



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$ab: 2^9 3^{10} 5^{10}$$

$$\min abc - ?$$

$$bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13}$$

$$ac: 2^{19} 3^{18} 5^{30}$$

Чтобы минимизировать abc нужно его представить
в виде произведения $2^n \cdot 3^k \cdot 5^z$, $n, k, z \in \mathbb{N}$ и минимально
возможные.

$$! 5^z$$

$$ac: 5^{30} \Rightarrow abc: 5^{30} \Rightarrow z \geq 30$$

Заметим, что ~~$a = 5^{15}$~~ , $c = 5^{15}$, $b = 5^0$ если
степень 5 входящий в $a = 15$, в $c = 15$, в $b = 0$,
относительно кратности 5 включаются, $z = 30$ ($z \geq 30$)

$$\Rightarrow z = 30 (\min \text{возможный})$$

$$! 3^k$$

x — степень 3 входящий в a ; y — в b , z — в c

$$\begin{cases} x + y \geq 10 \\ y + z \geq 13 \\ x + z \geq 18 \end{cases}$$

$$2x + 2y + 2z \geq 10 + 13 + 18$$

$$x + y + z \geq 20,5$$

$$x, y, z \in \mathbb{Z} \Rightarrow x + y + z \geq 21$$

$$k = x + y + z$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

пример для $k=21$

$$x=7 \quad y=3 \quad z=11 \Rightarrow k=21 (\text{min возможный})$$

при этих x, y, z кратности относительно 3 выполняются
 $! 2^n$

x - степень входящие 2 в a , y - в b , z - в c

$$\begin{cases} x+y \geq 9 \\ y+z \geq 14 \\ x+z \geq 19 \end{cases} \quad \begin{aligned} 2x+2y+2z &\geq 42 \\ x+y+z &\geq 21 \end{aligned}$$

$$n = x+y+z$$

пример для $n=21$

$$x=7 \quad y=2 \quad z=12$$

при этих x, y, z кратности относительно 2 выполняются

$$\Rightarrow n=21 (\text{min возможный})$$

$$\text{min значение } abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$\text{Ответ: } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Delta CFT \sim \Delta CDB$$

$$\frac{2y + CT}{CT} = \frac{x}{y}$$

$$1 + \frac{2y}{CT} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{2y}{CT} = \frac{x-y}{y}$$

$$CT = \frac{2y^2}{x-y}$$

$$CB = \frac{y \cdot CT}{x-y} + 2y = \frac{2y^2 + 2xy - 2y^2}{x-y} = \frac{2xy}{x-y}$$

Th Теорема для ΔCDB

$$3x^2 + x^2 = \frac{4x^2y^2}{(x-y)^2}$$

$$4x^2 = \frac{4x^2y^2}{(x-y)^2} \Rightarrow (x-y)^2 = y^2$$

$$x > y \Rightarrow x - y = y \Rightarrow x = 2y \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{2}$$

$$S_{\Delta CFT} = \frac{1}{4} S_{\Delta ACB}$$

$$\frac{S_{\Delta CFE}}{S_{\Delta CFT}} = \frac{3y}{y} \text{ (общая высота)}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta CFE} = \frac{3}{4} S_{\Delta CFT}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta CFE} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} S_{\Delta ACB} \Rightarrow \frac{S_{\Delta ACB}}{S_{\Delta CFE}} = \frac{16}{3}$$

$$\text{Ответ: } \frac{16}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin(\sin(x + \frac{\pi}{2})) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin(x + \frac{\pi}{2})) = \frac{1}{5}(x + \frac{\pi}{2})$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{1}{5}(x + \frac{\pi}{2}))$$

$$x + \frac{\pi}{2} = \frac{1}{5}(x + \frac{\pi}{2})$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\sin(x + \frac{\pi}{2})) = \frac{1}{5}(x + \frac{\pi}{2})$$

