



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a = 2^{\alpha_a} \cdot 3^{\beta_a} \cdot 5^{\gamma_a} \cdot k_a$
 $b = 2^{\alpha_b} \cdot 3^{\beta_b} \cdot 5^{\gamma_b} \cdot k_b$
 $c = 2^{\alpha_c} \cdot 3^{\beta_c} \cdot 5^{\gamma_c} \cdot k_c$

Где $\alpha_a, \beta_a, \gamma_a, k_a, \alpha_b, \beta_b, \gamma_b, k_b, \alpha_c, \beta_c, \gamma_c, k_c$ - ~~натур~~ целые неотриц. числа

Заметим, что ~~k_a, k_b и k_c не равны нулю, т.к.~~

И k_a, k_b, k_c не кратны 2, 3 и 5
Т.к. a, b и c натуральные числа,
то k_a, k_b и k_c не равны нулю

Тогда из условия следует, что:

$$1) \begin{cases} \alpha_a + \alpha_b \geq 7 \\ \alpha_b + \alpha_c \geq 13 \\ \alpha_c + \alpha_a \geq 14 \end{cases} \Rightarrow \alpha_a + \alpha_b + \alpha_c \geq \frac{7+13+14}{2} = 17$$

$$2) \begin{cases} \beta_a + \beta_b \geq 11 \\ \beta_b + \beta_c \geq 15 \\ \beta_c + \beta_a \geq 17 \end{cases} \Rightarrow \beta_a + \beta_b + \beta_c \geq \frac{11+15+17}{2} = 21.5$$

Т.к. $\beta_a, \beta_b, \beta_c$ - целые, то

$$\beta_a + \beta_b + \beta_c \geq 22$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3) \begin{cases} x_a + x_b \geq 14 \\ x_b + x_c \geq 18 \\ x_c + x_d \geq 43 \end{cases} \Rightarrow x_a + x_b + x_c \geq x_a + x_c \geq 43$$

В 1) равенство достигается при $a = 4$,
 $b = 3$, $c = 10$

В 3) равенство достигается, например, при
 $x_a = 20$, $x_c = 23$, $x_b = 0$

В 2) равенство достигается, например, при
 $a = 7$, $b = 5$, $c = 10$

$$\text{Тогда } abc = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot 2^{a+b+c} \cdot 3^{b+c} \cdot 5^{a+b+c}$$

$$\geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

$$\text{Пример: } a = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^{20}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^5$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{23}$$

$$\text{Ответ: } abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

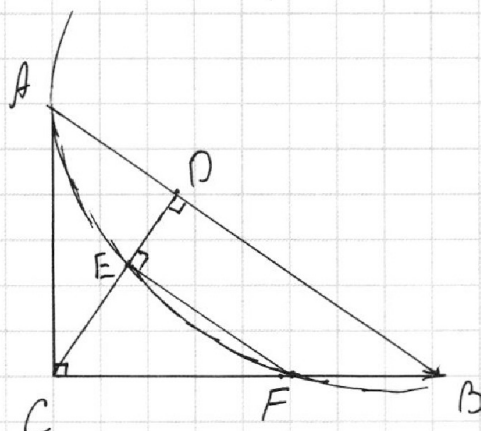
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $S_{ABC} = a$

$S_{CEF} = b$

$S_{ACD} = c$, $S_{CDB} = d$

$$\frac{AB}{BD} = 1,3 \Rightarrow BD = \frac{AB}{1,3} \Rightarrow AD = AB - BD = 0,3 \frac{AB}{1,3}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{AD}{AB} = \frac{0,3}{1,3} \Rightarrow c = \frac{0,3}{1,3} a$$

$$\frac{d}{a} = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{1,3} \Rightarrow d = \frac{a}{1,3}$$

Т.к. $EF \parallel AB$, то $\frac{b}{d} = \left(\frac{CE}{CD}\right)^2 \Rightarrow b = \frac{a}{1,3} \cdot \left(\frac{CE}{CD}\right)^2$

$\Downarrow$
 $\triangle CEF \sim \triangle CDB$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arccos \left(\sin x \right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{3\pi}{2} + x \in \left[0; 5\pi \right]$$

$$x \in \overset{\parallel}{\vee} \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi \right]$$

$$\text{При } x \in \left(-\frac{3\pi}{2}; 2\pi \right)$$

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \sin x$$

$$\text{При } x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} \right]$$

$$5 \arccos \left(\cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right) = 5 \arccos \left(\cos \left(x + \frac{3\pi}{2} \right) \right) =$$
$$= 5 \left(x + \frac{3\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\overset{\parallel}{\vee} x = -\frac{3\pi}{2}$$

