



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что $ab \cdot bc \cdot ac : 2^{6+14+16} \cdot 3^{13+21+25} \cdot 5^{11+13+28}$
но $a^2 b^2 c^2 = (abc)^2 \Rightarrow (abc)^2 : 2^{36} \cdot 3^{60} \cdot 5^{52}$, т.к. все
простые входят в квадрат в четной степени.
 $\Rightarrow abc : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$ Но $ac : 5^{28} \Rightarrow abc : 5^{28}$
 $\Rightarrow abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

Пример: $a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$

$b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0$

$c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14}$

$abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

$ab : 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{14} : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$

$bc : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14} : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$

$ac : 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$

пример подходит

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



(2)

$$\begin{cases} \bar{y} = \frac{a+1-y}{a} \\ x = \frac{y-\bar{y}+a+\frac{1}{a}}{2} = \frac{y-\frac{a+1}{a}+\frac{y}{a}+a+\frac{1}{a}}{2} = \frac{(a+1)y+a^2-a}{2a} \\ \bar{x} = \frac{\bar{y}-y+a+\frac{1}{a}}{2} = \frac{\frac{a+1}{a}-y-\frac{y}{a}+a+\frac{1}{a}}{2} = \frac{a^2+a+2-(a+1)y}{2a} \end{cases}$$

из равенства условий ВАР и ЕАС получаем:

$$\frac{\frac{a+1}{x+1}}{\frac{y+1}{1}} \geq \frac{\frac{a+1}{x+1}}{\frac{y+1}{1}}$$

и частное действительно.

Т.к. аргументы
вероятно и численно
частные равны 07

$$\frac{a+1}{(x+1)(y+1)} \geq \frac{\frac{a+1}{a}}{(\bar{x}+1)(\bar{y}+1)}$$

$$a(\bar{x}\bar{y}+\bar{x}+\bar{y}+1) \geq xy+x+y+1$$

$$\begin{aligned} & a+1-y + \frac{a^2+a+2-(a+1)y}{2a} + a + \frac{(a+1-y)(a^2+a+2-(a+1)y)}{2a} \geq \\ & \geq x+y + \frac{(a+1)y+a^2-a}{2a} + y \frac{(a+1)y+a^2-a}{2a} \end{aligned}$$

размножим на 2a

$$\begin{aligned} & 4a^2-2ay+a^3+a^2+2a-a(a+1)y+(a+1)(a^2+a+2)-y((a+1)^2+a^2+a) \\ & + y^2(a+1) \geq 2ay+(a+1)y+a^2-a+(a+1)y^2+y(a^2-a) \\ & a^3+5a^2+2a+a^2+2a^2+2a+2-y(2a+a^2+a+a^2+2a+1+a^2+a+2) \geq \\ & = a^2-a+y(2a+a+1+a^2-a) \\ & 2a^3+6a^2+6a+2 \geq y(4a^2+8a+4) \\ & 4y(a+1)^2 = 2(a+1)^3 \Rightarrow y = \frac{a+1}{2} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

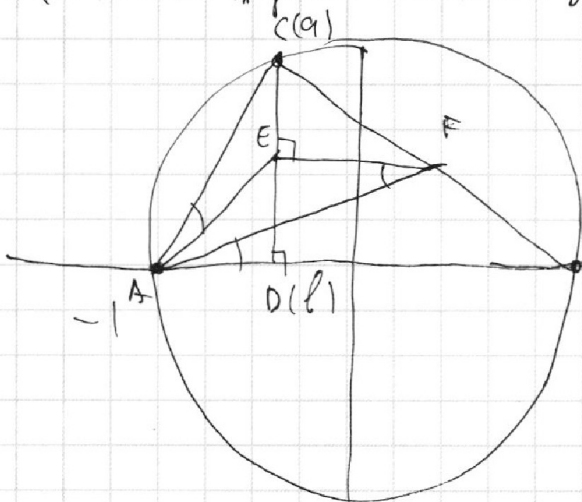
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Введем канон. систему координат так, чтобы
 $AB \in OX$ $O(0,0)$ -середина AB , $\angle HYO AB \ll$
(отсюда $\angle$ функции AB не зависят)



Заметим, что $\angle CAE \ll \angle EFA$, как
между кас и хордой и омп. на
ту же дугу, а $\angle EFA \ll \angle FAB$ и $\parallel$
 $EF \parallel AB$.

$\angle$ координаты $C-a$, $D-b$

$$\frac{a-b}{1-0} = -\frac{\overline{a-b}}{1-0} \quad \text{т.к. } CD \perp AB$$

$$b \ll b, \text{ т.к. } D \in OX \Rightarrow a-b \ll -\frac{1}{a} + b \Rightarrow b \ll \frac{a^2+1}{2a}$$

$$\angle E-x, F-y \text{ тогда: } \frac{x-y}{1-0} = \frac{\overline{x-y}}{1-0} \quad \text{т.к. } EF \parallel AB$$

$$\Rightarrow \boxed{x-y \ll \overline{x-y}}$$

$$E \in CD \Rightarrow CE \perp AB \Rightarrow \frac{a-x}{1-0} = -\frac{\overline{a-x}}{1-0}$$

$$a-x \ll -\frac{1}{a} + \overline{x} \Rightarrow \boxed{x+\overline{x} \ll a+\frac{1}{a}}$$

$$F \in BC \Rightarrow BF \perp AC \Rightarrow$$

$$\frac{1-y}{a+1} = -\frac{\overline{1-y}}{\overline{a+1}} \Rightarrow (1-y)(a+1) \ll -a(a+1)(1-\overline{y})$$

$$(a+1)(1-y) \ll -a(a+1)(1-\overline{y}) \Rightarrow \boxed{1-y \ll -a+a\overline{y}}$$

$$\begin{cases} x-\overline{x} \ll y-\overline{y} \\ x+\overline{x} \ll a+\frac{1}{a} \\ 1-y \ll -a+a\overline{y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \ll \frac{y-\overline{y}+a+\frac{1}{a}}{2} \\ \overline{x} \ll \frac{a+\frac{1}{a}-y+\overline{y}}{2} \\ 1-y \ll -a+a\overline{y} \end{cases}$$

