



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



✓ 1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

✓ 3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

✓ $\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5$, и $\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5$.

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a = a_1 \cdot 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$$

$$a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{N}$$

$$a_1, b_1, c_1 \in \{2, 3, 5\}$$

$$b = b_1 \cdot 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$$

$$\forall i: \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{Z}$$

$$c = c_1 \cdot 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}$$

$$\forall i: \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \geq 0$$

$$\alpha_1 + \beta_1 \geq 6$$

$$\beta_1 + \gamma_1 \geq 14$$

$$\alpha_1 + \gamma_1 \geq 16$$

$$\alpha_2 + \beta_2 \geq 13$$

$$\beta_2 + \gamma_2 \geq 21$$

$$\alpha_2 + \gamma_2 \geq 25$$

$$\alpha_3 + \beta_3 \geq 11$$

$$\beta_3 + \gamma_3 \geq 13$$

$$\alpha_3 + \gamma_3 \geq 28$$

$\Rightarrow$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 18$$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq \frac{53}{2}$$

$$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 28$$

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 18$$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 30$$

$$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 28$$

абсолютно

$$abc = a_1 b_1 c_1 \cdot 2^{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1} \cdot 3^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2}$$

$$\cdot 5^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3} \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

$$\alpha_1 = 4$$

$$\beta_1 = 2$$

$$\gamma_1 = 12$$

$$\alpha_2 = 8$$

$$\beta_2 = 5$$

$$\gamma_2 = 17$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 4 \\ \beta_1 = 2 \\ \gamma_1 = 12 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \beta_1 = 6 \\ \beta_1 + \gamma_1 = 14 \\ \alpha_1 + \gamma_1 = 16 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = 8 \\ \beta_2 = 5 \\ \gamma_2 = 17 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 + \beta_2 = 13 \\ \beta_2 + \gamma_2 = 22 \\ \alpha_2 + \gamma_2 = 25 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_3 = 11 \\ \beta_3 = 0 \\ \gamma_3 = 17 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_3 + \beta_3 = 11 \\ \beta_3 + \gamma_3 = 17 \\ \alpha_3 + \gamma_3 = 28 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_3 = 11 \\ \beta_3 = 0 \\ \gamma_3 = 17 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_3 + \beta_3 = 11 \\ \beta_3 + \gamma_3 = 17 \\ \alpha_3 + \gamma_3 = 28 \end{array} \right.$$

Итого:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_3 = 11 \\ \beta_3 = 0 \\ \gamma_3 = 17 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_3 + \beta_3 = 11 \\ \beta_3 + \gamma_3 = 17 \\ \alpha_3 + \gamma_3 = 28 \end{array} \right.$$

$$\alpha_3 + \beta_3 = 11$$

$$\beta_3 + \gamma_3 = 17$$

$$\alpha_3 + \gamma_3 = 28$$

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

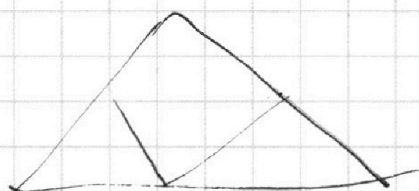
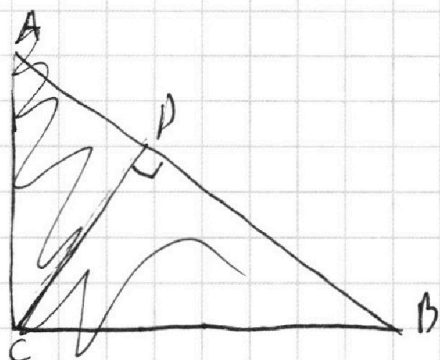
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

