



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $ac = k_3 \cdot 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$

$bc = 2^{14} \cdot 3^{25} \cdot 5^{13} \cdot k_2$

$ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{35} \cdot k_1$, где $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$.

Тогда

$ab:bc = ab^2c = k$

$ab \cdot bc = k_1 \cdot k_2 \cdot 2^{20} \cdot 3^{34} \cdot 5^{24} = ac \cdot b^2$.

$ac \cdot b^2 \geq ac \neq 1$

$ac:5^{28} \rightarrow ab^2c:5^{28}$

Тогда $k_1 k_2 = k_4 \cdot 5^4$, $k_4 \in \mathbb{N}$.

$abc = \sqrt{a^2 b^2 c^2} = \sqrt{ab \cdot bc \cdot ac} = \sqrt{k_1 k_2 k_3 \cdot 2^{36} \cdot 3^{53} \cdot 5^{52}} =$

$= 2^{18} \cdot 5^{26} \cdot \sqrt{3^{53} \cdot k_1 k_2 k_3} = \{ k_1 k_2 = k_4 \cdot 5^4$

$= 2^{18} \cdot 5^{26} \cdot 5^2 \cdot \sqrt{3^{53} k_3 k_4} = \{ \text{Заметим, что если } a_1 \in \mathbb{N},$

$a_1^2:3^{53}$, то $a_1:3^{30}$, т.к.

квадрат имеет четные степени во всех числах.

Тогда пусть $k_3 k_4 = 3 k_5$, $k_5 \in \mathbb{N}$.

$= 2^{18} \cdot 5^{28} \cdot 3^{30} \cdot \sqrt{k_5}$

$\sqrt{k_5} \geq 1$. Пример при $k_5 = 1$ существует, это:

$abc = 2^{18} \cdot 5^{28} \cdot 3^{30}$

$a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{13}$

$b = 2^2 \cdot 3^5$

$c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{15}$

Все условия выполняются.

Ответ: $2^{18} \cdot 5^{28} \cdot 3^{30}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{S_{CAD}}{S_{CEF}} = \frac{AD^2}{CE^2}, \text{ т.к. } \triangle CAD \sim \triangle FCE -$$

$$\text{по } \angle CEF = \angle CDA \text{ и } \angle CAD = \angle FCE = 90^\circ - \angle CBD.$$

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB} \quad (\text{т.к. } \triangle ADC \sim \triangle CDB).$$

$$(\text{по 2 углам } \angle CDA = \angle CDB \text{ и } \angle CAD = \angle CBD).$$

$$\left(\frac{CD}{AD} = \frac{DB}{CD} \right)$$

$$\text{тогда } CD = \sqrt{\frac{2}{7} AB \cdot \frac{5}{7} AB} = \frac{\sqrt{10}}{7} AB$$

$$CE = \frac{1}{2} CD = \frac{\sqrt{10}}{14} AB$$

$$\frac{AD^2}{CE^2} = \frac{\left(\frac{2}{7} AB\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{10}}{14} AB\right)^2} = \frac{2 \cdot 4}{2 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 2}{5} = \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$$

$$\text{Ответ: } \frac{8}{5}.$$

$$BD = \frac{5}{7} AB.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

УЗ.

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$10 \arccos(\sin \frac{\pi}{2} \cos(\frac{\pi}{2} - x)) = 9\pi - 2x$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (\frac{\pi}{2} - x) \in [0; \pi] \\ 10(\frac{\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} (\frac{\pi}{2} - x) \bmod 2\pi \in [\pi; 2\pi] \\ 10(x - \frac{\pi}{2}) = 9\pi - 2x \end{array} \right. \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (\frac{\pi}{2} - x) \bmod 2\pi \in [0; \pi] \\ 5\pi - 9\pi = 8x \end{array} \right. \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (\frac{\pi}{2} - x) \bmod 2\pi \in \{0; \pi\} \cup [\pi; 2\pi] \\ 12x = 54\pi \end{array} \right. \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} (\frac{\pi}{2} - x) \bmod 2\pi \in [0; \pi] \\ x = -\frac{1}{2}\pi \text{ } \pi \in [0; \pi] \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} (\frac{\pi}{2} - x) \bmod 2\pi \in [\pi; 2\pi] \\ x = \frac{7}{6}\pi \text{ } (\frac{\pi}{2} - \frac{7}{6}\pi) \bmod 2\pi \in [\pi; 2\pi] \end{array} \right. \end{array} \right]$$