$$\sin(\frac{1}{5}(x + \frac{\pi}{2})) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) - \sin(\frac{1}{5}(x + \frac{\pi}{2})) = 0$$

$$2 \sin(\frac{2}{5}(x + \frac{\pi}{2})) \cos(\frac{3}{5}(x + \frac{\pi}{2})) = 0$$

$$\sin(\frac{2}{5}(x + \frac{\pi}{2})) = 0$$

$$\frac{2}{5}(x + \frac{\pi}{2}) = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(\frac{3}{5}(x + \frac{\pi}{2})) = 0$$

$$\frac{3}{5}(x + \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x + \frac{\pi}{2} = 2,5 \pi n$$

$$x + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} + \frac{5}{3} \pi k$$

$$-5 \leq 5 \arcsin(\cos x) \leq 5$$

$$\Rightarrow -5 \leq x + \frac{\pi}{2} \leq 5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$-5 \leq 2,5\pi n \leq 5$$

$$-2 \leq \pi n \leq 2, n \in \mathbb{Z}$$

подходит только $n=0$

$$-5 \leq \frac{5\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k \leq 5$$

$$-5 \leq \frac{5\pi + 10\pi k}{6} \leq 5$$

$$-30 \leq 5\pi + 10\pi k \leq 30$$

$$-6 \leq \pi + 2\pi k \leq 6$$

подходит $k=-1; 0$

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$$

$$x + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} - \frac{5\pi}{3}$$

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$x = -\frac{4\pi}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

Ответ: $-\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ax + 2y - 3b = 0$$

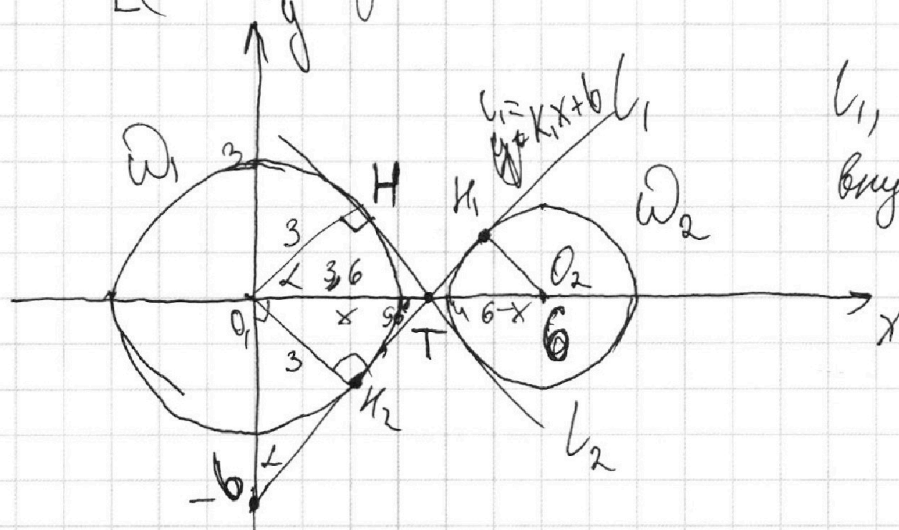
$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$$

$a - ?$ найдётся b и реш.

$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$$

$$x^2 + y^2 = 9 \quad \omega_1$$

$$(x - 6)^2 + y^2 = 4 \quad \omega_2$$



l_1, l_2 — общие
внутр. касательные

$$ax + 2y - 3b = 0$$

$$2y = -ax + 3b$$

$y = -\frac{a}{2}x + 1,5b$ — эта прямая должна пересекать

окружности в 4х точках, но так как

тогда Δ — прямой и $\omega = 2 \Rightarrow$ каждую

окружность прямая должна пересечь в 2х точках

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что мы всегда можем подобрать b :
прямая пересечёт Ω_1 в 2х точках.