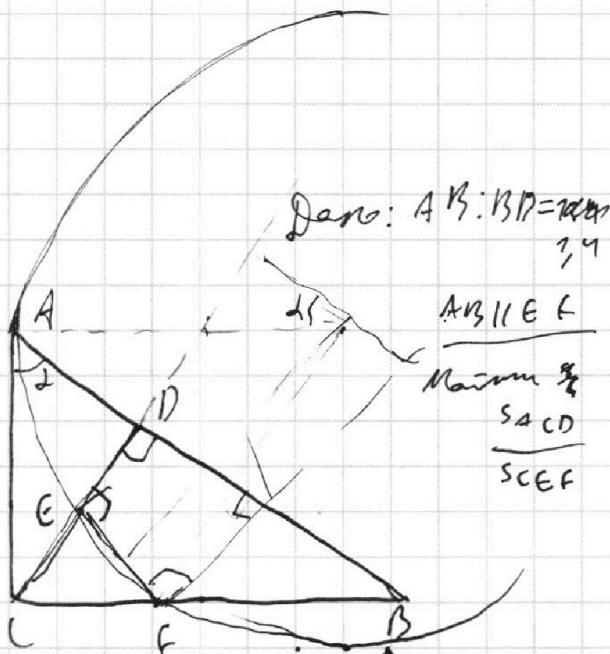
1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$CF \parallel AB \Rightarrow \\ \angle CEF = 90^\circ$$



$$\text{Пусть } AC = a$$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{2}{5} \Rightarrow BD = \frac{5}{2} AD$$

$$\text{Пусть } \angle CAB = \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{CD}{AD}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{CD}{BD} = \frac{CD}{\frac{5}{2} AD} =$$

$$= \frac{2}{5} \tan \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$\tan^2 \alpha = \frac{5}{2}$$

$$\tan \alpha > 0$$

$$\tan \alpha = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{7}} \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{5}{7}}$$

$$\frac{7}{2} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

Сделаем замену ~~у~~ $x = \frac{\pi}{2} - t$. Тогда $t = \frac{\pi}{2} - x$.

$$\text{Решим упр-е } 10 \arccos(\sin(\frac{\pi}{2} - t)) = 9\pi - 2(\frac{\pi}{2} - x) \quad (-)$$

$$(2) 10 \arccos(\cos t) = 8\pi + 2t \Leftrightarrow$$

$$(2) 5 \arccos(\cos t) = 4\pi + t$$

$$5 \arccos(\cos t)$$

$$0 \leq 5 \arccos(\cos t) \leq 5\pi \Rightarrow -4\pi \leq t \leq \pi$$

1. Пусть $0 \leq t \leq \pi$

$$5t = 4\pi + t \Leftrightarrow t = \pi$$

2. Пусть $-\pi \leq t < 0$

$$5 \arccos(\cos t) = -5t$$

$$-5t = 4\pi + t \quad (=)$$

$$\Leftrightarrow 6t = -4\pi \Leftrightarrow t = -\frac{2}{3}\pi$$

3. Пусть $-2\pi \leq t < -\pi$

$$5 \arccos(\cos t) = 5(t + 2\pi) = 5t + 10\pi$$

$$5t + 10\pi = 4\pi + t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4t = -6\pi \Leftrightarrow t = -\frac{3}{2}\pi$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4. Пусть $-3\pi \leq t < -2\pi$

$$5 \arccos(\cos t) = 5 \arccos \cos(-t - 2\pi) = -5t - 10\pi$$

$$-5t - 10\pi = 4\pi + t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6t = 14\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{7}{3}\pi$$

5. Пусть $-4\pi \leq t < -3\pi$

$$5 \arccos(\cos t) = 5(t + 4\pi) = 5t + 20\pi$$

$$5t + 20\pi = 4\pi + t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4t = -16\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = -4\pi$$