Ответ: $\frac{7}{6}\pi; -\frac{1}{2}\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

В силу симметрии рисунка

Пусть $O_1(0,0)$, $O_2(-9,0)$,

кр-я окр-стей

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

$$x^2 + (y+9)^2 = 81 = 9^2$$

Решим для B:

$$\Gamma \cap B = T$$

$$B \cap \omega = P \quad B \cap (y=0) = S$$

$$B \cap (y=0) \quad B \cap (x=0) = Q$$

В силу гомотетичности окружностей

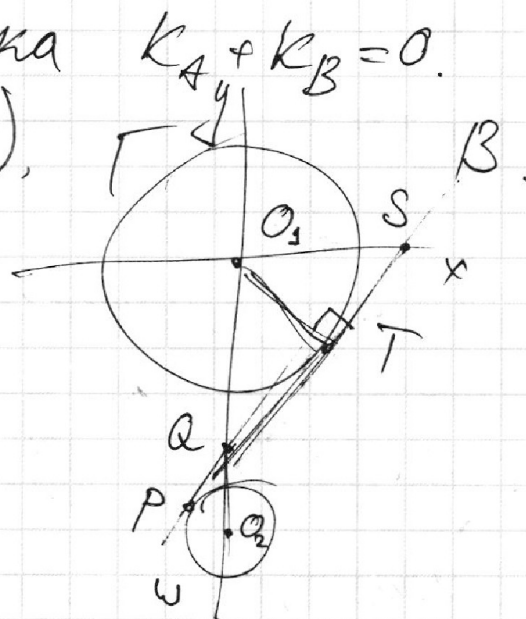
$\Gamma \rightarrow \omega$ с центром в Q и коэф-том $\frac{2}{5}$

$$\frac{O_1Q}{O_2Q} = \frac{5}{2}, \quad O_1T = 5, \quad \angle O_1TQ = 90^\circ, \quad O_1Q = \frac{5}{7} \cdot 9 =$$

$$= \frac{45}{7}. \quad QT = \sqrt{QO_1^2 - O_1T^2} = \sqrt{\left(\frac{45}{7}\right)^2 - 5^2} = 5\sqrt{\left(\frac{9}{7}\right)^2 - 1} =$$

$$= \frac{5}{7} \sqrt{9^2 - 7^2} = \frac{5}{7} \cdot \sqrt{2 \cdot 16} = \frac{20}{7} \sqrt{2}$$

$$\frac{O_1T}{QT} = \frac{O_1S}{O_1Q} = \frac{5}{\frac{20}{7} \sqrt{2}} = \frac{7}{4\sqrt{2}} \quad k_B = \frac{4\sqrt{2}}{7}.$$



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Уч.

Геом. смысл конструкции:

$$5x + 6ay - b = 0 - \text{прямая. (1)}$$

4 пары решений тогда, когда она пересекает
конструкцию ур-я 2 в 4 точках. т.е.
пересекает обе окр-сти в 2 точках.

(уравнение 2 представлено на коорд.
плоскости в виде 2 окр-стей:

$$\Gamma((0;0), 5) \text{ и } \omega((0;-9), 2). \text{ т.е.}$$

окр-сти не пересекаются.

Теперь заметим, что число
решений зависит в т.ч.

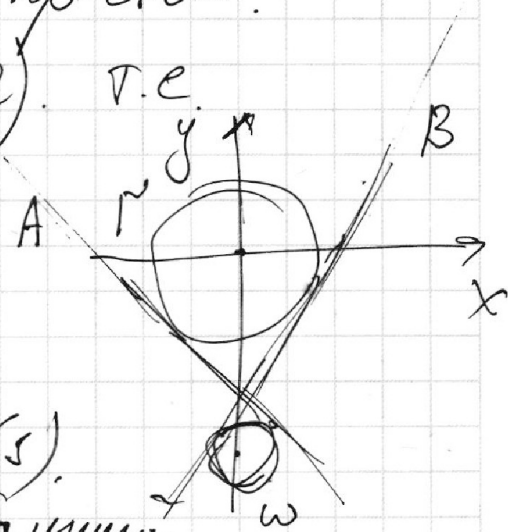
и от наклона прямой (1).