Ω_2 будет пересечена в 2х точках, если
 $-\frac{a}{2} > \text{коор. } l_2$; $-\frac{a}{2} < \text{коор. } l_1$

Заметим, что l_1 симм. l_2 отн. Ox

Пусть $\angle KO_1T = \alpha$ (см. рис.)

$\angle KTO_1 = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle O_1TK_2 = 90^\circ - \alpha$ (из симметрии)

$\angle K_1TO_2 = \angle O_1TK_2 = 90^\circ - \alpha$ (верт.)

$\Rightarrow \triangle O_1KT \sim \triangle O_2K_1T$ (по 2 углам)

$$\Rightarrow \frac{O_1K}{O_2K_1} = \frac{O_1T}{O_2T}$$

пусть $O_1T = x$
 $O_2T = 6 - x$

$$\frac{3}{2} = \frac{x}{6-x}$$

$$18 - 3x = 2x$$

$$5x = 18$$

$$x = \frac{18}{5} = 3,6$$

$$l_1 = K_1x + b = 0$$

$$x = \frac{-b}{K_1} = 3,6$$

$$b = -3,6K_1$$

$$l_1 = K_1x - 3,6K_1$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{KT}{O_1K} = \frac{\sqrt{3,6^2 - 9}}{3} = K_1 \frac{\sqrt{3,6^2 - 9}}{3} - \frac{a}{2} \leq \frac{\sqrt{3,6^2 - 9}}{3}$$

Ответ: $-\frac{2(\sqrt{3,6^2 - 9})}{3} \leq \frac{2(\sqrt{3,6^2 - 9})}{3}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_3^4 x + 6 \frac{1}{\log_3 x} = 2,5 \log_x 3 - 8$$

$$\log_3^4 x + 6 \frac{1}{\log_3 x} = 2,5 \frac{1}{\log_3 x} - 8$$

$$\log_3^4 x + 3,5 \frac{1}{\log_3 x} - 8$$

$$t^4 + 3,5t - 8 = 0$$

$$f'(t) = 4t^3 + 3,5$$

$$6^3 = -3,5$$

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$

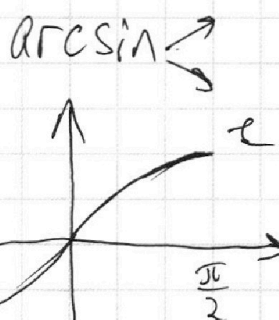
$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$



$$[-1; 1]$$

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$

$$-\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6}$$

$$y_{\text{max}} = \sqrt{9-x_0^2} + \sqrt{9-x_0^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{9-x_0^2}} (x-x_0)$$

$$-5 \leq \frac{10\pi+5}{6} \leq 5$$

$$-5 \leq \frac{10\pi+5}{6} \leq 5$$

$$-5 \leq \frac{10\pi+5}{6} \leq 5$$

$$-5 \leq \frac{10\pi+5}{6} \leq 5$$

$$-5 \leq \frac{10\pi+5}{6} \leq 5$$

$$-5 \leq \frac{10\pi+5}{6} \leq 5$$

$$-5 \leq \frac{10\pi+5}{6} \leq 5$$

$$-5 \leq \frac{10\pi+5}{6} \leq 5$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) - \sin \left(\frac{1}{5} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right) = 2 \cdot \sin \left(\frac{2}{5} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right) \cdot \cos \left(\frac{3}{5} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

$$\sin \left(\frac{2}{5} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right) = 0$$

$$\frac{2}{5} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \pi \cap \arcsin \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$\frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$2x + 2y - 36 = 0 \quad y = 9 - x^2 \quad \frac{3}{2}$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$x = -\frac{b}{K_1}$$