Итак, исходные ур-е равносильны совокупности

$$\begin{cases} \frac{11}{2} - x = \pi \\ \frac{11}{2} - x = -\frac{2}{3}\pi \\ \frac{11}{2} - x = -\frac{3}{2}\pi \\ \frac{11}{2} - x = -\frac{7}{3}\pi \\ \frac{11}{2} - x = -4\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{7\pi}{6} \\ x = 2\pi \\ x = \frac{17}{6}\pi \\ x = \frac{9}{2}\pi \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{7}{6}\pi; 2\pi; \frac{17}{6}\pi; \frac{9}{2}\pi \right\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Существует коэффициент K ; значение с центром
в точке T и коэф. K перевернут ~~окружности~~
внутренней окружности в верхнюю. Тогда $-2K = S$, $-KT_0 =$

$$O_1 T, K = -\frac{S}{2}, \quad \frac{S}{2} T_0 = O_1 T \Rightarrow S T_0 = 2 O_1 T$$

$$T_0 = \frac{2}{S} \cdot 9 = \frac{18}{S}, \quad T_1 = \frac{S}{2} \cdot 9 = \frac{45}{2}. \quad \text{Значит } T \text{ координаты } (0; -\frac{45}{2})$$

Путь угла наклона касательной равен α .

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{S}{\frac{45}{2}} = \frac{2S}{45}$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{9}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{32}{81}} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\tan \alpha = \frac{4\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Эти касательные имеют уравн. } Y = \frac{4\sqrt{2}}{2} X - \frac{45}{2} \text{ и } Y = -\frac{4\sqrt{2}}{2} - \frac{45}{2}$$

~~Решение задачи~~

Пусть $1 - \frac{S}{6a} \leq \frac{4\sqrt{2}}{2}$. Найдем $b: \frac{b}{6a} = -\frac{45}{2}$ и проверим
прямую. Она пересечет обе окружности в двух точках

$$\text{Пусть } 1 - \frac{S}{6a} \leq \frac{4\sqrt{2}}{2}. \text{ Если } b \text{ такое, что } Y = \frac{b-Sx}{6a}$$

проходит через точку T , то она пересечет каждую окружность
не более, чем в 1 точке. Вмее T не пересечет внутреннюю.
Вмее T не пересечет верхнюю.

$$1 - \frac{S}{6a} > \frac{4\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left| \frac{S}{6a} \right| > \frac{4\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

Сделано

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 5x + 6ay - 6 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + 18y + 77 = y^2 + 18y + 81 + x^2 - 4 = x^2 + (y+9)^2 - 4$$

Исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} 5x + 6ay - 6 = 0 \quad (1) \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

Решим и геометрически,

т.е. прямая (1) пересекает
две окружности в двух точках.

Пусть $a = 0$

$$5x - 6 = 0$$

$$x = \frac{6}{5}. \text{ Это вертикальная}$$

прямая.

$b = 0$ задает

вертикальную прямую.

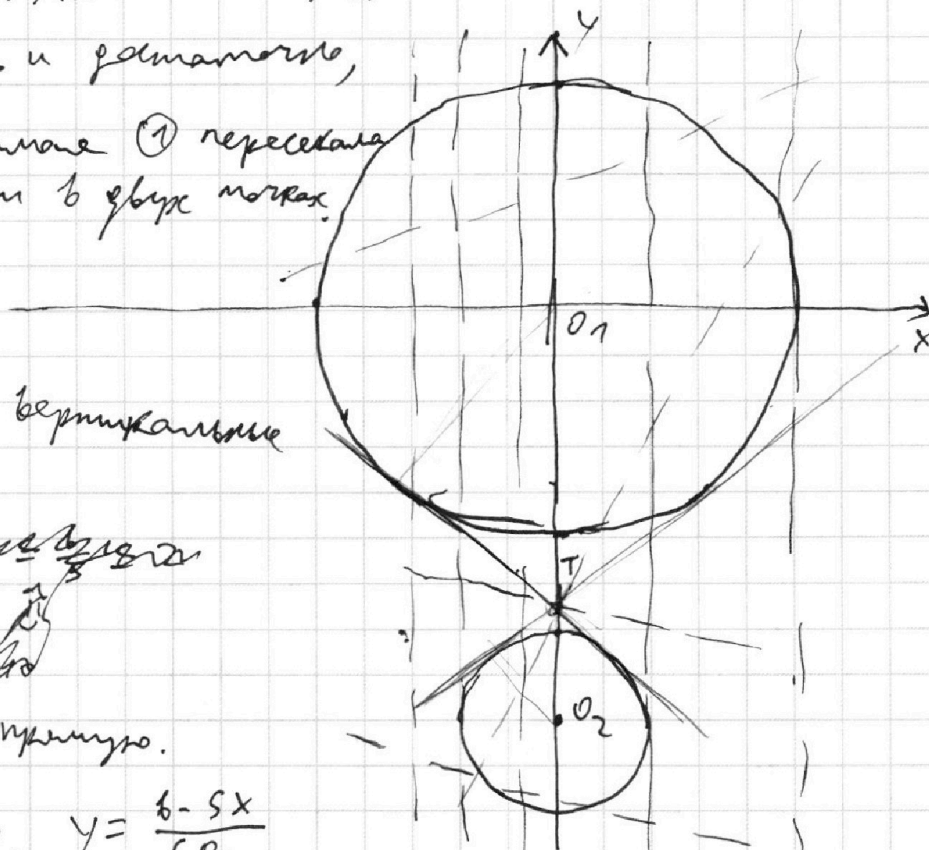
$$\text{Пусть } a \neq 0. \quad y = \frac{6 - 5x}{6a}$$