1



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$10 \sin \cos(5\pi x) = 9\pi - 2x$$

$$\text{Но } 5\pi x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) = 9\pi - 2x, & k \in \mathbb{Z} \\ 10\left(x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 9\pi - 2x, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5\pi - 10x + 20\pi k = 9\pi - 2x \\ 10x - 5\pi + 20\pi k = 9\pi - 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x = 20\pi k - 4\pi \\ 12x = 14\pi - 20\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5\pi k}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(5k - 1) \\ x = \frac{7}{6}\pi - \frac{5}{3}\pi k = \frac{\pi}{3}(7 - 5k) \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{2}(5k - 1); \frac{\pi}{3}(7 - 5k), k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \frac{-5}{6a} > \frac{4\sqrt{2}}{7} & (1) \\ \frac{-5}{6a} < \frac{-4\sqrt{2}}{7} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad 0 > \frac{35 + 24a\sqrt{2}}{a}$$

$$\Rightarrow a \in \left(-\frac{35\sqrt{2}}{48}, 0 \right)$$

$$(2) \quad 0 > \frac{24a\sqrt{2} - 35}{a}$$

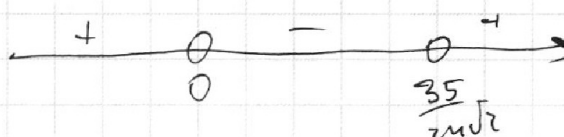
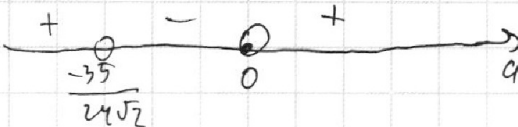
$$\Rightarrow a \in \left(0, \frac{35\sqrt{2}}{48} \right)$$

$$\Rightarrow a \in \left(-\frac{35\sqrt{2}}{48}, 0 \right) \cup \{0\} \cup \left(0, \frac{35\sqrt{2}}{48} \right)$$

$$\Rightarrow a \in \left(-\frac{35\sqrt{2}}{48}, \frac{35\sqrt{2}}{48} \right)$$

где концы из точки a , ~~где концы~~, $b = \frac{-45}{7} \cdot 6a$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{35\sqrt{2}}{48}, \frac{35\sqrt{2}}{48} \right)$$



(2)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

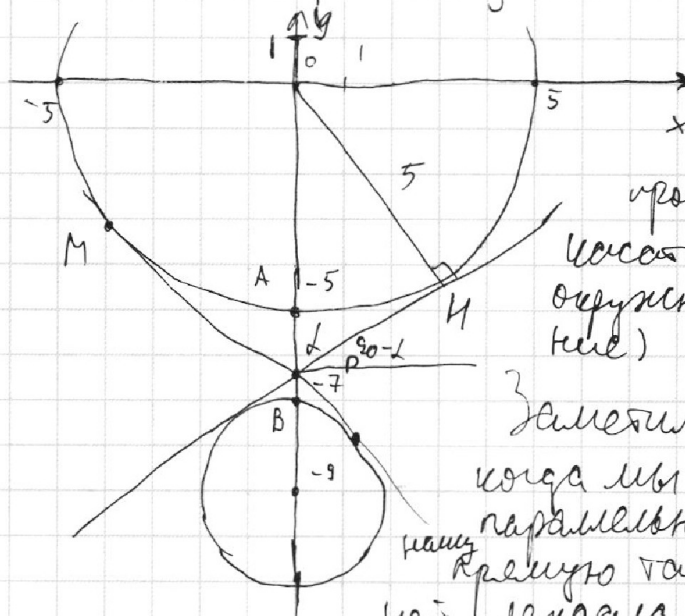
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



преобразуем ур-ние системы:

$$\begin{cases} y \geq \frac{-5x+6}{6a}, a \neq 0 & - \text{прямая} \\ x \geq \frac{6}{5}, a \geq 0 & - \text{тоже прямая} \\ x^2 + y^2 \geq 5^2 & - \text{окр-ть с ц. в } (0,0) \text{ и } R=5 \\ x^2 + (y+9)^2 \geq 9^2 & - \text{окр-ть с ц. в } (0,-9) \text{ и } R=9 \end{cases}$$



проведем общие касательные к окружностям (внутренние)

Заметим, что если, когда мы меняем параллельно перенесем прямую так, чтобы P на ней лежала, она не будет

лежать внутри угла MPM, то 4 решений не будет, т.к. она раздвинет 2 окр-ти $\Rightarrow$ и параллельная ей прямая $P \leq 1$ из них. так же, если она совпадет с касательной, корней всё ещё $\leq 2 \Rightarrow$ её условие короче - т.е. больше, чем у PH, либо меньше, чем у PM. Им. кор. PH $\geq \frac{5}{7}(90-2) = \frac{5}{7} \cdot 88 = \frac{440}{7} = PH; OH$

AP:PB $\geq 5:9$, т.к. $\exists$ гипотенуза с ц. в P, переводимая окр-ти одну в другую. $\Rightarrow AP \geq \frac{5}{9} \cdot AB$, $AB \geq 9 \Rightarrow AP \geq \frac{10}{7} \Rightarrow OP \geq \frac{10}{7} \Rightarrow BP \geq \frac{5}{7} \sqrt{81-49} = \frac{5\sqrt{32}}{7}$ по т. Пифагора $\Rightarrow \angle \geq \frac{4\sqrt{2}}{7}$

Заметим, что при $a \geq 0$ $b \geq 0$ - не подходит, так как это равно 0

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

☒ 5

☐ 6

☐ 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$] a = \log_{11} x, b = \log_{11} 95y$$

$$a+b = ?$$

$$a^4 - \frac{6}{a} = \frac{-2}{3a} - 5 \quad \left| \begin{array}{l} \text{умножим на } a, \text{ чтобы } \\ \text{сложить} \end{array} \right.$$

$$b^4 + \frac{1}{b} = \frac{-13}{3b} - 5$$

$$a^5 + b^5 + 5(ab) - 6 + \frac{2}{3} + 1 + \frac{13}{3} = 0$$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + a^4 + 5) = 0$$