$$K_1 x_1 + b = 0$$

$$K_1 x = -6$$

$$x^2 - 12x + 36 = (x-6)(x-6) = x^2 - 12x + 36$$

$$(x-0)^2 + y^2 = 4$$

$$3\frac{3}{5} = 3,6$$

$$3 = \sqrt{3,6 \cdot K_2 T}$$

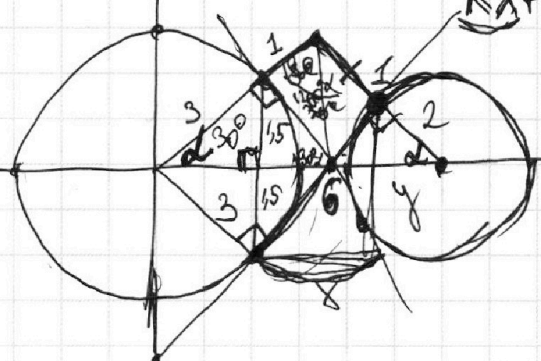
$g = 3, 6, 11, \dots$

$$x + \frac{a}{2} \cdot (x + 1,5a)$$

$$y_{\text{pac.}} = \sqrt{9 - x_0^2} + \frac{-x_0}{\sqrt{9 - x_0^2}}(x - x_0)$$

~~$$y_{\text{рас.}} = \frac{6 - x_1}{-x_1 + 12x}$$~~

$$|| = x_0^2 + k^2 x_0^2$$



$$ax + 2y - 3b = 0$$

$$2y = -ax + 3b - \frac{5b}{1}$$

$$y = -\frac{a}{2} \cdot x + 1,56 = 900 + 360 + 36 = 1296$$

12,96-9=

$$\approx 3.96$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$y = \sqrt{9 - x^2}$$

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$$

~~$36 - 1 = \sqrt{35}$~~

$$\gamma = \frac{-b}{K} = 3,6$$

$$-b = 3,6 \text{ K}$$

$$\sqrt{36-25} = \sqrt{11}$$

$$= 1296$$

$$y = \sqrt{-x^4 + 12x - 32}$$

$$y' = \frac{-2x+12}{2\sqrt{-x^2+12x-32}}$$

$$z = \frac{6-8}{\sqrt{-8^2+128-32}}$$

$$\frac{-x_0}{\sqrt{9x_0^2}} = \frac{6-x_1}{\sqrt{x_1^2 + 12x_1 - 32}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