Проведем к окружностям одну касательную (внутреннюю)

Пусть центр верхней окружности - точка O_1 , центр

нижней - O_2 , тогда точка пересечения касательных

T , так как касательная к окружности в точке T перпендикулярна радиусу TO_1 и радиусу TO_2 .





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{6a} > \frac{4\sqrt{2}}{7} \\ a > 0 \\ \frac{5}{6a} < -\frac{4\sqrt{2}}{7} \\ a < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a < \frac{35}{24\sqrt{2}} \\ a < 0 \\ -\frac{5}{6} < \frac{4\sqrt{2}}{7} a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a < \frac{35}{24\sqrt{2}} \\ a < 0 \\ \frac{5}{6} < \frac{4\sqrt{2}}{7} a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a < \frac{35}{24\sqrt{2}} \\ a < 0 \\ -\frac{5}{6} < \frac{4\sqrt{2}}{7} a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a < \frac{35\sqrt{2}}{48} \\ a < 0 \\ a > -\frac{35\sqrt{2}}{48} \end{cases}$$

$a=0$ не подходит.

Ответ: $\left(-\frac{35\sqrt{2}}{48}; \frac{35\sqrt{2}}{48}\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5

$$\begin{cases} \log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x^3 \frac{1}{121} - 5 \\ \log_{11}^4 (0,54) + \log_{0,54} 11 = \log_{0,12543} (11^{-13}) - 5 \end{cases}$$

Решим $x \neq 1, y \neq 2$

~~Решим $x \neq 1, y \neq 2$~~

~~используем следующие тождества~~

$$\begin{cases} \log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = \log_x - \frac{2}{3} \log_x \cdot \frac{1}{\log_{11} x} - 5 \\ \log_{11}^4 (\frac{1}{2}y) + \log_{\frac{1}{2}y} 11 = \log_{\frac{1}{2}y} - \frac{13}{3} \log_{\frac{1}{2}y} \cdot \frac{1}{\log_{11} \frac{1}{2}y} - 5 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \log_{11}^4 x + \frac{16}{3 \log_{11} x} + 5 = 0 \\ \log_{11}^4 (\frac{1}{2}y) + \frac{16}{3 \log_{\frac{1}{2}y} 11} - 5 = 0 \end{cases} \quad (=)$$

$$\begin{cases} \log_{11}^4 x \neq 0 \\ \log_{\frac{1}{2}y} 11 \neq 0 \end{cases}$$

Сделаем замену $\frac{y}{2} = y_1$ и решим систему

$$\begin{cases} \log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \log_{11} x - 5 \\ \log_{11}^4 y_1 + \frac{1}{\log_{11} y_1} = -\frac{13}{3} \log_{11} y_1 - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{11}^5 x - \frac{16}{3} = -5 \log_{11} x \\ \log_{11}^5 y_1 + \frac{16}{3} = -5 \log_{11} y_1 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~Задача 5~~