если она имеет наклон, больший

прямой B или меньший прямой A,

то мы можем выбрать b так, чтобы
пересечь обе окружности.

т.е. $\begin{cases} -\frac{5}{6a} < k_A < 0 \\ -\frac{5}{6a} > k_B > 0 \end{cases}$ найдем k_A и k_B .





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$k_B = \frac{4\sqrt{2}}{7} < -\frac{5}{6a}$$

$$a < \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 4\sqrt{2}}$$

соотв. при k_A ~~$a > -\frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 4\sqrt{2}}$~~ $-\frac{4\sqrt{2}}{7} > -\frac{5}{6a}$

$$\frac{4\sqrt{2}}{7} < -\frac{5}{6a} \rightarrow a < 0$$

$$\frac{4\sqrt{2}a}{7} > -\frac{5}{6}$$

$$a > \frac{-5 \cdot 7}{6 \cdot 4\sqrt{2}} = -\frac{35}{24\sqrt{2}}$$

соотв. при k_A ~~$-\frac{4\sqrt{2}}{7} > -\frac{5}{6a}$~~ $a > 0$

$$\frac{4\sqrt{2}a}{7} < \frac{5}{6}$$

$$a < \frac{35}{24\sqrt{2}}$$

$$a \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}}\right).$$

Ответ: $\nearrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x 3 \frac{1}{121} - 5 \quad \begin{matrix} x > 0 \\ x \neq 1 \end{matrix}$$

$$\frac{1}{\log_x^4 11} - 6 \log_x 11 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \log_x 11 - 5$$

$$\log 1 - 6 \log_x^5 11 = -\frac{2}{3} \log_x^5 11 - 5 \log_x^4 11$$

$$\frac{16}{3} \log_x^5 11 - 5 \log_x^4 11 - 1 = 0$$

$$\log_x 11 = t$$

$$16t^5 - 5 \cdot 3t^4 - 1 = 0$$

Очев. корень $t = 1$, делим на $(t - 1)$

проделаем аналогичные преобразования со втор.

$$0,5y = p$$

ур-ния:

$$\frac{1}{\log_p^4 11} + \log_p 11 = \frac{3}{-13} \log_p 11 - 5$$

$$\log_p 11 = q$$

$$1 + \log_p^5 11 = \frac{-3}{413} \log_p^5 11 - 5 \log_p^4 11$$

$$16q^5 - 15q^4 - 1 = 0$$

Получаем то же самое ур-е.

Очев. корень $q = 1$, делим на $(q - 1)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Реш-е не зависит от положения

$$POW(S, \Omega) = POW(M, \Omega) \quad (1)$$

$$POW(S, \Omega) =$$

$$= PS \cdot PQ = |(\vec{PQ} + \vec{SP})|$$

$$|\vec{SP}| = |\vec{PQ} + \vec{QM}| \cdot |\vec{QM}|,$$

но $QM = SP$, тогда

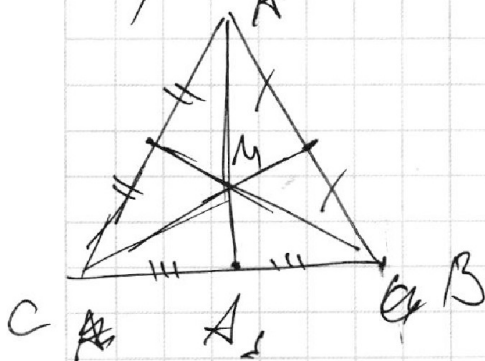
Доказано, также $AK^2 = AL^2 = POW(A, \Omega)$.

$$AK = AL, \quad SL^2 = KM^2 \quad (из (1)). \quad \text{тогда}$$

$$SL = KM, \quad AK = KL, \quad AS = AM.$$

$$AM = \frac{2}{3} AA_s, \quad AA_s = 30$$

а) Имеем $\triangle ABC$:

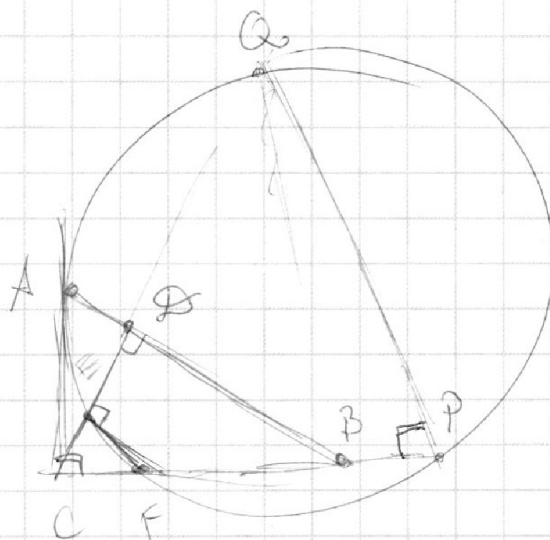


$$AA_s = 30$$

$$BC = 20$$

$$S_{ABC} = 180$$

$$P(A, BC) = 9 \cdot 2 = 18$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$0,5y = a$$

$$\log_{11}^4 a + \frac{1}{\log_{11} a} = \frac{3}{-13}$$

p

$$= \frac{-13}{3 \log_{11} a} - 5$$

$$\log_{11}^4 a + \frac{1}{\log_{11} a} =$$

$$11^p = a = 0,5y$$

$$p^5 + 1 = -\frac{13}{3} - 5p$$

$$3p^5 + 3 = -13 - 15p$$

$$3p^5 + 15p + 16 = 0$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{7}{6}\pi = -2 - \frac{2}{3}\pi$$

$$-3 \cdot 324 - 15 \cdot 2 + 16 = 0$$

$$x^2 + (y+y)^2 = 4 = 2^2$$

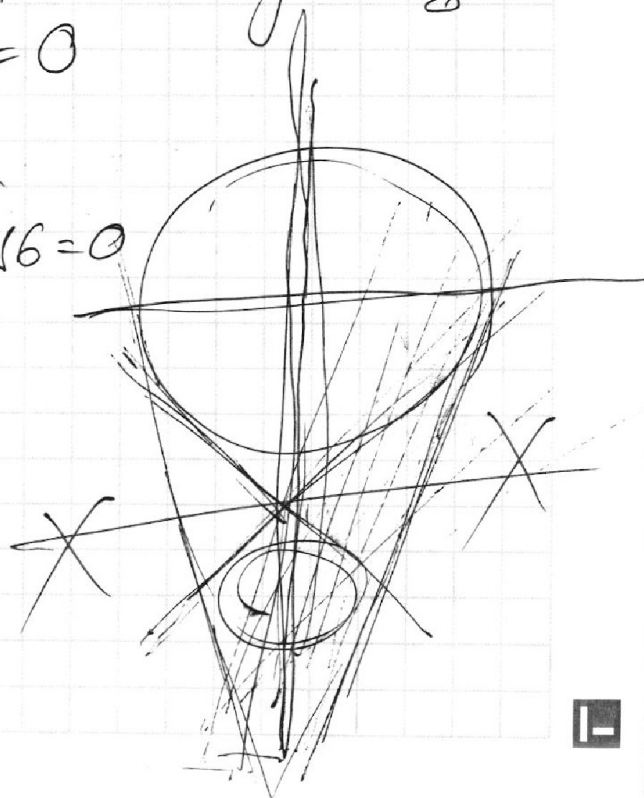
$$y = \frac{-5}{6a}x + \frac{6}{6a}$$

$$\log_a^k b^n =$$

$$= \frac{n}{k} \log_a b$$

$$y = \frac{11^p}{2}$$

$$xy = \frac{11^{p+t}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c \quad a^{\log_a b} = b$$