$$\text{При } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$$

$$5 \arccos \left(\cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right) = 5 \left(\pi - \arccos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right) =$$
$$= 5\pi - \frac{\pi}{2} + x = \frac{3\pi}{2} + 5x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & \frac{5\pi}{2} + \frac{5\pi}{2} - x - \frac{3\pi}{2} + x \\ & \frac{5\pi}{2} - x - \frac{3\pi}{2} + x \\ & \frac{5\pi}{2} - x - \frac{3\pi}{2} + x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 5\pi \arccos\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + 5\pi \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \\ & = 5\pi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \frac{5\pi}{2} - 5\pi x \end{aligned}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5\pi x + \frac{3\pi}{2} + x \quad 6\pi \frac{\pi}{2} \quad x \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{При } x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$5\pi \arccos\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = 5\pi x - \frac{5\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi x - 5\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} + x \quad 4\pi \frac{\pi}{2} \quad x \frac{\pi}{2}$$

$$\text{При } x \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$$

$$\begin{aligned} & 5\pi \arccos\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + 5\pi \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \\ & = 5\pi \arccos\left(\cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)\right) + \frac{25\pi}{2} - 5\pi x \end{aligned}$$

$$\frac{25\pi}{2} - 5\pi x + \frac{3\pi}{2} + x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} 6x \leq 22\pi \leq 11\pi \\ \quad \quad \quad \pi \\ x \leq 11\pi \\ \quad \quad \quad 6 \end{array}$$

$$\text{Пр } x \in \left(\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right]$$

$$\cos \arccos \left(\cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right) \leq \cos \arccos \left(\cos \left(x - \frac{5\pi}{2} \right) \right) \leq$$

$$\leq \cos x - \frac{25\pi}{2}$$

$$\cos x - \frac{25\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{2} + x$$

$$4x \leq 28\pi \leq 14\pi$$

$$x \leq \frac{7\pi}{2}$$

$$\text{Отв: } x \in \left\{ -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2} \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

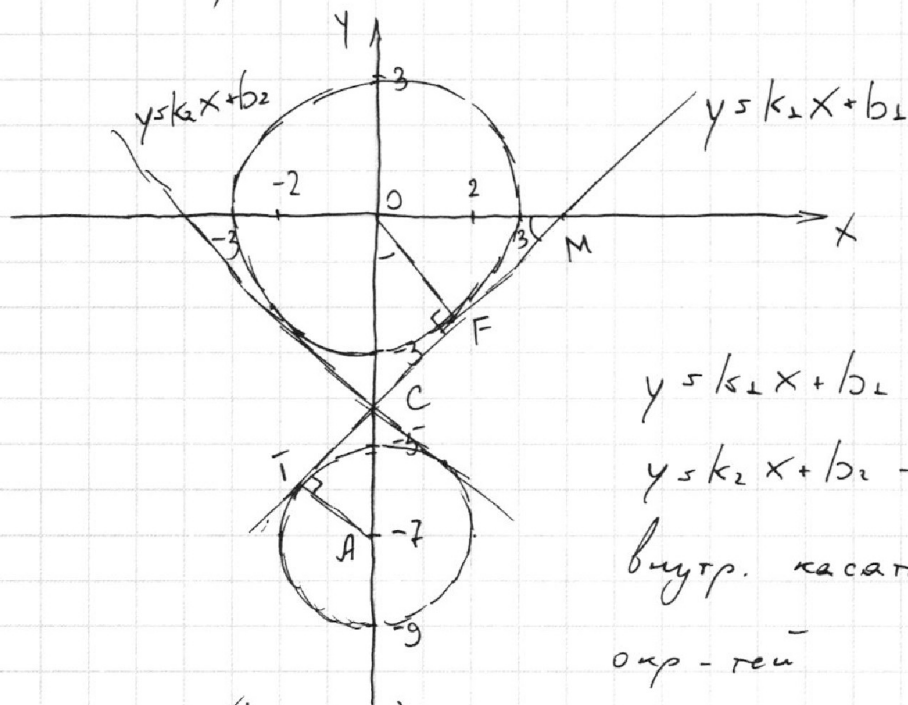
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3ay + 7b \\ \begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \end{cases}$$



$y = k_1x + b_1$ и
 $y = k_2x + b_2$ — общие
внутр. касательные
окр-тей

При $a \in (k_2; k_1)$ можно подобрать b
такое, что мы получим 4 точки пересечения

C — точка пересечения касательных

В силу симметрии $C \in OY$ (симметрия отн.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

оси OY)

A - центр окр-ти $(x+7)^2 + y^2 = 4$

T и F - пересечения кас. $y = k_1 x + b_1$

с окр-тями A и O соот-но

В силу подобия $\triangle ACT$ и $\triangle OCF$:

$$\frac{OC}{CA} = \frac{OF}{AT} = \frac{3}{2}$$

$$OC + CA = OA = 7 \Rightarrow OC = OA \cdot \frac{3}{5} = \frac{21}{5} = 4,2$$

Тогда $C(0; -4,2)$

$$b_1 = b_2 = -4,2$$

M - пересечение TF и OX

Из правоуг. $\triangle$ -ка MOC :

$$MO \cdot OC = OF^2$$

$$MO = \frac{OF^2}{OC} = \frac{9}{\frac{21}{5}} = \frac{9 \cdot 5}{21} = \frac{3 \cdot 5}{7} = \frac{15}{7}$$