Решение

Сделаем

замену

$\log_{11} 11 = 1$, и решим систему
 $\log_{11} 11 = 0$

$$\begin{cases} \frac{1}{u^4} - 6u = -\frac{2}{3}u - 5 \\ \frac{1}{u^4} + 0 = -\frac{2}{3}u - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{16}{3}u = \frac{1}{u^4} + 5 \\ \frac{16}{3}u + \frac{1}{u^4} + 5 = 0 \end{cases} (=)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{u^4} - \frac{16}{3}u + 5 = 0 & (1) \\ \frac{1}{u^4} + \frac{16}{3}u + 5 = 0 & (2) \end{cases}$$

t-решение (1) (2) ~~не~~ - t-решение (2)

Решение

$$f(u) = 1 - \frac{16}{3}u^5 + 5u^4$$

$$\frac{df}{du} = -\frac{80}{3}u^4 + 20u^3 = -\frac{20}{3}u^3(4u - 3)$$

$$u = 0$$

$$f(0) = 1$$

$$u \leq \frac{3}{4} \quad f(u) \geq 0$$

и

$f(100000) < 0 \Rightarrow f(u)$ имеет 1 корень (переходит)

$$\text{Умно, тогда } \log_{11} X = -\log_{11} Y_1$$

$$\Leftrightarrow \log_{11} XY_1 = 0 \Rightarrow XY_1 = 1 \Rightarrow XY = 2$$

Ответ: 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



5

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x^3 \frac{1}{121} - 5 \quad (*)$$

$$\log_{11}^4 (0,54) + \log_{0,54} 11 = \log_{0,12543} (11^{-13}) - 5 \quad (2)$$

① ~~Сделаем замену~~

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x^3 \frac{1}{121} - 5 \quad (1)$$

$$(1) \quad \left(\frac{1}{\log_{11} x} \right)^4 - 6 \log_x 11 = \frac{1}{\log_x^3 11} - 5 \quad (2)$$

$$(2) \quad \frac{1}{\log_{11}^4 x} - 6 \log_x 11 = \frac{1}{\log_x^3 11} - 5 \quad (3)$$

$$\log_x^3 \frac{1}{121} = -\frac{2}{3} \log_x 11$$

Пусть $x = 11$

$$1 - 6 = -\frac{2}{3} - 5 \quad \text{не выполняется.}$$

Пусть $\log_x 11 \neq 0$

Сделаем замену $\log_x 11 = u$ и решим ур-е

$$\frac{1}{u^4} - 6u = -\frac{2}{3}u - 5 \quad (1)$$

$$(2) \quad \frac{1}{u^4} - \frac{16}{3}u + 5 = 0 \quad (1)$$

$$(3) \quad \frac{3}{u^4} - 16u + 15 = 0 \quad (2)$$

$$(4) \quad \frac{3 - 16u^5 + 15u^4}{u^4} = 0$$

$$f(u) = -16u^5 + 15u^4 + 3$$

$$f'(u) = -80u^4 + 60u^3 = -20u^3(4u - 3)$$

$$1 - \frac{16}{3}u^5 + 5u^4 = 0$$

$$\frac{1}{u^4} - \frac{16}{3}u + 5 = 0$$

$$\frac{1}{x^4} + \frac{16}{3}x^4 + 5 = 0$$

$$\frac{1}{u^4} - \frac{1}{v^4} - \frac{16}{3}(u+v) = 0$$

$$v^4 - u^4 - \frac{16}{3}(u+v) = 0$$

$$(v-u)(v^3+u^3) - \frac{16}{3}(u+v) = 0$$

$$(v-u)(v^2+uv+u^2) - \frac{16}{3} = 0$$

$$v^3 - u^3 + uv^2 - u^3 = \frac{16}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1

$$a = a_1 \cdot 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3},$$

$$b = b_1 \cdot 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3}$$

$$c = c_1 \cdot 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3}, c_1 \neq 2$$

