



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



- ✖1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- ✖2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
- ✖3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
- ✖4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- ✖5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
- ✖ а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
- б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 01

ab: $2^9 3^{10} 5^{10}$
ac: $2^{14} 3^{13} 5^{13}$
abc $\rightarrow \min$
Пусть $a = 2^d 3^p 5^r$ ($d \leq 9; p \leq 10; r \leq 10$)
Тогда $b \geq 2^{9-d} 3^{10-p} 5^{10-r}$; $c \geq 2^{14-d} 3^{13-p} 5^{13-r}$
Т.е. $abc \geq 2^{23-d} 3^{23-p} 5^{23-r}$
 $2^{23-d} 3^{23-p} 5^{23-r} \rightarrow \min$
 $d \leq 9; p \leq 10; r \leq 10 \Rightarrow 2^{23-d} 3^{23-p} 5^{23-r} \geq 2^{14} 3^{13} 5^{13}$
(оценка достигается при $a = 2^9 3^{10} 5^{10}$; $b = 1$; $c = 2^5 3^3 5^3$)
Ответ: $2^{14} 3^{13} 5^{13}$

МФТИ

№ 01

ab: $2^9 3^{10} 5^{10}$
bc: $2^{14} 3^{13} 5^{13}$
ac: $2^{19} 3^{17} 5^{30}$
 $\Rightarrow abc: 2^{19} 3^{17} 5^{30}$
Оценка достигается при $b = 1$
Пусть d, p, r — степени входящих в a, b, c .
Тогда $\begin{cases} d+p \geq 9 \\ p+r \geq 14 \\ d+r \geq 19 \end{cases}$ (след, что нам вытекают из условий равенства, поэтому $d+p+r=21$). Тогда аналог. рассуждения для 3 и 5 получаем $abc \geq 2^{19} 3^{17} 5^{30}$ Ответ: $2^{19} 3^{17} 5^{30}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} 3) \text{ из } \triangle CEF \sim \triangle BAC \quad CF = CE \cdot \frac{1}{2} = FD &\Rightarrow \\ \Rightarrow CE = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{4} AB &\Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{BCA}} = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{3}{16}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N°3

$$\text{S arcsin}(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

~~5 arcsin~~

~~5 arcsin~~

~~5 arcsin~~

~~arcsin~~

~~5 arcsin~~

$$\text{S arcsin}(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

~~5 arcsin~~



$$\frac{\pi}{2} - x = x + \frac{\pi}{2}$$

~~arcsin~~

$$x + \frac{\pi}{2} \in [-5; 5] \Rightarrow x \in [-5 - \frac{\pi}{2}; 5 - \frac{\pi}{2}]$$

$$\sin(\text{S arcsin}(\cos x)) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$$

~~sin~~

$$\text{S arcsin}(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$1) x = \alpha + 2\pi k; \alpha \in [0; \pi]$$

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow \text{S arcsin}(\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} - \alpha = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = -\alpha$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5\alpha = x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\pi - 5\alpha = x \Rightarrow 2\pi - 5\alpha = \alpha + 2\pi k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\alpha = 2\pi - 2\pi k \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi k}{3} \Rightarrow x \in [-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$$

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi k}{3} \in [0; \pi] \Rightarrow k = 1, 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2) x = \beta + 2\pi n, \beta \in [\pi; 2\pi]$$

$$\cos x = \cos \beta \Rightarrow 5 \arcsin(\cos \beta) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - \beta)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\cancel{5\pi/2} \quad 5 \arcsin(\sin(\beta - \frac{3\pi}{2})) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5\beta - \frac{15\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5\beta - 8\pi = x = \beta + 2\pi n$$

$$4\beta = 2\pi + 2\pi n$$

$$\beta = 2\pi + \frac{\pi n}{2} \in [\pi; 2\pi] \Rightarrow n = -4; -3; -2; -1; 0$$

$$\cancel{x = -7\pi} \quad x = -7\pi; -4\frac{3}{4}\pi; -2\frac{1}{2}\pi; -\frac{\pi}{4}; 2\pi$$

$$\text{Ответ: } -3\pi; -\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; -7\pi; -\frac{19\pi}{4}; -\frac{5\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}; 2\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