Тогда $M\left(\frac{15}{7}; 0\right)$

$$CF \cdot FM = OF^2$$

$$CF^2 = OC^2 - OF^2$$

$$OM^2 = OF^2 + FM^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$OM^2 = OF^2 + \left(\frac{OF^2}{CF}\right)^2 = OF^2 + \left(\frac{OF^2}{\sqrt{OC^2 - OF^2}}\right)^2 = 9 + \left(\frac{9}{\sqrt{\left(\frac{21}{5}\right)^2 - 9}}\right)^2$$

$$= 9 + \left(\frac{9 \cdot 5}{\sqrt{21^2 - 9 \cdot 25}}\right)^2 = 9 + \left(\frac{9 \cdot 5}{6\sqrt{6}}\right)^2 = 9 + \frac{81 \cdot 25}{36 \cdot 6} =$$

$$= 9 + \frac{3 \cdot 25}{2^3} = 9 + \frac{8 + 3 \cdot 25}{8} = \frac{147}{8}$$

$$k_1 \cdot OM = \sqrt{\frac{147}{8}}$$

$$M \in \left(\sqrt{\frac{147}{8}}; 0\right)$$

$$k_1 \cdot \sqrt{\frac{147}{8}} = -b_1 = 4,2 = \frac{21}{5}$$

$$k_1 = \frac{21}{5} \cdot \sqrt{\frac{8}{147}} = \frac{21}{5 \cdot 7} \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{\sqrt{24}}{5}$$

В силу симметрии отн. оси OY :

$$k_2 = -\frac{\sqrt{24}}{5}$$

$$a \in \left(-\frac{\sqrt{24}}{5}; \frac{\sqrt{24}}{5}\right)$$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\frac{\sqrt{24}}{5}; \frac{\sqrt{24}}{5}\right) \quad \left(a \in \left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}; \frac{2\sqrt{6}}{5}\right)\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_7^4 6x - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x} 343 - 4$$

$$= \frac{3}{2} \log_{6x} 7 - 4$$

$$\begin{cases} 6x > 0 \\ 6x \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_7^4 6x - \frac{2}{\log_7 6x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 6x} - 4 \quad | \cdot \log_7 6x$$

~~6x \neq 1~~

$$\log_7^5 6x + 4 \log_7 6x - \frac{7}{2} = 0$$

$$2 \log_7^5 6x + 8 \log_7 6x - 7 = 0$$

$$\begin{aligned} \log_7^4 y + 6 \log_7 y &= \log_7 \cdot (7^5) - 4 \\ &= \frac{5}{2} \log_7 7 - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 y} - 4 \quad | \cdot 2 \log_7 y$$

$$2 \log_7^5 y + 8 \log_7 y + 7 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7^* 6x = t$$

$$\log_7^* y = k$$

$$\begin{cases} 2t^5 + 8t - 7 = 0 \\ 2k^5 + 8k + 7 = 0 \end{cases}$$

Заметим, что обе ф-ции возрастающие
⇓

Имеют максимум 1 корень

Т.к. в условии сказано, что равенства
выполняются, то этот корень существует

Если при $t = a$: $2a^5 + 8a - 7 = 0$, то
заметим, что при $k = -a$: $-2a^5 - 8a + 7 =$
 $= -(2a^5 + 8a - 7) = 0$

$$\log_7^* 6x = t - \log_7^* y = \log_7^* \frac{1}{y}$$

$$6x = \frac{1}{y} \Rightarrow xy = \frac{1}{6}$$

Ответ: $xy = \frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

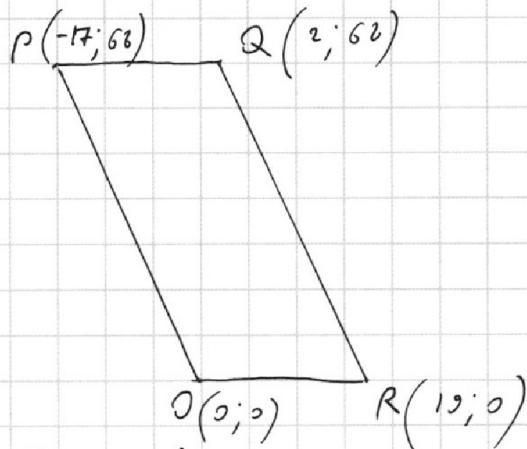


$$OR: y \leq 0$$

$$PQ: y = 68$$

$$OP: y \leq -\frac{68}{17}x$$

$$QR: y \leq -\frac{68}{17}(x-19)$$



Т.к. обе точки внутри пар-ма:

$$\begin{cases} y_1 \leq 68 \\ y_1 \leq -\frac{68}{17}(x_1-19) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 \geq 0 \\ y_1 \geq -\frac{68}{17}x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 \leq 68 \\ y_2 \leq -\frac{68}{17}(x_2-19) \\ y_2 \geq 0 \\ y_2 \geq -\frac{68}{17}x_2 \end{cases}$$

$$y_2 - y_1 \geq -\frac{68}{17}x_2 - \left(-\frac{68}{17}(x_1-19) \right) = -\frac{68}{17}(x_2-x_1) + 68 -$$
$$- \frac{68}{17} \cdot 19$$