$b > 0$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x 3 \frac{1}{121} - 5 \quad x \neq 1$$

$$\log_{11}^4 x - 6 / \log_{11} x = \frac{\log_x \frac{1}{121}}{3} - 5$$

$$= -\frac{\log_x 121}{3} - 5$$

$$= -\frac{2 \log_x 11}{3} - 5 \quad \begin{matrix} x \neq 1 \\ x \neq 0 \end{matrix}$$

$$\log_{11}^4 x + 6 = -\frac{2}{3} \log_x^2 11 - 5 \log_x 11 \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$t^5 - 6 = -\frac{2}{3} t^2 - 5t$$

$$\log_{11}^4 x - 6 / \log_{11} x = -\frac{2}{3 \log_{11} x} - 5$$

$$t^5 - 6 = -\frac{2}{3} - 5t$$

$$3t^5 - 18 = -2 - 15t \quad 11^t = x$$

$$3t^5 + 15t + 16 = 0$$



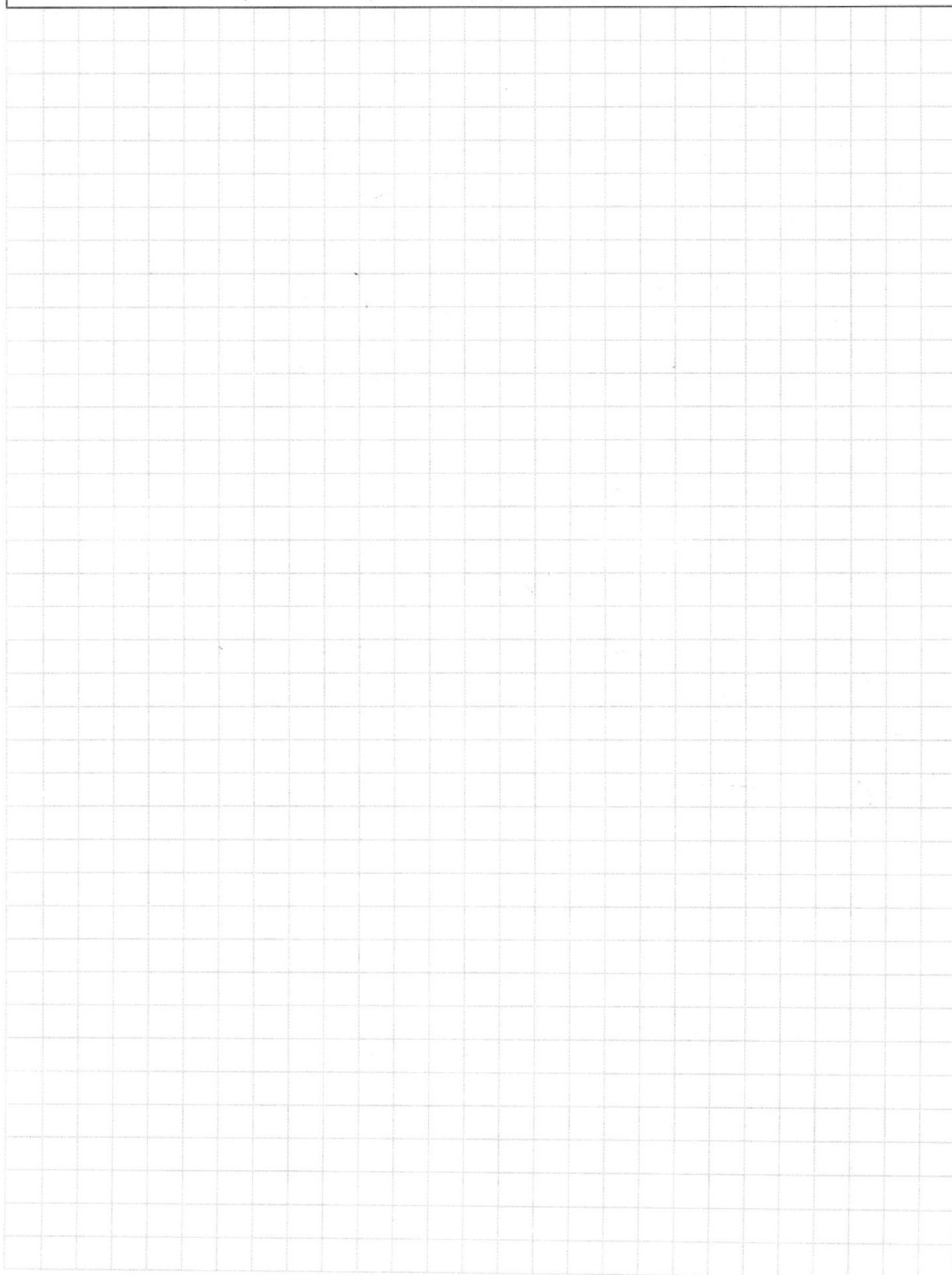
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