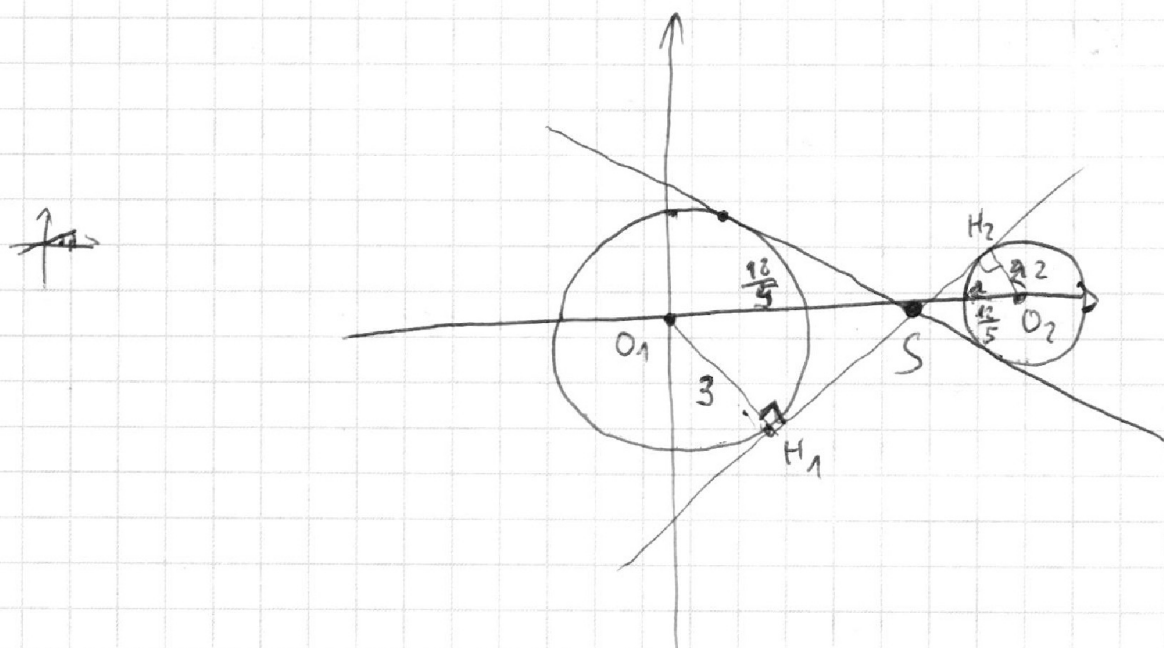
N=04

$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & (1) \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 & (2) \end{cases} \quad \text{— две окр.-ты}$$

(1) $O(0;0)$ $r=3$

(2) $O(6;0)$ $r=2$



$ax + 2y - 3b = 0$ — прямая $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$ при $a \neq 0$

Если $a=0$, то, очевидно, можно получить 4 р-та.

Рассмотрим общую внутреннюю касательную этим
двух окр.-тей (с пол-м. условием касат.)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если уменьшить угловой коэф. этой прямой, то она пересечёт окр-ти по 4-м точкам, а значит из любой прямой с таким наклоном можно получить ^{требуемую} параллельные переносом. Если же его увеличить или не менять, то в любом положении при параллельном переносе будет не более двух точек ~~касания~~ пересечения. Значит, при ~~какой~~ $a \leq 0$ $-\frac{a}{2} \leq K$, где K - угловой коэф. касательной. Аналогично, при $a \geq 0$ $-\frac{a}{2} \leq K$ (из симметрии относительно Ox), т.е. $\frac{a}{2} \leq K$

из геометрии из геометрии $K = \frac{5}{6}$ (подобие O_1H_1S и O_2H_2S , $O_1O_2=6$)

Т.е.

$$\begin{cases} a \leq 0 \\ \frac{a}{2} \geq -\frac{5}{6} \end{cases} \quad \begin{cases} a > 0 \\ \frac{a}{2} \leq \frac{5}{6} \end{cases}$$

Ответ: ~~$a \in (-\frac{5}{12}; \frac{5}{12})$~~ $a \in (-\frac{5}{12}; \frac{5}{12})$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Nº5

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

$$x > 0 \Rightarrow \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \frac{5}{2} \log_x 3 - 8$$

$$\log_3 x = t$$

$$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 8$$

$$t^5 + 8t + \frac{7}{2} = 0$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8$$

$$5y > 0 \Rightarrow \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \frac{11}{2} \log_{5y} 3 - 8$$

$$\log_3 5y = u$$

$$u^4 + \frac{2}{u} = \frac{11}{2u} - 8$$

$$u^5 + 8u - \frac{7}{2} = 0$$

$$t^5 + 8t + u^5 + 8u = 0$$

$$(u+t)(8+t^4+t^3u+t^2u^2+tu^3+u^4) = 0$$

$$\Downarrow$$
$$u = -t$$

$$\log_3 x = -\log_3 5y$$

$$\log_3 x = \log_3 \frac{1}{5y} \Rightarrow x = \frac{1}{5y} \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{5}$$