$$y_2 - y_1 \geq -68$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y_2 - y_1 \leq -\frac{68}{17} (x_2 - 19) + \frac{68}{17} x_1 \leq -\frac{68}{17} (x_2 - x_1) + \frac{68}{17} \cdot 19$$

$$y_2 - y_1 \leq 68$$

$$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 \leq$$



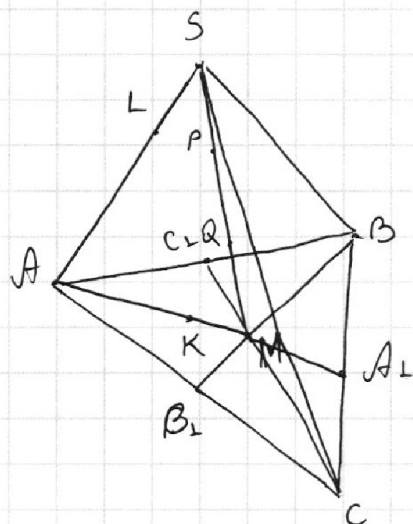
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

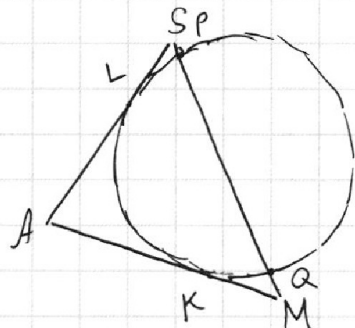
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Рассмотрим плоскость ASM и сечение шара -
-окр-ть $PQKL$



$AL = AK$, как касательные

$$\begin{aligned} MQ \cdot MP &= MK^2 \\ SP \cdot SQ &= SL^2 \end{aligned}$$

$$MP = MQ + PQ$$

$$SQ = SP + PQ$$

Т.к. $SP = MQ$, то

$$MK^2 = MQ (MQ + PQ) = SP (SP + PQ) = SL^2$$

$$MK = SL$$

$$MA = SA = 10$$

Рассмотрим $\triangle ABC$:



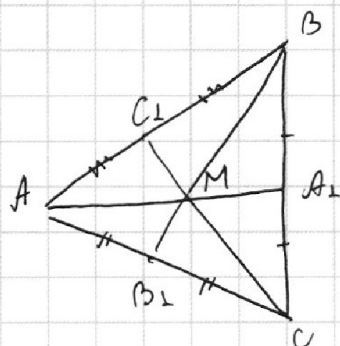
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$MA_1 = AM = 5$$

$$AA_1 = MA_1 + AM = 15$$

$$BA_1 = A_1C = 5$$

$\triangle BMC$ мед. равна по высоте
и гипотенузе, т.е. $\angle BMC = 90^\circ$

$$\angle CMB_1 = \angle C_1MB = \angle CMB_1 = 90^\circ$$

$$BM = \frac{2}{3} BB_1 \quad CM = \frac{2}{3} CC_1$$

$$BM \cdot CM = 2S_{BMC}$$

$$S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{3} = 20 \left(S_{BMC} = S_{ABC} \cdot \frac{MA_1}{AA_1} = S_{ABC} \cdot \frac{5}{15} \right)$$

$$BM \cdot CM = 40$$

$$BB_1 \cdot CC_1 \cdot AA_1 = 10 \cdot 9 \cdot 15 = 1350$$

$$= 15 \cdot 40 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 15 \cdot 10 \cdot 9 = 1350$$

a) Итого: $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 1350$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin x = \cos \frac{3\pi}{2} + x$$

$$2c - 2b = 7$$

$$2c + 2b = 13$$

$$2c = 20$$

$$c = 10$$

$$b = 3$$

$$a = 4$$

$$-2\pi; -\pi$$

$$3\alpha + 2\beta = 90$$

$$\cos \cos + \sin \sin$$

$$5 \cos \cos \left(\cos \frac{\pi}{2} - x \right)$$

$$5 \left(1 - \frac{\pi}{2} + x \right)$$

$$AC^2 = CF \cdot CB$$

$$\beta c - \beta b = 6$$

$$\beta c + \beta b = 15$$

$$CD^2 = AC \cdot CB$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{CF}{AC}$$

$$- \cos x = 5$$

$$CF \cdot FB$$

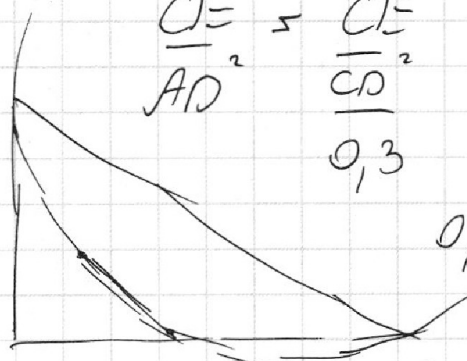
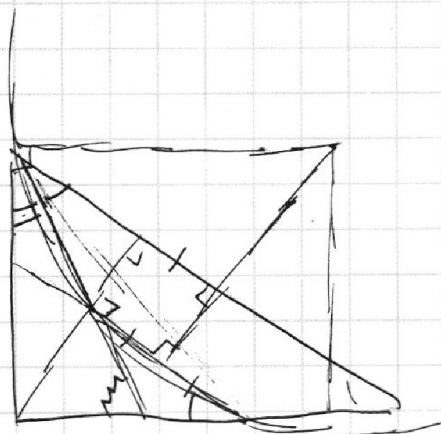
$$AD^2$$

$$\left(\frac{CF}{AD} \right)^2$$

$$\frac{CF^2}{AD^2} = \frac{CF^2}{CD^2}$$

$$0,3$$

$$0,3 = \frac{AD^2}{CD^2}$$



$$CF = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$5 \cdot \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$