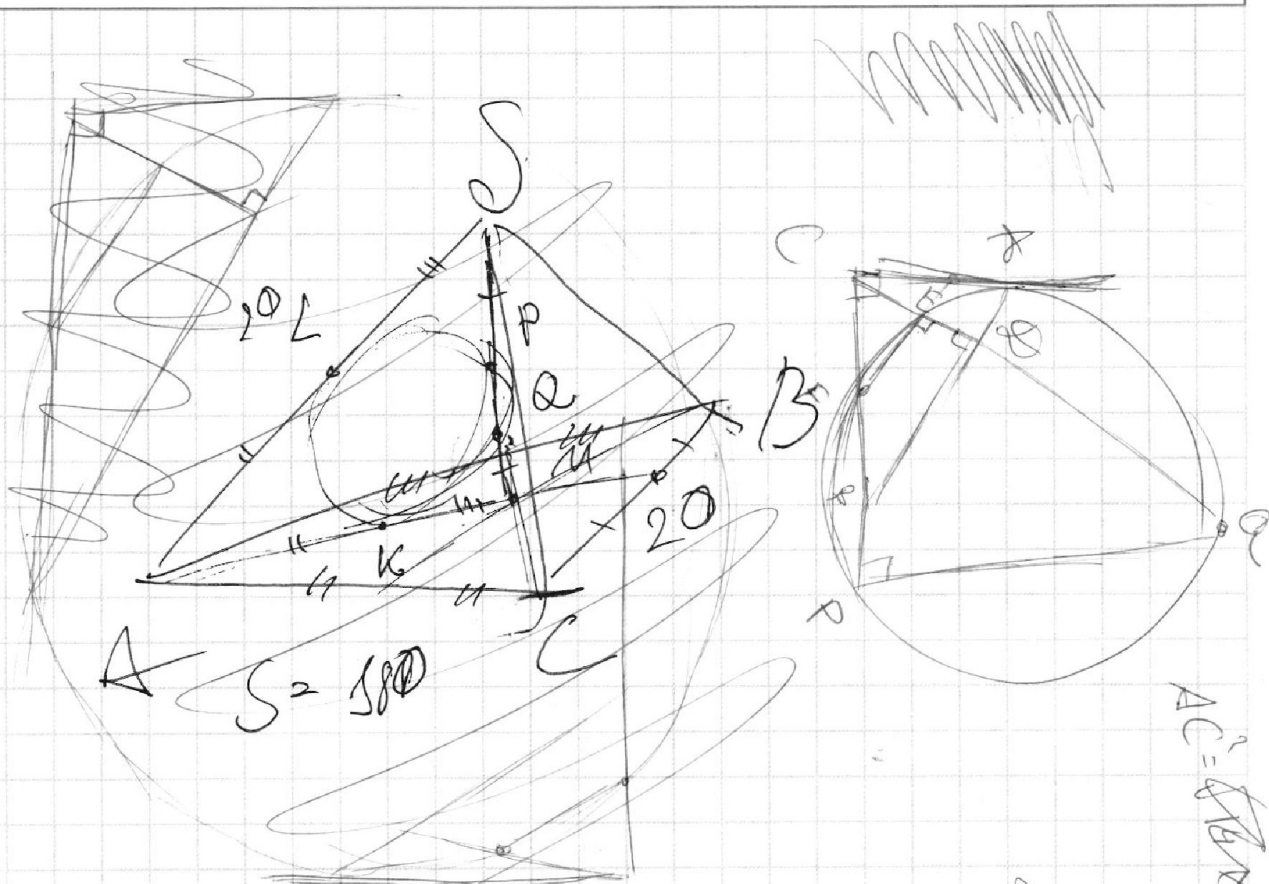
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AC^2 = 14x^2$$

$$CE/CF = \frac{\sqrt{14}x}{7x} = \sqrt{\frac{2}{7}} = \frac{CP}{CA}$$

$$CE \cdot CA = 14x^2$$

$$AC^2 = CF \cdot CP =$$

$$= CF \cdot CA \cdot \sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$14x^2 \cdot \sqrt{\frac{7}{2}} = CF \cdot CA$$

