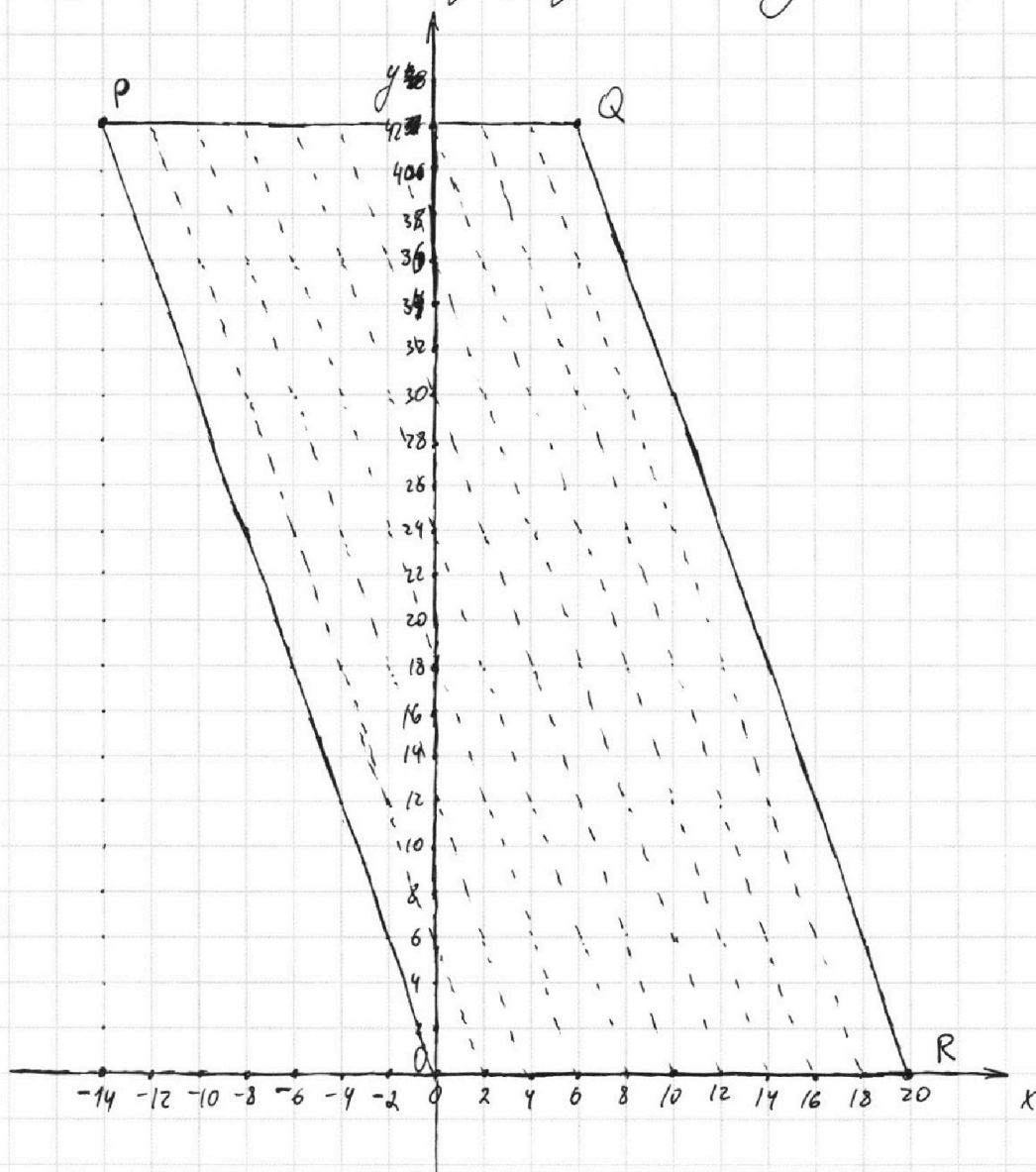
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6 Решение: Изобразим исходный параллелограмм.



$$3(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 33 \Leftrightarrow (y_2 - y_1) = 33 - 3 \cdot (x_2 - x_1)$$

Т.е. для каждой точки $(x_2; y_2)$ все такие точки $(x_1; y_1)$ лежат на прямой с угловым коэф. -3 , проходящей через точку $(x_2 - 11; y_2)$ (легко проверяется подстановкой в ур-е).