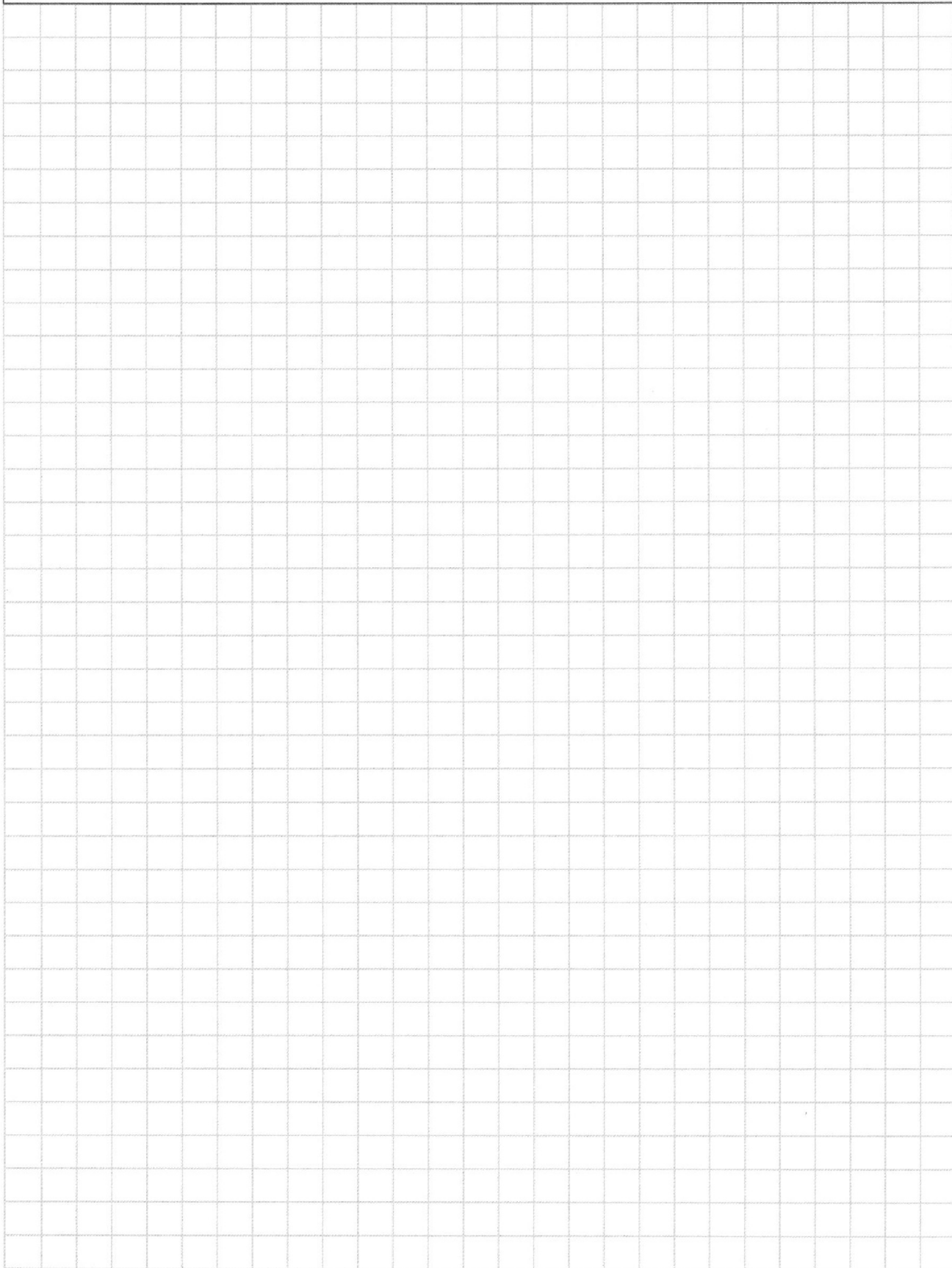
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$B \perp M$$

$$BM \cdot CM = 1,5^2 \cdot AA_1^2$$

$$AA_1 = 15$$

$$AK = AL$$

$$\begin{array}{r} \times 15 \\ 9 \\ \hline 1350 \end{array}$$

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= 60 \\ S_{AA_1BC} &= 10 \\ AL &= AK \end{aligned}$$

$$SP = MQ$$

$$\odot 45$$

$$MK^2 = SL^2$$

$$MK = SL$$

$$AM = SA = BC$$

$$\begin{aligned} R \cdot VA &= 1,5^2 \cdot 0,5^2 \\ R - x^2 &= R - x^2 \end{aligned}$$