мб $a+b \geq 0$ - запишем

$$\text{мб } a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + a^4 + 5 = 0$$

$$] p = a+b, q = ab$$

$$(p^2 - 2q)^2 - a^3b^2 - ab(a^2b^2) + 5 = 0$$

$$5 + (p^2 - 2q)^2 - q^2 - (p^2 - 2q)q = 0$$

$$5 + p^4 - 4p^2q + 4q^2 - q^2 - p^2q + 2q^2 = 0$$

$$p^4 - 5p^2q + 5q^2 + 5 = 0$$

Заметим, что если $q > 0$, то $p^4 - 5p^2q + 5q^2 + 5 > 0$

$\Rightarrow q \geq 0 \Rightarrow$

$$(1) (a-b)^2 \geq ab \Rightarrow p^4 - 5p^2q = p^2(p^2 - 5q) = p^2(a^2 + b^2 - 2ab) = p^2(a-b)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow p^2((a-b)^2 - ab) \geq 0, p \geq 0 \Rightarrow p^4 - 5p^2q + 5q^2 + 5 > 0$$

$$(2) (a-b)^2 < ab \Rightarrow p^4 - 4p^2q < p^2(a-b)^2 \geq 0$$

$$5q^2 + 5 - p^2q \geq 5a^2b^2 + 5 - (a^2 + ab + b^2)ab \geq 3a^2b^2 + 5 - ab(a^2 + b^2) \geq ab(3ab - a^2 - b^2) + 5 \geq ab(ab - (a-b)^2) + 5$$

$$ab(1 - (a-b)^2) + 5 > 0 \Rightarrow p^4 - 5p^2q + 5q^2 + 5 > 0$$

$\Rightarrow$ оно равно нулю быть не может $\Rightarrow a+b \geq 0 \Rightarrow \log_{11}(\frac{1}{2}xy) \geq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}xy \geq 1 \Rightarrow xy \geq 2$ Ответ: 2

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Зафиксируем точку (x, y) и посмотрим
где лежат для неё такие точки (x_2, y_2)
 $y = -6x - 40 + (6x_2 + y_2)$ - прямая.
Заметим, что $PQ \parallel QR$ и этой прямой,
т.к. $\frac{90-0}{-15-0} = -6$ - углы наклона.
Заметим, что $\max(6x_2 + y_2)$ на QR .
Существенно $6x_2 + y_2 = C$ - макс $\rightarrow$
 $y = -6x + C$ - они лежат на прямой QR ,
но QR - верхнее из таких, $\parallel$ паралл $\rightarrow$
 $\Rightarrow$ макс C на $QR \Rightarrow \max C = 12 + 90 = 102$
~~точно~~
~~все возможные пары~~
 $\Rightarrow$ число всех таких пар = числу точек
в паралл-е $O_1(2,0)$, $P(-15, 40)$, $Q(6, 90)$,
 $R(9, 0)$ $\approx$
Но число равно ~~6640~~ $(15+1)(9+1) =$
 $= 160$ ~~или 160~~

Ответ: 160

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

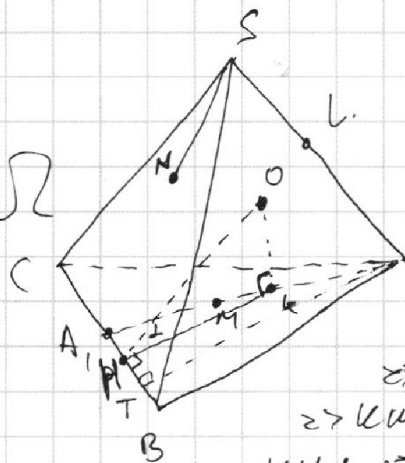
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

д)

Ω - центр Ω



Ω - осн. е. высоты из A на BC;
 $\Omega \in BC$;

$KN \perp BC$.

$SN \approx SL \approx 6$ как

касательные $\Rightarrow$

$$\Rightarrow AL \approx 20 - 6 \approx 14 \approx AK \Rightarrow$$

$$\Rightarrow KM \approx 20 - 14 \approx 6$$

$$KM : AT \approx AK : AA, \text{ т. к. } \triangle A_1 K K \sim \triangle A_1 B A$$

$$\triangle A_1 K K \sim \triangle A_1 B A$$

$$\frac{AK}{AA_1} \approx \frac{16}{30} \Rightarrow KM \approx AT \cdot \frac{16}{30}$$

$$\frac{1}{3} \cdot AT \cdot CB \approx 180 \Rightarrow AT \approx 18 \Rightarrow KM \approx \frac{18 \cdot 8}{15} \approx \frac{48}{5}$$

$OK \perp AK$, т. к. $\triangle ABC$ касается Ω

$$\Rightarrow \text{по т. П. } \angle OKK \approx \arctg \frac{OK}{KM} \approx \frac{8}{\frac{48}{5}} \approx \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \angle OKK \approx \arctg \frac{5}{6}$$

Ответ: $\arctg \frac{5}{6}$

2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

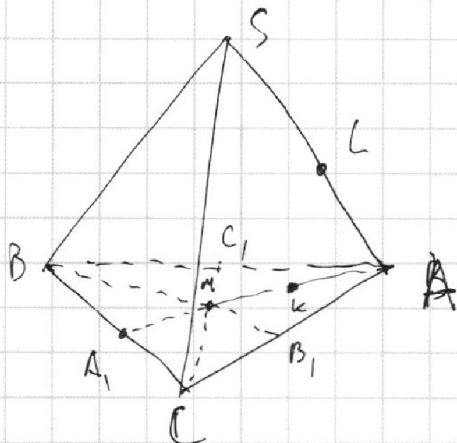
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