Рассмотрим все прямые с угловым коэф. -3 , проходящие через целочисленные точки, (стр. 1/2)



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

имеющие хотя бы 1 общую точку с нашим параллелог.)

Заметим, что прямые OP и OQ (границы параллелог.) подкорот под это условие.

(их уравнение $xy=0$, равны $y=0$ и $x=0$ и они проходят через целочисл. точки $(0;0)$ и $(0;20)$, например)

Тогда все рассмотренные прямые будут параллельны (или совпадают) сторонам OP и OQ этого параллелога, причем очевидно на каждой такой прямой будет ровно 15 целочисленных точек.

(Р. 5. $(0;0); (-1;3); (-2;6); \dots; (-14;42) \rightarrow$

$\rightarrow 15$ целочисленных точек на OP , а остальные $11 \cdot 14$ точек (прямки) получаются из OP паралл. переносом на векторы $(i;0)$, где $i \in \mathbb{N}_0; i \leq 20$. (при $i=20$ получится OQ).

Пронумеруем все такие прямые по i своз. (от 0 до 20)

Тогда для всех точек O i -ой прямой будут подкорот все точки 0 -ой прямой. (на 0-ой прямой будут точки $(x;0)$, а на i -ой $(x;i)$, причем никакие более точки не будут подкорот (показали ранее).

для точек 1 -ой прямой $\rightarrow$ точки 1 -ой прямой.
для точек 13 -ой прямой $\rightarrow$ точки 2 -ой прямой
и т.д.

для точек 20 -ой прямой $\rightarrow$ точки 9 -ой прямой.

для точек j -ой прямой, где $j \in \mathbb{N}_0; j \leq 10$
никакие точки не будут соответствовать, т.е. такая прямая не пересекает параллелограмм).
(нулевой)

Откуда мы получили 10 групп из 2-ух прямых.

На каждой из 2-ух прямых по 15 точек, а значит

225 пар точек, а т.к. групп 10, то

всего 2250 нулевых пар точек (очевидно, каждая

нулевую пару мы посчитали, причем ровно 1 раз).

Итого: ~~2250~~ 2250 пар. (стр. 2/2)

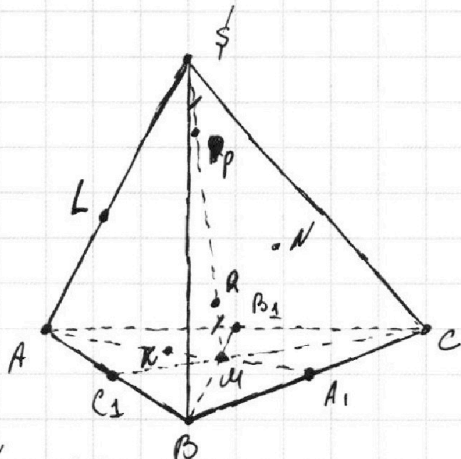
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№7 ~~Решение~~ Дано:

$$\angle ABC = 90^\circ; \angle A = \angle C = 12^\circ;$$



д) $\angle N = 4^\circ; R = 5 \rightarrow$ радиус R .

- а) $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 - ?$
б) $\angle \phi - ?$ (при BC)

Решение: Пусть
 $\deg_w(X) \rightarrow$ степень
точки X , относительно
сферы w , тогда

$$\deg_L(A) = AL^2 = AK^2 \Rightarrow AL = AK$$

(по св-у емен. точки о сф. касательной).

$$\deg_R(M) = MK^2 = MQ \cdot MR.$$

(по св-у емен. точки о сф. касательной;
по св-у емен. точки о сф. отрезках).

$$\text{Аналогично } \deg_L(S) =$$

$$= \angle L^2 = \angle P \cdot \angle Q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle P \cdot \angle Q = MP \cdot MQ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle L = MK.$$