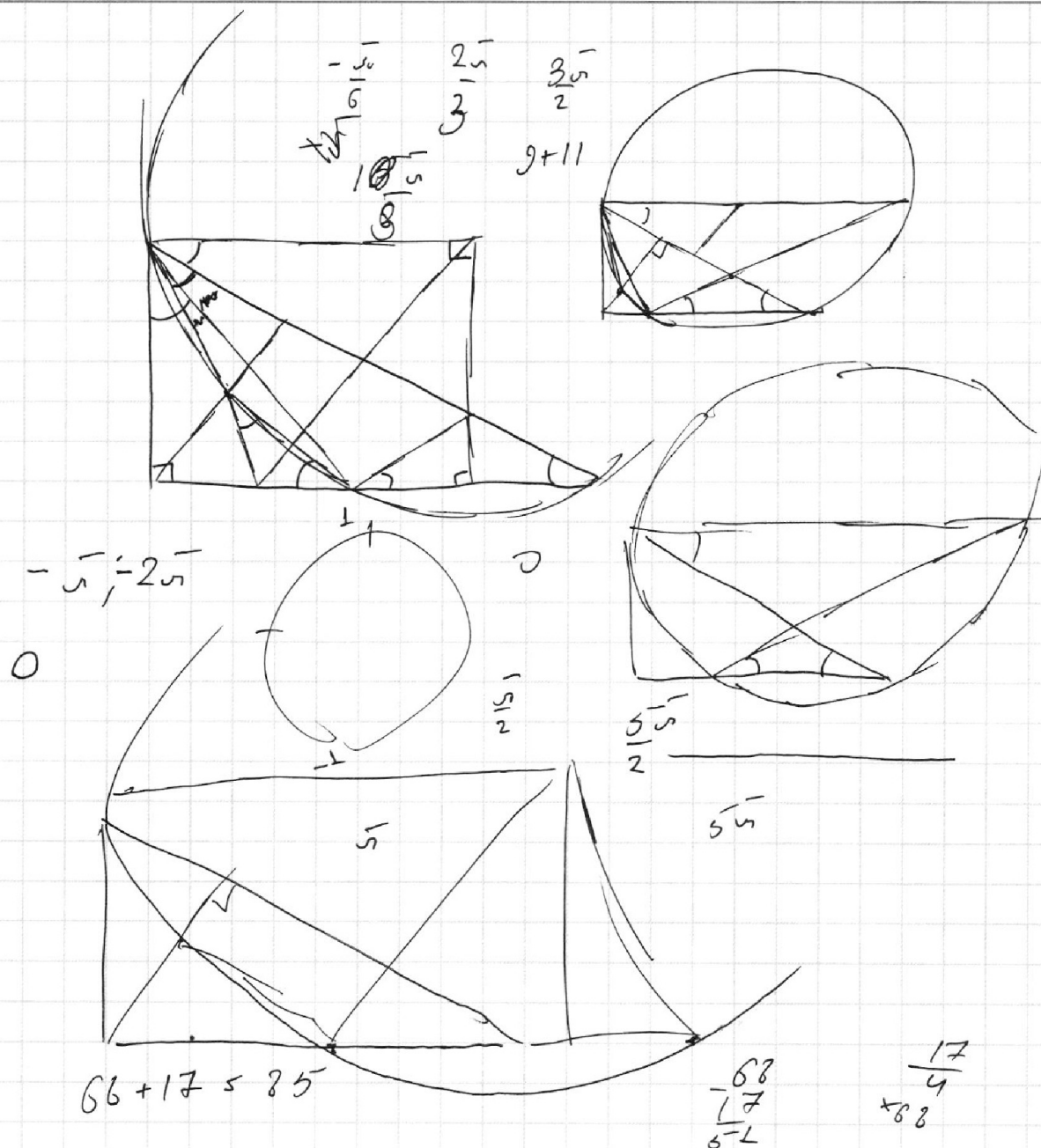
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y_2 - y_1 \approx 1$$

$$(R-x)(R+x) =$$

$$= R^2 - x^2 \approx AC^2$$

$$R-x \approx \frac{AC}{R+x}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{x}$

$$\arccos \left(\cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right) =$$

$$= \arccos \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$-\sqrt{9 - x_0^2} + \frac{x_0}{\sqrt{9 - x_0^2}} (x - x_0)$$

$$9 - \frac{81 \cdot 5^{-2}}{21^2}$$

$$= 9 \cdot \frac{(21-15)(21+15)}{21^2}$$

$$-\frac{(9 - x_0^2) - x_0^2}{\sqrt{9 - x_0^2}} = -4,2$$

$$81 = 9 \cdot \frac{6 \cdot 36}{21^2}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{9}{4,2} = \sqrt{9 - x_0^2}$$