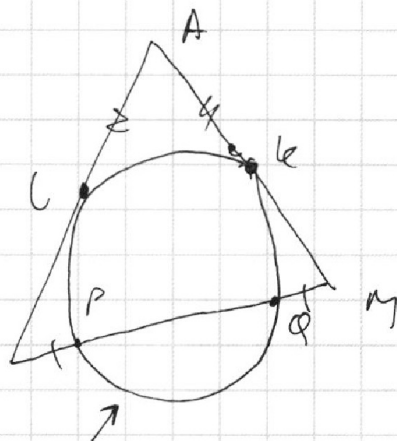
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a)



$$SA = BC = 20, S_{ABC} = 180$$

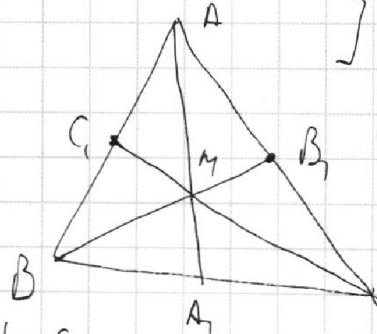
! М-тв АСМ:



сечение сферы и т.к.

Заметим, что $SP \cdot SQ = SL^2$ и $MP \cdot MQ = MN^2$
из т.т. о кас. и сек. но $SP = MP$, $SQ = MQ$
 $\Rightarrow SL = MN \Rightarrow AS = AM \Rightarrow AM = 20$

! $\triangle ABC$



A_1, B_1, C_1 - середины сторон

BE, AC и AB соотв.

$$AM = 20 \Rightarrow MA_1 = A_1B = A_1C = 10$$

$$\Rightarrow \angle BMC = 90^\circ$$

$$S_{BMC} = \frac{1}{3} S_{ABC}, \text{ но } S_{BMC} = \frac{1}{2} BM \cdot MC = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot BB_1$$

$$\cdot CC_1 \Rightarrow BB_1 \cdot CC_1 = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 180 \cdot \frac{8}{9} = 160$$

$$AA_1 = \frac{3}{2} \cdot 20 = 30 \Rightarrow AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 30 \cdot 160 = 4800$$

Ответ пункта а: 4800

1



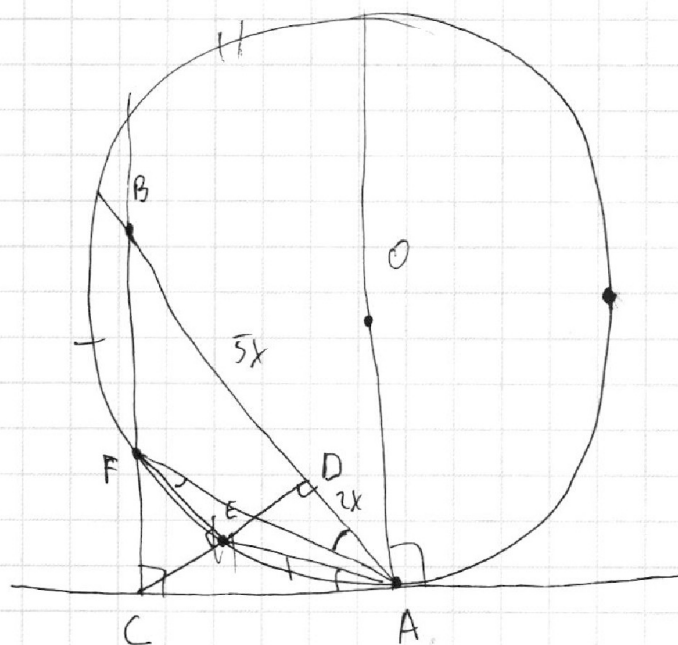
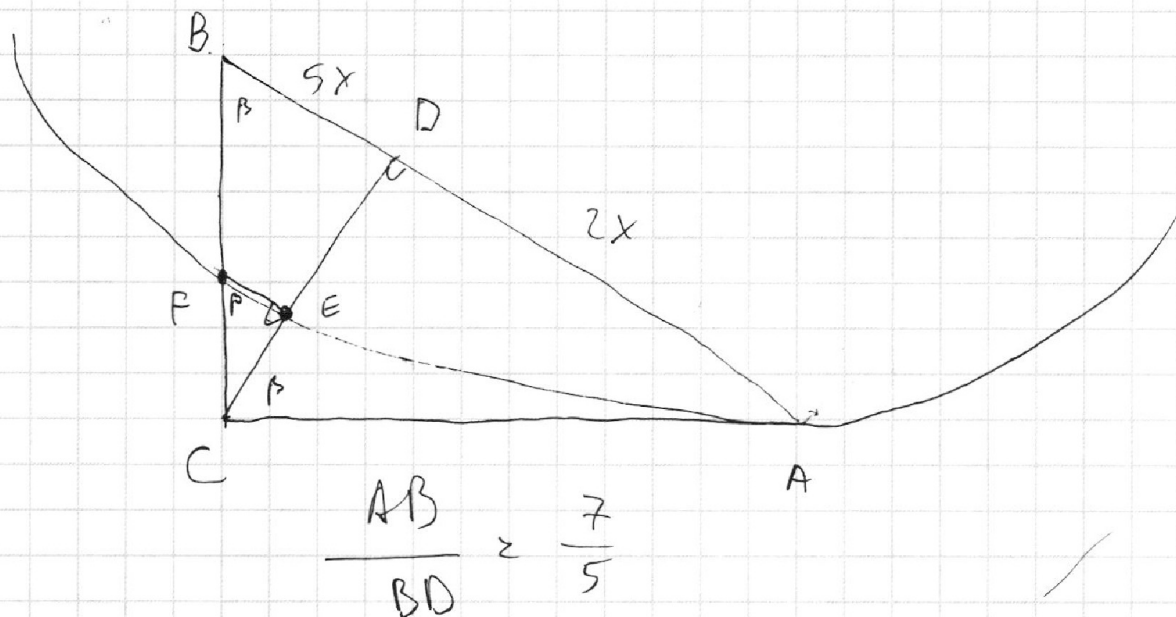
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