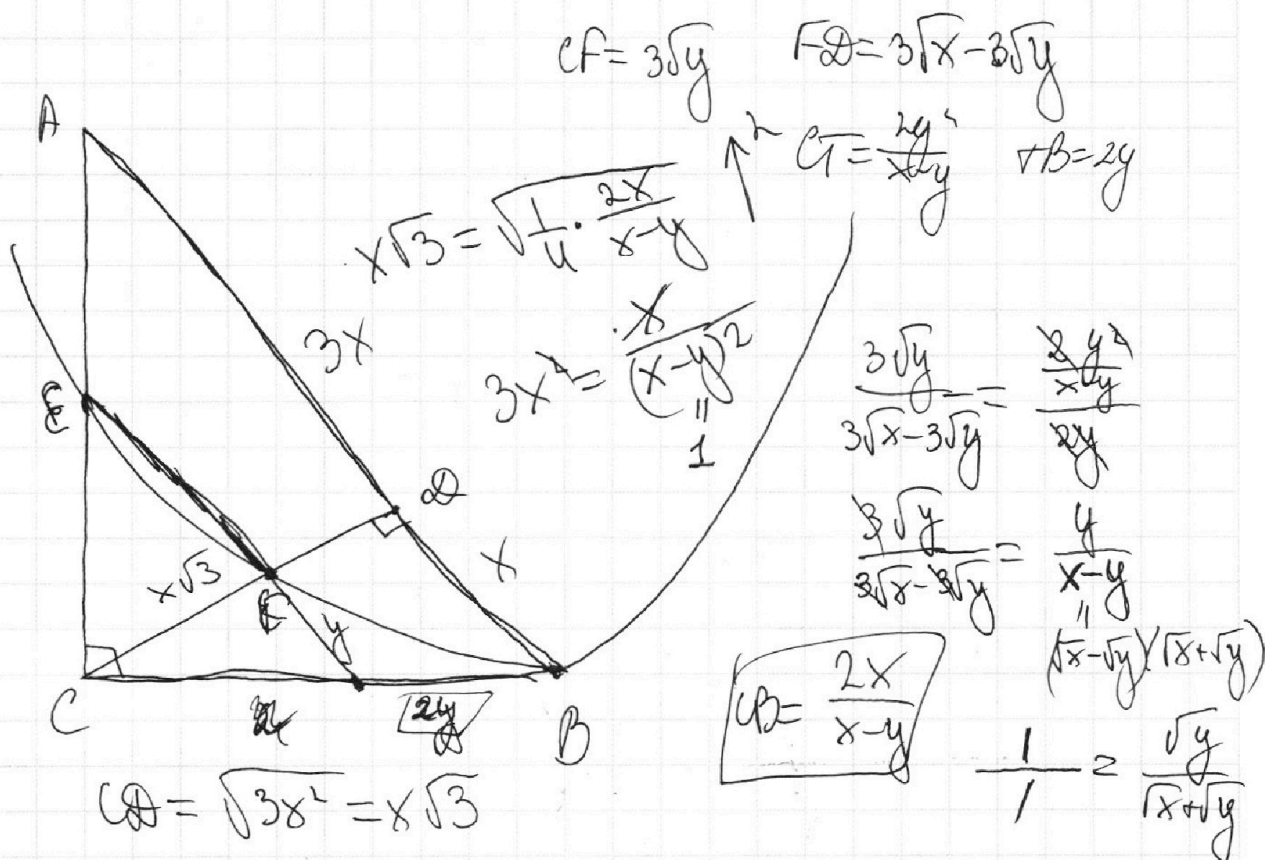
Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

[illegible]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\frac{4x^2}{(x-y)^2} = 3x^2 + 4x^2 - \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \quad CB = \frac{2y+2}{1} = \boxed{2y+2}$$

$$= \frac{-8\pi + 3\pi}{6} = \frac{-5\pi}{6} \quad CT = 2 \quad x=1$$

$$\frac{1}{(x-y)^2} \geq 1$$

$$(x-y)^2 = 1$$

$$\frac{2}{2y+2} = \frac{y}{y+1}$$

$x > y$

$$x - y = 1$$

$$x = y + 1$$

$$\frac{2y^2}{x-y} + 2y = \frac{2xy}{x-y}$$

$$CF_2 3\sqrt{y}$$

$$|CT = \frac{y}{x-y}$$

$$\frac{4y^2}{(x-y)^2} = 3y^2 + y^2$$

$$(x-y)^2 = 1$$

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{y^2}{(y^2+1)} = \frac{y^2+2y}{y^2}$$

$$r = 1 + \frac{2}{y} + \frac{1}{y^2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(\log_3 x)^4 + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{ОДЗ: } x > 0, x \neq 1$$

$$(\log_3 x)^4 + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \log_x 3 - 8 \quad \log_x 3 = t$$

$$t^4 + \frac{6}{t} = 2,5t - 8 \quad | \cdot t$$

$$t^5 - 2,5t^2 + 8t + 6 = 0 \quad \text{АА } t = -1 \quad -1 - 2,5 + 8 + 6 = 0$$

$$f'(t) = 5t^4 - 5t + 8 = 0 \quad \text{АА } 5t^4 + 16t + 12 = 0$$

$$5t(t^3 - \frac{1}{5}) + 8 > 0 \quad \text{АА } t = -1$$

$$(5t^4 - 5t)' = 20t^3 - 5 = 0$$

$$t^3 = \frac{1}{4} \quad \text{min}$$

$$t < 1$$

$$-1 - 2,5 - 8 + 6 < 0$$

$$t = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2^5} - 2,5 \cdot \frac{1}{4} - 4 + 6$$