$$\begin{array}{r} 4,2 \\ \times 4,2 \\ \hline 168 \\ 1764 \end{array}$$

$$x_0 = \pm \frac{6\sqrt{6}}{7}$$

$$\sin \frac{\sqrt{5}}{6}$$

$$x_0^2 = 9 - \left(\frac{9}{4,2}\right)^2 = 9 - \frac{81}{17,64}$$

$$5 \cos \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\begin{array}{r} \times 1764 \\ 2528 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0100 \\ - 2056 \\ \hline 10440 \\ - 8820 \\ \hline 16200 \\ - 15676 \\ \hline 5240 \\ - 1764 \\ \hline 4760 \\ - 3528 \\ \hline 12320 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 1764 \\ 4 \\ \hline 7056 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 1764 \\ 5 \\ \hline 6820 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 17640 \\ 1764 \\ \hline 15876 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x} 343 - 4$$

$$\left(\log_{6x} 7\right)^4 - 2\log_{6x} 7 = \frac{3}{2} \log_{6x} 343 - 4$$

$$\boxed{\begin{matrix} 6x > 0 \\ 6x \neq 1 \end{matrix}}$$

$$7^3 \times \frac{49}{7} = 343$$

$$\log_{6x} 7 = t$$

$$7 = 6x^t$$

$$\frac{1}{t^4} - 2t = \frac{3}{2}t - 4$$

$$7 = 8^{*k} y^k$$

$$-1 \quad -2 + 1 - 2$$

$$7t^5 - 8t^4 - 2 = 0 \quad t = k$$

$$7t^4(t-1) \quad 10t^4 + 8 = 0$$

$$t^4 = \frac{8}{10}$$

$$y > 0$$

$$y \neq 1$$

$$\log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_y 7^5 - 4$$

$$t = -k$$

$$\log_y 7 = k$$

$$2 + 12k^5 = 5k^5 - 8k^4$$

$$7k^5 + 8k^4 + 2 = 0 = 7(-k^5) - 8(-k^4) - 2$$

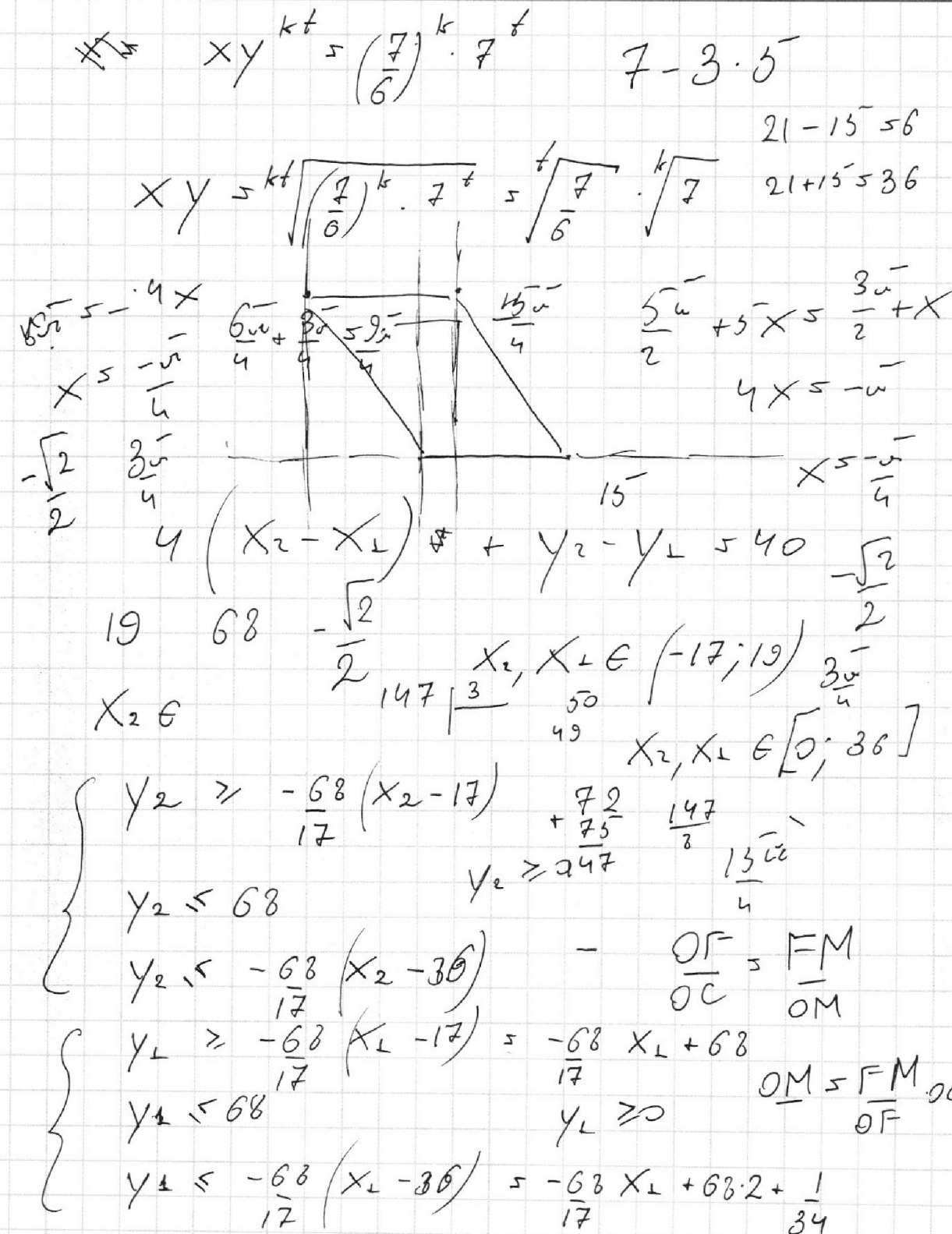
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