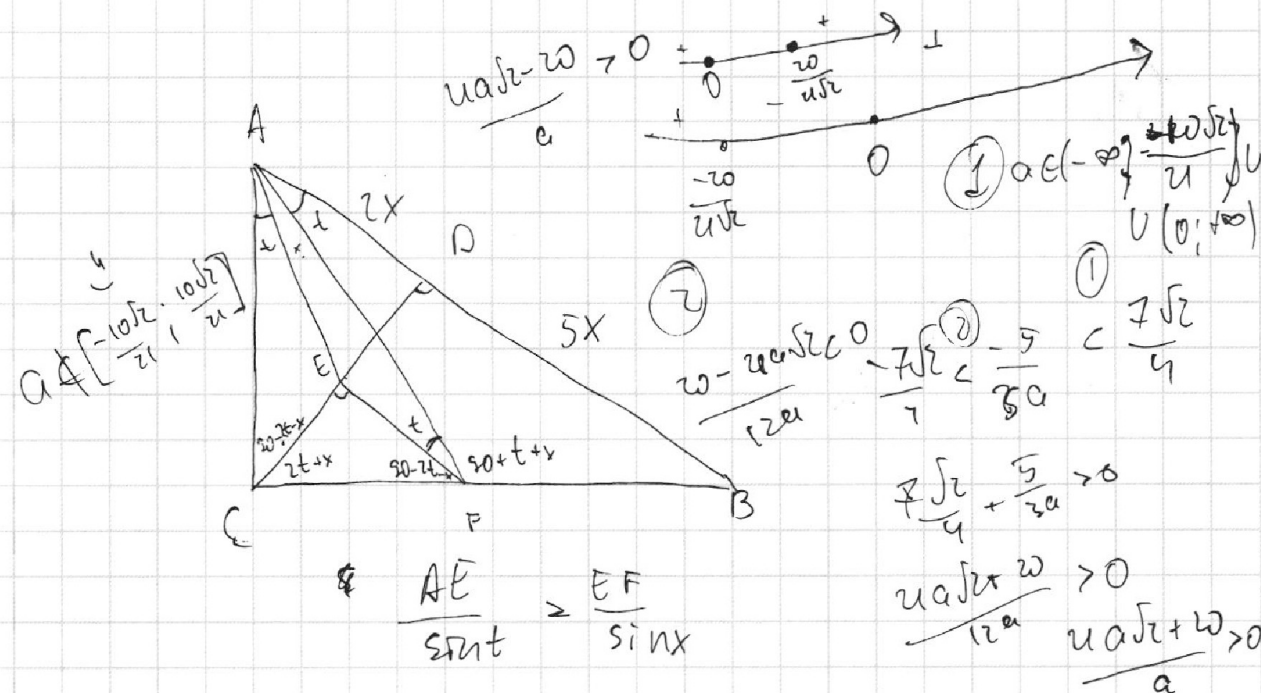
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{9} = \frac{35}{7} \cdot \frac{20\sqrt{2}}{7} = \frac{CE}{\sin t} \geq \frac{AE}{\sin \cos(2t+x)} = \frac{AE \cdot AC}{AD}$$

$$\geq \frac{20\sqrt{2}}{7} = \frac{7}{4\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{7\sqrt{2}}{8}\right) \frac{CE}{AD}$$

$$\sin t+x = \frac{CF}{AF}$$

$$y = \frac{-5}{6a}x + \frac{1}{6a}$$

$$-\frac{7\sqrt{2}}{8} < \frac{-5}{6a} < \frac{7\sqrt{2}}{8}$$

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{8} < 9$$

$$\frac{5 \cdot 7\sqrt{2}}{24} < 9$$

$$a > \frac{10\sqrt{2}}{24}$$



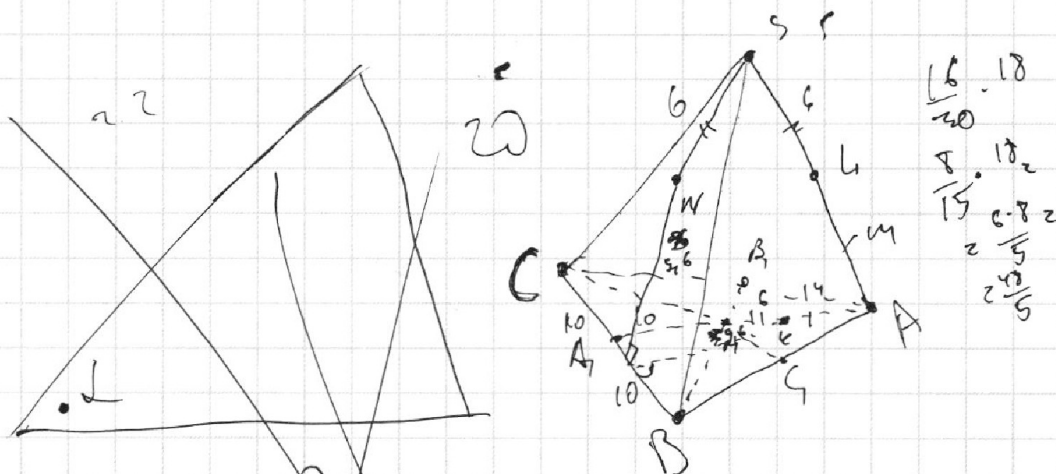
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



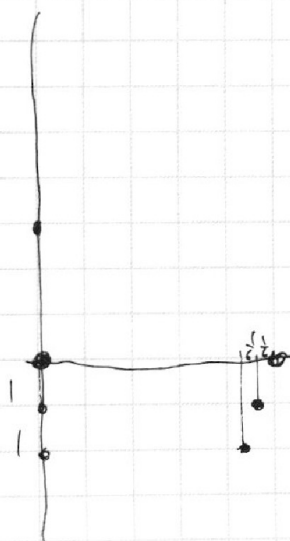
$$400 = 900 +$$

$$100 = 225 + 121 - 2 \cdot 15 \cdot 11 \cdot \cos \angle$$

$$\cos \angle = \frac{246}{2 \cdot 15 \cdot 11} = \frac{123}{15 \cdot 11} = \frac{41}{55}$$

$$\frac{20}{\sin \angle} = 18 \quad \sin \angle = \frac{5}{4}$$

$$\frac{(55-41)(55+41)}{55^2} = \frac{14 \cdot 96}{55^2}$$



$$6x^2 - 6x + y_1 - y = 48$$

$$y = 48 - 6x + 6x_2 + y_2 - 48$$

$$y = -6x - 48 + (6x_2 + y_2)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