$$\log_2 x = \frac{6}{x} = -\frac{2}{3}$$

$$\log_2 x = \frac{6}{\log_2 x} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \log_2 x = -5$$

$$\log_2 x = \frac{16}{3} \Rightarrow \log_2 x = -5$$

$$\log_2 x + 5 \log_2 x = \frac{16}{3} \Rightarrow$$

$$\log_2 \left(\frac{1}{2}x\right) + 5 \log_2 \left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{16}{3} = 0$$

$$\log_2 x + \log_2 \left(\frac{1}{2}x\right) + 5 \log_2 \left(\frac{1}{2}x\right) = 0$$

$$\log_2 \left(\frac{xy}{2}\right) \left(\log_2 \left(\frac{xy}{2}\right) - \log_2^3 x \log_2 \left(\frac{1}{2}y\right) + \log_2^2 x \log_2^2 \left(\frac{1}{2}y\right) + \log_2 x \log_2^3 \left(\frac{1}{2}y\right) + \log_2^4 \left(\frac{1}{2}y\right) \neq 5 \right)$$

$$= \log_2 \left(\frac{xy}{2}\right) \left(\log_2 \left(\frac{xy}{2}\right) - \log_2^2 \left(\frac{xy}{2}\right) \log_2^2 x + \log_2^2 \left(\frac{xy}{2}\right) - \log_2 \left(\frac{xy}{2}\right) \log_2^2 x + \log_2^4 \left(\frac{xy}{2}\right) \right) = 0$$

$$\log_2 \left(\frac{xy}{2}\right) \left(\left(\frac{\log_2 x}{\log_2 x} \right)^4 + \right)$$

$$\log_2 \left(\frac{xy}{2}\right) (t^4 - t^3 + t^2 - t + \frac{6}{t}) = 0$$

$$(t-1)(t^2+1)+2$$

$$(t-1)(t^2+1)$$

$$\log_2 \left(\frac{xy}{2}\right) \left(\log_2^4 x + \log_2^4 \left(\frac{1}{2}y\right) - \log_2 \left(\frac{xy}{2}\right) \left(\log_2^2 x + \log_2^2 \left(\frac{1}{2}y\right) \right) \right) =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\log_2$

$$\log_{11} x = 4$$

$$\log_{11} y_1 = 2$$

$$2 \cdot 2 = 4$$

$$\log_{11} x + \log_{11} y_1 = 2$$

$$\log_{11} x \cdot \log_{11} y_1 = 8$$

~~$\log_{11} x$~~

$$\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 y_1 = (\log_{11} x + \log_{11} y_1)^2 -$$

$$u^4 - u^3 v + u^2 v^2 - u v^3 + v^4 =$$

$$= (u^2 + v^2)^2 - 2u^2 v^2 - u^3 v - u v^3 = (u^2 + v^2)^2 - u^3 v - u v^3 -$$

$$- u^2 v^2 =$$

$$(u + v)^2 + 2uv =$$

$$(u + v)^2 + 2uv = u^2 + v^2 + 2uv =$$

$$= (a^2 - 2b)^2 - 6(a^2 - 2b) - 6^2$$

$$= (a^2 - 2b)(a^2 - 3b) = a^4 - 5ba^2 + 6b^2 - 6^2 =$$

$$= (a^2 + 6b)(a^2 - 6b)$$

$$= a^4 - 56a^2 + 56^2 = 0$$

$$a^2 = \frac{56 \pm \sqrt{206^2}}{2} =$$

$$= \frac{56 \pm 2\sqrt{516}}{2}$$

~~$\log_{11} x$~~

$$\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 y_1 + \log_{11} x \log_{11} y_1 = 0$$

$$(\log_{11} x + \log_{11} y_1)^2 =$$

$$\log_{11} x \log_{11} y_1 = \log_{11}^2 x + \log_{11}^2 y_1$$

$$(\log_{11} x + \log_{11} y_1)^2 = \frac{5 \pm 2\sqrt{2}}{2} \log_{11} x \log_{11} y_1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a = a_1 \cdot 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}, \quad a_1 \nmid 2, a_1 \nmid 3, a_1 \nmid 5, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Z}$$