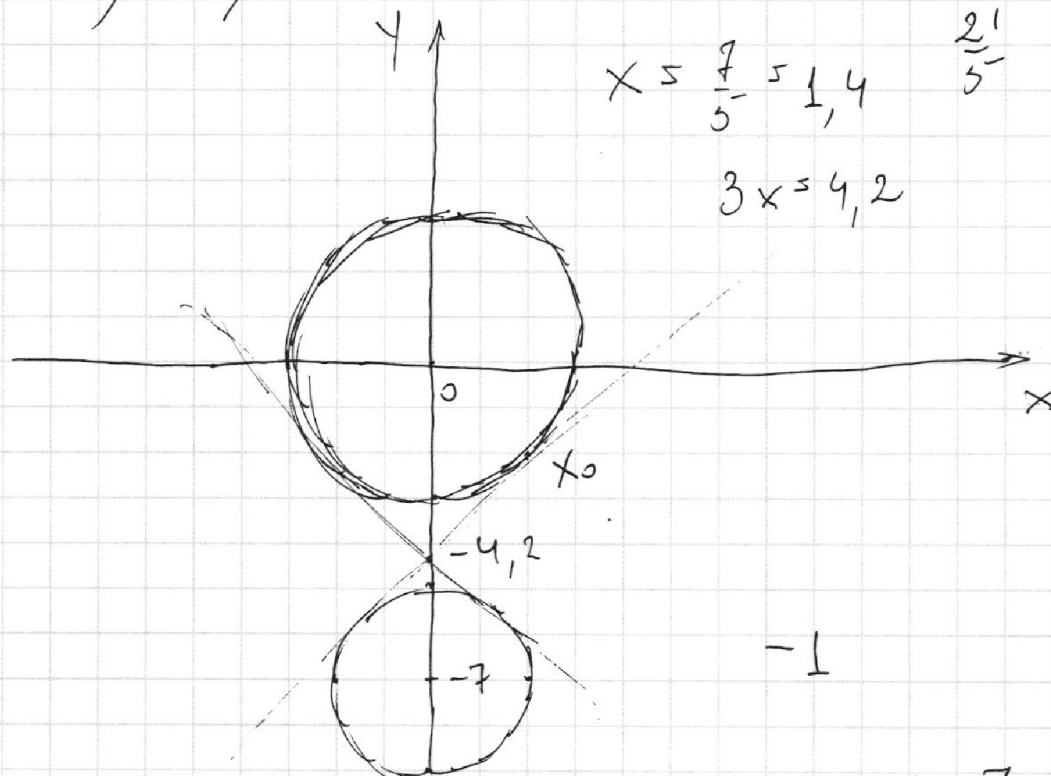
$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

$$(x+7)^2 + y^2 = 4$$

$$7 = 2x + 3x$$

$$x = \frac{7}{5} = 1,4$$

$$3x = 4,2$$



-1

$$1 \quad 1 + b - 7$$

$$y = -\sqrt{9-x^2}$$
$$f(x)' = \frac{2x}{2\sqrt{9-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab : 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{-14}$$

$$bc : \beta_c - \beta_b \geq 6 \quad \beta_b + \beta_c \geq 15 \quad 2\beta_c \geq 21 \quad \beta_c = 11 \quad \beta_a = 6 \quad \beta_b = 4$$

$$a = 2^{\alpha_a} \cdot 3^{\beta_a} \cdot 5^{\gamma_a} \cdot k_a$$

$$b = 2^{\alpha_b} \cdot 3^{\beta_b} \cdot 5^{\gamma_b} \cdot k_b$$

$$c = 2^{\alpha_c} \cdot 3^{\beta_c} \cdot 5^{\gamma_c} \cdot k_c$$

$$\alpha_a + \alpha_b \geq 7$$

$$\alpha_b + \alpha_c \geq 13$$

$$\alpha_a + \alpha_c \geq 14$$

$$\alpha_a + \alpha_b + \alpha_c \geq \frac{7+13+14}{2} = 17$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ + 15 \\ \hline 43 \end{array} \quad 21,5$$

$$\beta_c = 11$$

$$\beta_b = 4$$

$$5 \arccos(\sin x) = 3\pi + x$$

$$\sin x =$$

$$= \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$3\pi + x \in [0; \pi]$$

$$x \in [-3\pi; -2\pi]$$

$$x - \frac{\pi}{2} \in [-3,5\pi; -2,5\pi]$$

$$[-2,5\pi; -3,5\pi]$$