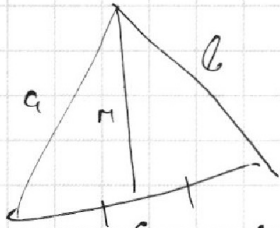
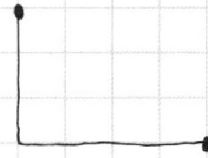
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

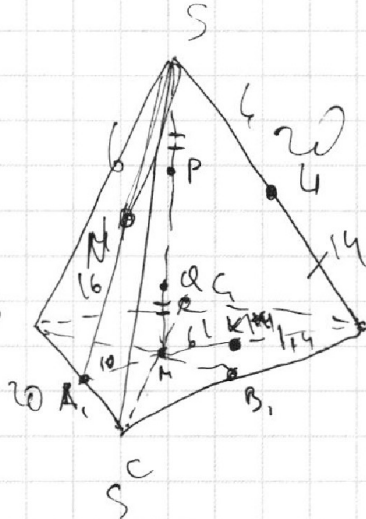


$$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$$



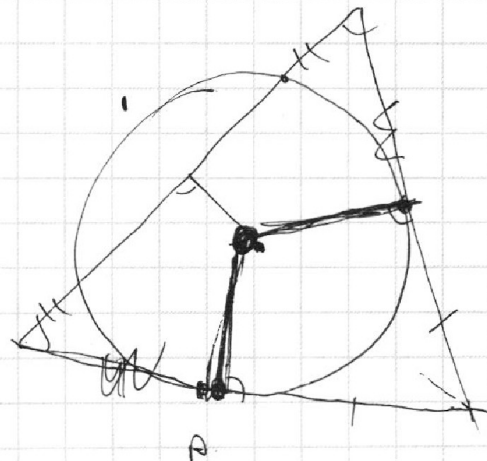
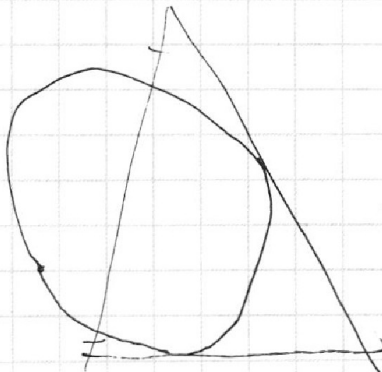
$$2h^2 + \frac{c^2}{2} = a^2 + b^2$$

$$h^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}$$



$$AA_1 = 30$$

$$(a^2 + b^2 - c^2) \cdot (a^2 + c^2 - b^2)$$



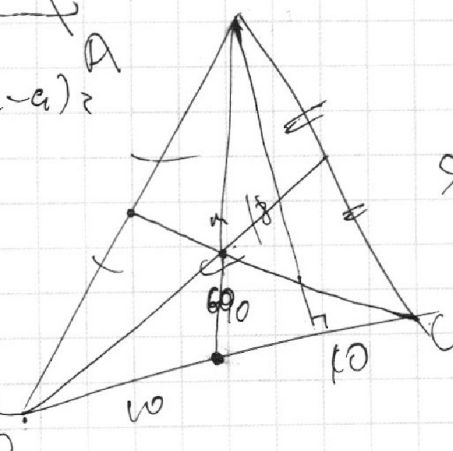
$$(a+b-c)(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b) =$$

$$= (a^2 - (b-c)^2)((b+c)^2 - a^2)$$

$$\frac{2}{3} \cdot 180 = BM \cdot MC = \frac{4}{9} \cdot BB_1 \cdot CC_1$$

$$120$$

$$9 \cdot \frac{120}{4} = 270 \cdot 30 = 8100$$



$$S = 180$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

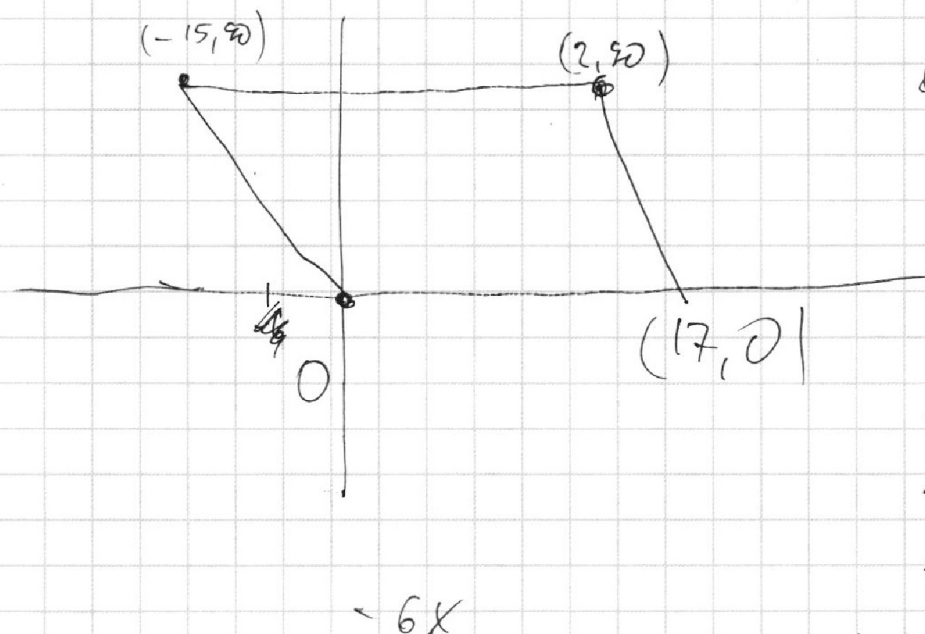
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y = -6x - 48 + (6x_0 + y_0)$$