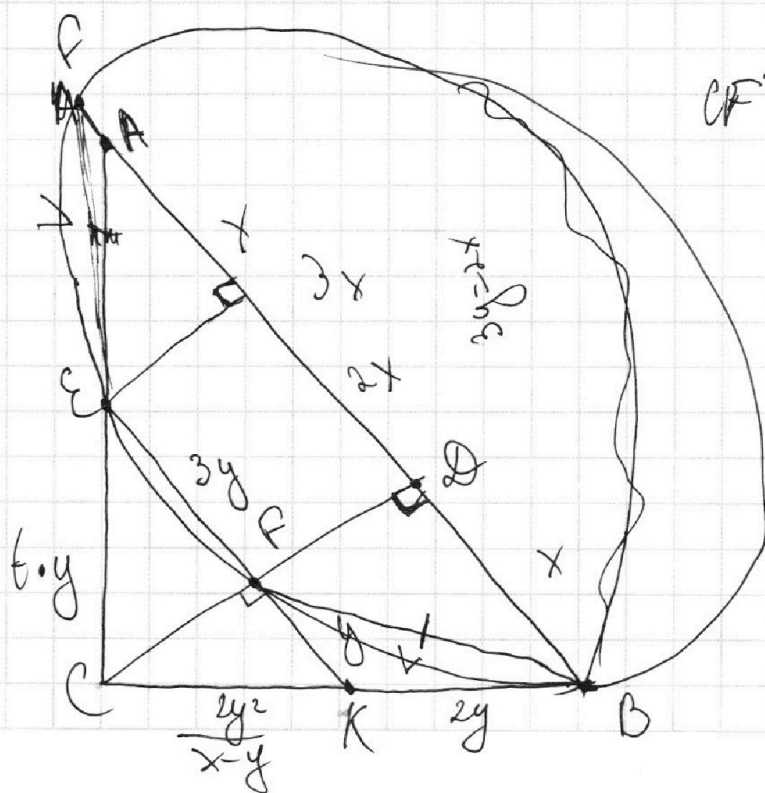
$$CF^2 = \frac{xy^4}{x^2y^2} - y^2 = \frac{xy^2}{x-y} + 2y = \frac{2xy}{x-y}$$

$$\frac{CK}{y} = \frac{CK + 2y}{x}$$

$$\frac{x}{y} = 1 + \frac{2y}{CK}$$

$$\frac{x-y}{y} = \frac{2y}{CK}$$

$$CK = \frac{2y^2}{x-y}$$



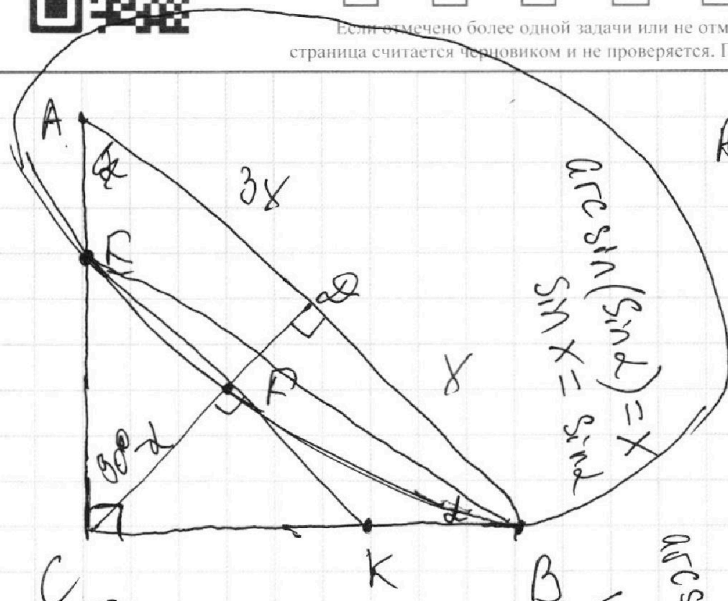
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