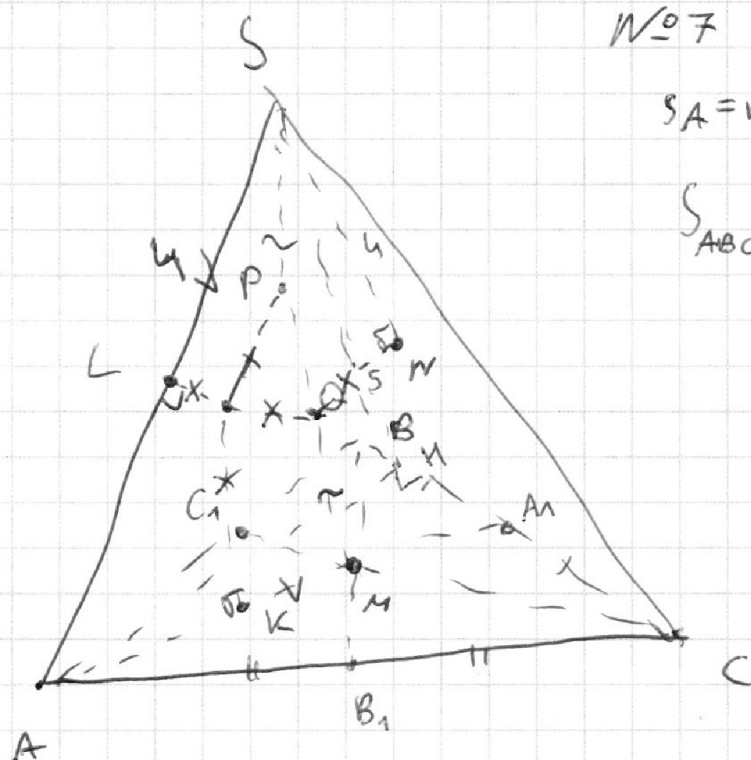
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

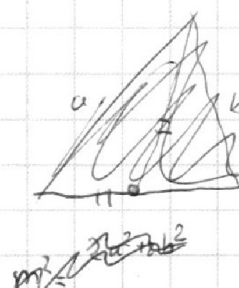
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 7

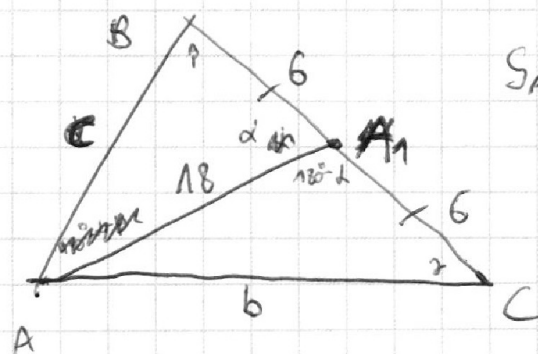
$$SA = BC = 12$$

$$S_{ABC} = 90$$



$$\begin{aligned} a) \quad & MQ \cdot MS = KM^2 \\ & SP \cdot SM = SL^2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad KM = SL \quad \Rightarrow \quad AS = AM \Rightarrow AM = 12 \Rightarrow AA_1 = 18$$

$AL = AK$ (отм. на с.)



$$S_{ABC} = 90$$

$$6 \cdot 18 \cdot \sin \alpha = 90 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{5}{12} \Rightarrow$$

$$\cos \alpha = \frac{11}{12}$$

$$S_{AA_1B} = \frac{1}{2} \cdot AA_1 \cdot AB \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 6 \cdot \frac{5}{12} = 45$$

$$m^2_{AB} = 36 + 36 - 2 \cdot 36 \cdot \frac{11}{12} = 36 - 66 = -30$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \alpha = \frac{45 \cdot 2}{6 \cdot 18} = \frac{5}{6} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6} \quad \left(S_{A_1B_1C_1} = \frac{90}{2} = \frac{6 \cdot 18 \cdot \sin \alpha}{2} \right)$$

по по m. кол.:

$$AB^2 = 324 + 36 \cdot 18 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} = 360 + 36\sqrt{11}$$

$$AC^2 = 360 + 36\sqrt{11}$$

по ф. медианы:

$$m_{AB}^2 = \frac{720 + 72\sqrt{11} + 288 - 360 + 36\sqrt{11}}{4} = 162 + 27\sqrt{11}$$

$$m_{AC}^2 = \frac{720 - 72\sqrt{11} + 288 + 360 - 36\sqrt{11}}{4} = 162 - 27\sqrt{11}$$

$$m_{BC}^2 m_{AB}^2 m_{AC}^2 = 18 (162^2 - 27^2 \cdot 11) \Rightarrow m_{BC} m_{AB} m_{AC} =$$

$$= \sqrt{18(162^2 - 27^2 \cdot 11)} = \sqrt{18 \cdot 18225} = 3\sqrt{36450}$$

$$\begin{array}{r} 162 \\ \times 162 \\ \hline 324 \\ 972 \\ \hline 26244 \end{array}$$

$$27^2 = 729$$

$$\begin{array}{r} 729 \\ \times 11 \\ \hline 729 \\ 729 \\ \hline 8019 \end{array}$$

$$= 3\sqrt{36450} = 30$$

$$= 3\sqrt{36450} = 15\sqrt{1458} =$$

$$\begin{array}{r} 36450 \overline{) 25} \\ \underline{25} \\ 114 \\ \underline{100} \\ 145 \\ \underline{125} \\ 200 \end{array}$$

$$= 15 \cdot 729$$

$$15 \cdot 27\sqrt{2} =$$

$$= 405\sqrt{2}$$

Ответ: $405\sqrt{2}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