$$6x_0 + y_0 = C$$

$$y_0 = -6x_0 + C$$

$$6 \cdot 2 + 90 = 102$$

$$= 6x + 102 - 48 =$$

$$= 6x + 54$$

$$\begin{array}{r} 27 \cdot 2 \\ 6 \cdot 9 \end{array}$$

$$x = 9$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

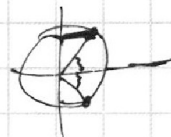


$$5a^2b^2 \geq a^2b + b^2a + 2a^2b^2$$

$$3a^2b^2 + 5 \geq ab(a^2 + b^2)$$

$$ab(3ab - a^2 - b^2) + 5 \geq 0$$

$$ab(ab - (a-b)^2) + 5 \geq 0$$

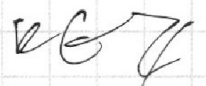


$$\sin x \geq \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$10 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) \geq 9\pi - 2x$$

$$10\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) \geq 9\pi - 2x$$

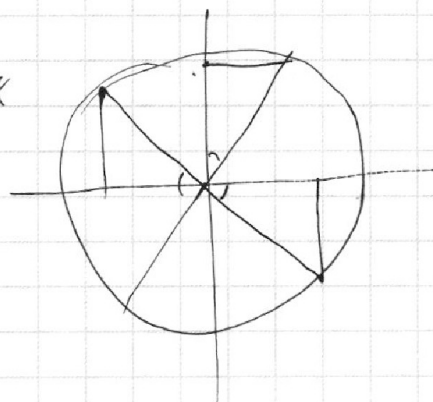
$$10\left(x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \geq 9\pi - 2x$$



$$5\pi - 10x + 20\pi k \geq 9\pi - 2x$$

$$8x \geq 20\pi k - 4\pi$$

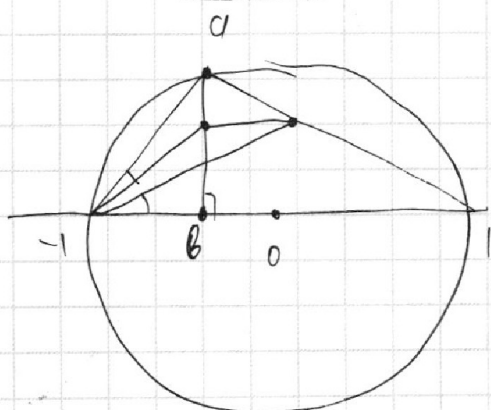
$$x \geq \frac{5}{2}\pi k - \frac{\pi}{2}$$



$$10x - 5\pi + 20\pi k \geq 9\pi - 2x$$

$$12x \geq 14\pi - 20\pi k$$

$$x \geq \frac{7}{6}\pi - \frac{5}{3}\pi k$$



$$\frac{a-b}{2} = (\bar{a}-\bar{b}) \quad \bar{b} = b$$

$$a-b = -\frac{1}{a} + b$$

$$2b = a + \frac{1}{a} \Rightarrow b = \frac{a^2 + 1}{2a}$$

$$b = \frac{a^2 + 1}{2a}$$



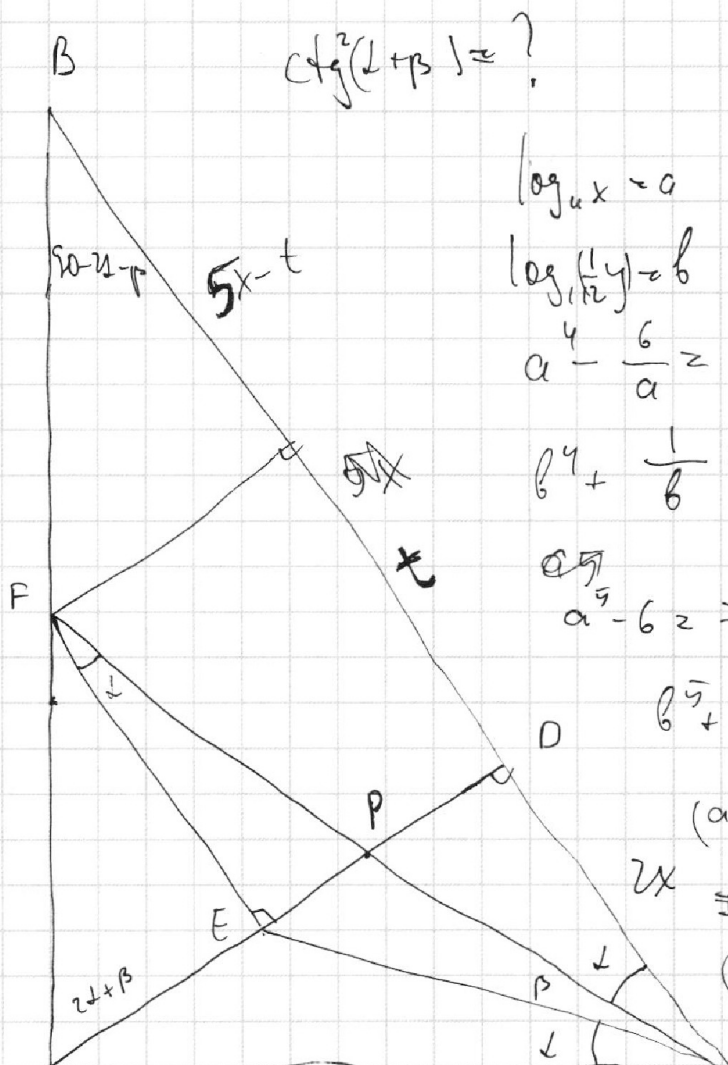
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ctg^2(2+\beta) = ?$$