(по условию $MQ = \angle P$); по аналогии изм. отрезков
($MP = \angle M - \angle P = \angle M - MQ = \angle Q$)

$$\text{Откуда } AL + \angle L = AK + MK \Rightarrow AS = AM \text{ (по аналогии изм. отрезков)}$$

$$\text{Откуда } AM = AS = 12 \text{ (по условию)}$$

т.к. $M \rightarrow$ центр масс ΔABC (по условию), то
 $AM : MA_1 = 2 : 1$ (известное св-о центра 'масс').

$$\text{Откуда } AA_1 = \frac{3}{2} \cdot AM = 18 \text{ (по аналогии изм. отрезков)}.$$

Рассмотрим отдельно ΔABC . Пусть $\angle \phi = \angle(A; BC) \rightarrow$ расстояние от точки A до прямой BC , тогда $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle(A; BC) \cdot BC$ (пр. 1/3)

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



по формуле площади треуго. через высоту $\Rightarrow$

$$\Rightarrow S(ABC) = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{180}{12} = 15 \text{ (по условию).}$$

$$\begin{aligned} \text{Заметим, что } 4AA_1^2 &= AB^2 + AC^2 - BC^2 \\ 4BB_1^2 &= 2AB^2 + 2BC^2 - AC^2 \\ 4CC_1^2 &= 2AC^2 + 2BC^2 - AB^2 \end{aligned}$$

(по формуле медианы треуго.)

$$\begin{aligned} \text{Откуда } AB^2 + AC^2 &= 2AA_1^2 + \frac{BC^2}{2} = 2 \cdot 18^2 + \frac{12^2}{2} = \\ &= 2 \cdot 324 + 72 = 648 + 72 = 720; \end{aligned}$$

$$\text{Рассмотрим } 16S_{ABC}^2 = (AB+BC+AC)^2 \cdot (AB+AC-BC)^2 \cdot$$

$$\cdot (AB+BC-AC)^2 \cdot (AC+BC-AB)^2 \text{ (из формулы Герона)}$$

$$\text{Откуда } 16 \cdot 90^2 = ((AB+BC)^2 - BC^2) (BC^2 - (AB-BC)^2)$$

$$= (720 - 144 + 2AB \cdot BC) (144 - 720 + 2AB \cdot BC) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 90^2 = (360 - 72 + AB \cdot BC) \cdot (72 - 360 + AB \cdot BC) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 180^2 = (AB \cdot BC + 288) \cdot (AB \cdot BC - 288) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 180^2 = AB^2 \cdot BC^2 - 288^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 180^2 + 288^2 = (AB \cdot BC)^2 = 9^2 \cdot (20^2 + 32^2) =$$

$$= 9^2 \cdot 4^2 \cdot (5^2 + 8^2) = 36^2 \cdot (25 + 64) = 36^2 \cdot 89 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB \cdot BC = 36\sqrt{89} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AB - BC)^2 = 720 - 2 \cdot 36\sqrt{89} \Rightarrow |AB - BC| = \sqrt{720 - 72\sqrt{89}}$$

$$= 6 \cdot \sqrt{20 - 2\sqrt{89}}$$

$$(AB + BC)^2 = 720 + 2 \cdot 36\sqrt{89} \Rightarrow AB + BC = \sqrt{720 + 72\sqrt{89}}$$

$$= 6 \cdot \sqrt{20 + 2\sqrt{89}}$$

$$\text{Откуда } |AB^2 - BC^2| = 36 \cdot 2 \cdot \sqrt{100 - 89} = 72\sqrt{11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB^2 = 72 \cdot \frac{10 + \sqrt{11}}{2} = 360 + 36\sqrt{11}$$

$$BC^2 = 72 \cdot \frac{10 - \sqrt{11}}{2} = 360 - 36\sqrt{11}$$

(или наоборот)

$$\text{Откуда } 4BB_1^2 = 2BC^2 + 720 + 72\sqrt{11} - 360 + 36\sqrt{11} =$$

$$= 2BC^2 + 360 + 108\sqrt{11}$$

$$4CC_1^2 = 2BC^2 + 360 - 108\sqrt{11} - 360 - 36\sqrt{11} =$$

$$= 2BC^2 + 360 - 108\sqrt{11}$$

(стр. 2/3)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(или наоборот).

$$\text{Откуда } DB_1^2 = 72 + \cancel{10} + 27\sqrt{11}$$

$$CC_1^2 = 72 + 90 - 27\sqrt{11}$$

(или наоборот).