$$b = b_1 \cdot 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}, \quad b_1 \nmid 2, b_1 \nmid 3, b_1 \nmid 5, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{Z}$$

$$c = c_1 \cdot 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}, \quad c_1 \nmid 2, c_1 \nmid 3, c_1 \nmid 5, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{Z}$$

$$a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall i \quad \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \geq 0$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 6 \\ \beta_1 + \gamma_1 \geq 14 \\ \alpha_1 + \gamma_1 \geq 16 \end{cases}$$

$$\frac{1}{u^4} - 6u = -\frac{2}{3}u - 5 \quad \frac{1}{u^4} - \frac{16}{3}u = 5 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{u^4} + 0u = -\frac{13}{3}u - 5 \quad \frac{1}{u^4} + \frac{16}{3}u - 5 = 0$$

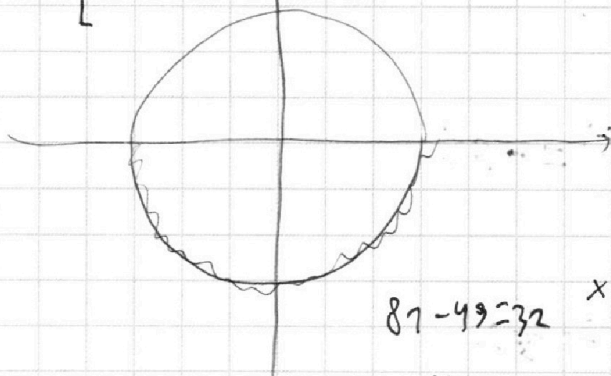
Пусть $x = u^4$

$$5x + 6ay - 1 = 0$$

$$6ay = 1 - 5x$$

$$y = \frac{1 - 5x}{6a}$$

$$\begin{cases} 5x = 1 \\ 6ay = 0 \end{cases}$$



$$81 - 49 = 32$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi + 2\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{7\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{14\pi + 3\pi}{6} = \frac{17\pi}{6}$$

$$x_2 + y_2 = 12$$

$$x_2 + y_2 + 4 = 6(x_2 + y_2) \quad u = \frac{3}{4}$$

$$3 - \frac{16 \cdot 3^5}{4^5} + \frac{15 \cdot 3^5}{4^4} =$$

$$= 3 - \frac{3^5}{2^6} + \frac{3^6 \cdot 5}{2^8} = \frac{2^8 \cdot 3 \cdot 2^2 + 3^6 \cdot 5}{2^8}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(\Rightarrow) (\log_{11} x + \log_{11} y_1) (\log_{11}^2 x - \log_{11}^2 y_1 + \log_{11}^2 x + \log_{11}^2 y_1 - \log_{11} x \log_{11}^3 y_1 + \log_{11}^4 y_1 + 5) = 0 \quad (1)$$

$$\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 y_1 = (\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 y_1)^2 - 2 \log_{11}^2 x \log_{11}^2 y_1$$

$$\Rightarrow (\Rightarrow) (\log_{11} x + \log_{11} y_1) ((\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 y_1)^2 - \log_{11} x \log_{11} y_1 + (\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 y_1 + \log_{11} x \log_{11} y_1) + 5) = 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) \log_{11} x + \log_{11} y_1 ((\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 y_1)^2 - \log_{11} x \log_{11} y_1 ((\log_{11} x + \log_{11} y_1)^2 - \log_{11} x \log_{11} y_1) + 5) = 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) \log_{11} x + \log_{11} y_1 ((\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 y_1)^2 - \log_{11} x \log_{11} y_1) = \log_{11} x$$

Получаем заключение $\log_{11} x = 4$

$\log_{11} y_1 = 0$

и введем функцию $f(t) = t^5 + 5t + \frac{16}{3} = 0$
 $g(t)$