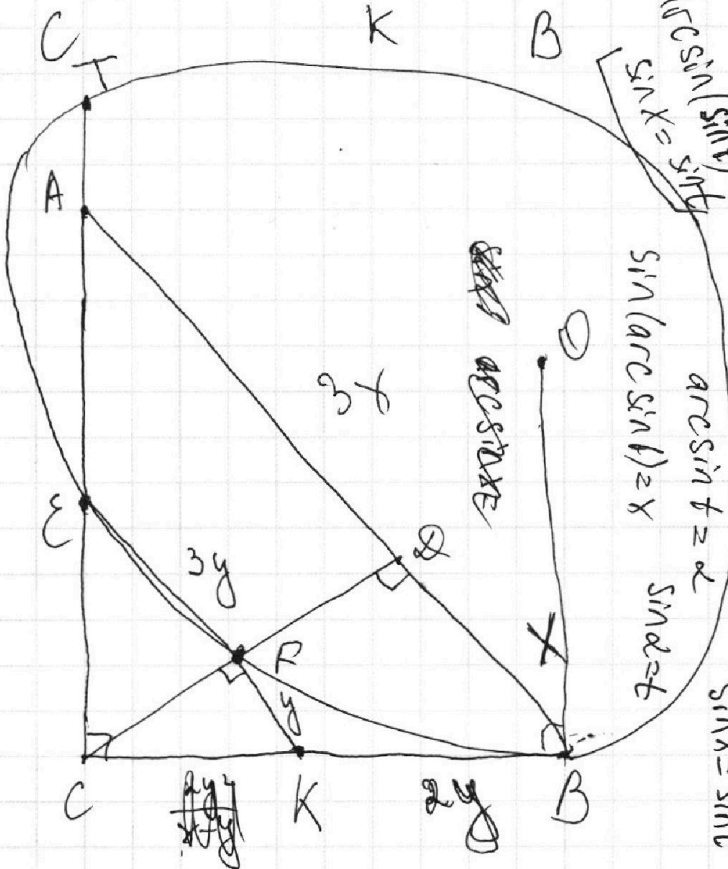
$AB \parallel EF$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}}$$

$$S_{\triangle CEF} = \frac{3}{4} S_{CEK}$$

$$\text{arc sin}(\sin \alpha) = x$$

$\sin x = \sin \alpha$



$$\text{arc sin}(\sin \alpha) = x$$

$$\sin(\text{arc sin} \alpha) = x$$

$$\sin x = \sin \alpha$$

$$AC^2 = 16x^2 - 4x^2y^2$$

$$\frac{x}{y} = k$$

$$KB^2 = y \cdot 4y = 4y^2$$

$$KB = 2y$$

$$\text{arc sin}(\sin \alpha) = x$$

$$\sin x = \sin \alpha$$

$$CB = \frac{2y^2}{x-y} + 2y = \frac{2y^2 + 2xy}{x-y}$$

$$= \frac{2xy}{x-y}$$

$$x \cdot CK = y \cdot CK + 2y^2$$

$$CK = \frac{2y^2}{x-y}$$

$$\frac{CK + 2y}{CK} = \frac{x}{y}$$

$$CK = \frac{2y^2}{x-y}$$

$$\frac{CB}{CK} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{CK}{CK + 2y}$$

$$1 + \frac{2y}{CK} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{2y}{CK} = \frac{x-y}{y}$$

$$\text{arc sin}(\sin \alpha)$$

$$\text{arc sin}(\sin \alpha) = x$$

$$\sin x = \sin \alpha$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{arc sin}(\sin \alpha) = 0$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = \sin(30+x)$$

$$\text{arc sin}(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{arc sin}(\sin(30+x)) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{2y^2}{x-y}$$

$$x = -\frac{2y^2}{x-y}$$