(или наоборот). (далее $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 \rightarrow$ считается руками)

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 18 \cdot \sqrt{162^2 - (27\sqrt{11})^2} \quad (\text{почти досчитавшись})$$

(ответ).

(ср. 3/3)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$9 + \frac{9}{k^2} > d^2 \Rightarrow \frac{32}{11} < \frac{4}{k^2} \Rightarrow \frac{4}{k^2} > \frac{32}{11}$$

$$99 + \frac{99}{k^2} > 32 = \frac{4}{k^2} \quad (\text{уст.})$$

$$12k^2d - k^2d^2 - 32k^2 + 4 > 0$$

$$12d - d^2 - 32 + \frac{4}{k^2} > 0$$

$$d^2 - 12d + 32 - \frac{4}{k^2} < 0$$

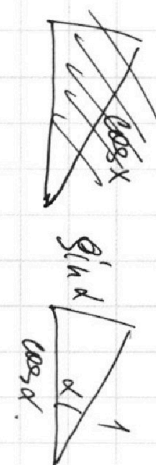
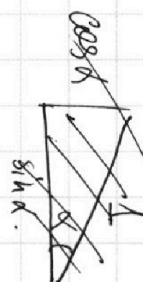
$$\frac{D}{4} = 36 - \left(32 - \frac{4}{k^2}\right) = 4 + \frac{4}{k^2} \Rightarrow 6 - 2\sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} < d < 6 + 2\sqrt{1 + \frac{1}{k^2}}$$

$$9 + \frac{9}{k^2} > 6 - 2\sqrt{1 + \frac{1}{k^2}}$$

$$9t^2 > 6 - 2t$$

$$9t^2 + 2t - 6 > 0$$

$$\frac{D}{4} = 1 + 54 = 55 \Rightarrow t >$$



$$\sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) = \cos x$$

$$\sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\frac{\pi}{2} - x$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{\pi}{2} - x \in \left(\frac{0}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x \in (-3\pi; 2\pi)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3,3 → соотв. точка.

~~$k(x=3,3)$~~ $y = k(x-d)$
 $y^2 + x^2 = 9$

$x^2 + k^2(x-d)^2 = 9$

$x^2 + k^2x^2 - 2k^2xd + k^2d^2 = 9$

$(k^2+1)x^2 - 2k^2xd + k^2d^2 - 9 = 0$

$\frac{D}{4} = (k^2d)^2 - (k^2+1)(k^2d^2 - 9) =$

$= k^4d^2 - k^4d^2 + 9k^2 - k^2d^2 + 9 =$

$= 9k^2 + 9 > k^2d^2$
 $9 + \frac{9}{k^2} > d^2$

$(x-6)^2 + k^2(x-d)^2 = 4$

$x^2 - 12x + 36 + k^2x^2 - 2k^2xd + k^2d^2 = 0$

$x^2(1+k^2) - 2x(6+k^2d) + (k^2d^2 + 36) = 0$

$\frac{D}{4} = (6+k^2d)^2 - (1+k^2)(k^2d^2 + 36) =$

$= 36 + k^4d^2 + 12k^2d - k^2d^2 - 36 - k^4d^2 - 36k^2 =$

$= 12k^2d - 36k^2 - 36 > 0$

$k^2d > 32k^2 + 36$

$9 + \frac{9}{k^2} > d > 32 + \frac{36}{k^2} \rightarrow \text{нельзя}$

$= 14k^2d - 32k^2 + 4 > 0$

$14k^2d > 32k^2 - 4 \Rightarrow d > \frac{32}{14} - \frac{4}{14k^2}$