$$\log_a x = a \quad a+b = ?$$

$$\log_{1/2} y = b$$

$$a^4 - \frac{6}{a} = \frac{-2}{3a} - 5$$

$$b^4 + \frac{1}{b} = \frac{-13}{3b} - 5$$

$$a^5 - 6 = \frac{-2}{3} - 5a$$

$$b^5 + 1 = \frac{-13}{3} - 5b$$

$$(a^5 + b^5) + 5(a+b) \neq$$

$$2x \neq 0$$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 5) \geq 0$$

$$(a+b) \geq 0 \quad 5a^2b^2 + 5 \geq (a+b)^2 ab \quad A$$

$$(a^4 + b^4 - ab(a^3 + b^3) + a^2b^2 + 5) \geq 0$$

$$(a^2 + b^2)^2 - ab(a^3 + b^3) - a^2b^2 + 5 \geq 0$$

$$(p^2 - 2q)^2 - q(p^2 - 2q) - q^2 + 5 \geq 0$$

$$(p^2 - 2q)^2 - p^2q + 2q^2 - q^2 + 5 \geq 0$$

$$p^4 - 4p^2q + 4q^2 + q^2 - p^2q + 5 \geq 0$$

$$a+b = p, ab = q$$

$$p^4 - 5p^2q + 5q^2 + 5 \geq 0$$

$$p^2(p^2 - 5q) + 5q^2 + 5 \geq 0$$

$$(a+b)^2 - 5ab$$

$$(a-b)^2 - ab$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

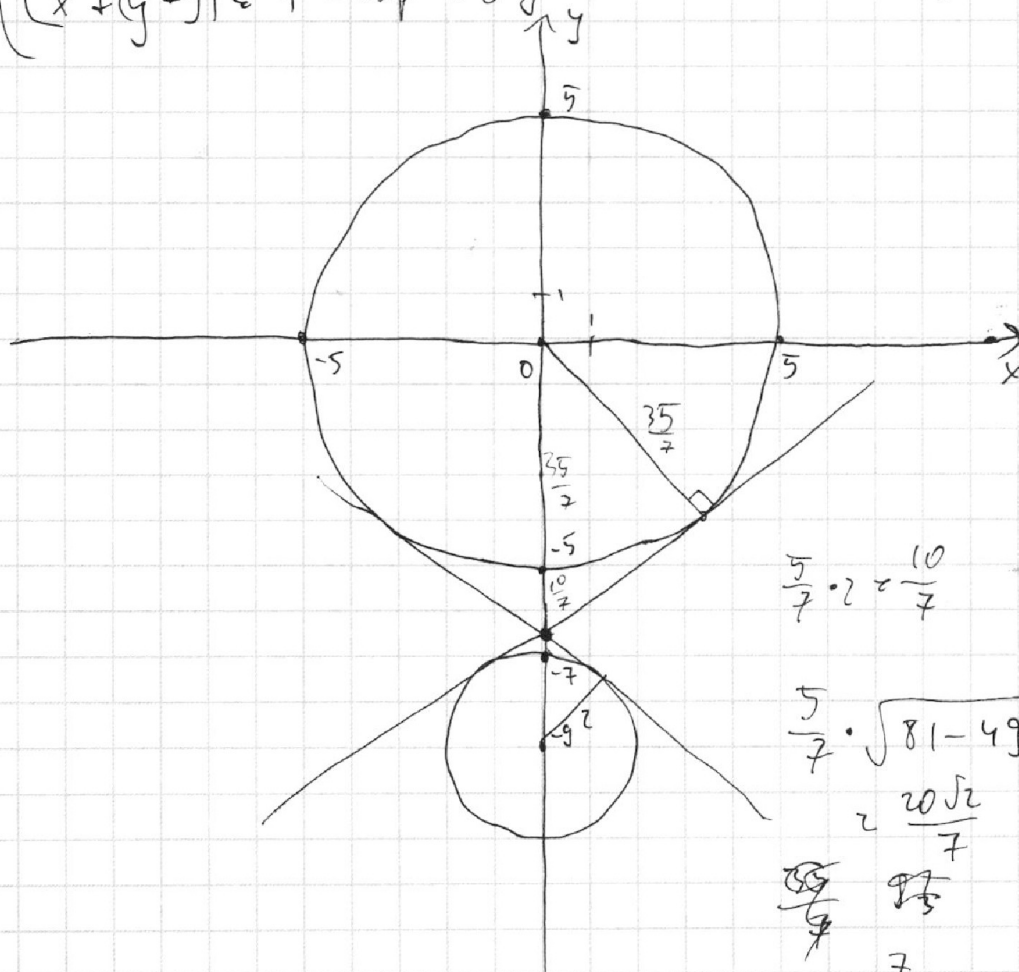
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 5x + 6ay - 6 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + (y+9)^2 - 4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{-5x+6}{6a}, a \neq 0 \text{ если } a \geq 0, \text{ то } 5x = 6 \\ x^2 + y^2 = 25 - \text{окр-ть с ц. } (0,0) \text{ и } R=5 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 - \text{окр-ть с ц. } (0,-9) \text{ и } R=2 \end{cases}$$

$x = \text{const}$
раздели
отдельно



$$\frac{5}{7} \cdot 2 = \frac{10}{7}$$

$$\frac{5}{7} \cdot \sqrt{81 - 49} =$$

$$= \frac{20\sqrt{2}}{7}$$

$$\frac{20\sqrt{2}}{7}$$

$$\frac{7}{\sqrt{32}} = \frac{7\sqrt{2}}{8}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

an

$$abc^2 : 2^{6+14+16} \cdot 3^{13+21+25} \cdot 5^{13+11+28}$$
$$= 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$$
$$abc \geq 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14}$$
$$a \geq 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{14}$$
$$b \geq 2^2 \cdot 3^8 \cdot 5^0$$
$$c \geq 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14}$$
$$a+b=11$$
$$b+c=13$$
$$a+c=28$$
$$a+b \geq 13 \text{ (14)}$$
$$a+c \geq 25$$
$$b+c \geq 21$$
$$a > b$$
$$a-b=4$$
$$a+b=14$$
$$c=16$$
$$a+b=26+14=14$$
$$b+2=7$$
$$b=5$$
$$a=9$$