



$$AB^2 + AC^2$$

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



$$(2AC^2 - AB^2)(2AB^2 - AC^2) + 2BC^2(2AC^2 - AB^2) + 2BC^2(2AB^2 - AC^2) + 2BC^4$$

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

$$2BC^2(2AC^2 - AB^2 + 2AB^2 - AC^2)$$

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

$$BC^2 \cdot 3AB^2 / (AC^2 + AB^2)$$

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

$$5AB^2 \cdot AC^2 - 2AC^4 - 2AB^4$$

имеет ровно 4 решения.

$$AB^2 AC^2 - 2(AB^4 + AC^4 - 2AB^2 AC^2)$$

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $a \cdot b = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot t$ $abc - \min$

① $bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \cdot k$

③ $ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \cdot m$

$\frac{b}{a} = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{3^{14}} \cdot \frac{1}{5^{15}} \cdot \frac{k}{m}$

$m \cdot 2^2 \cdot 3^{14} \cdot 5^{15} \cdot b = ak$

$m \cdot 2^2 \cdot 3^{14} \cdot 5^{15} \cdot b^2 = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot t$; $m \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot b^2 = 2^4 \cdot t \Rightarrow t : 5^4 \cdot 3 \Rightarrow$

AA

$\Rightarrow ab = 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{15} \cdot t_1$

$a = 2^4 \cdot 3^9$
 $b = 2^2 \cdot 3^5$
 $c = 2 \cdot 3^{15}$

② $ab = 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{15} \cdot t_1$

①③:② $\frac{a^2 \cdot c \cdot b}{bc} = \frac{2^2 \cdot 3^{30} \cdot 5^{43} \cdot t_m}{2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \cdot k} = 2^8 \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \cdot \frac{t_m}{k}$

$k \cdot t_m = 2^8 \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \cdot t \cdot m$ if $a : 5^{30}$, $m a : 5^{15}$

①②③ = $abc = 2^{36} \cdot 3^{60} \cdot 5^{28 \cdot 2} \cdot t_1 k m$, $291 \neq 1 km \neq 1$

$\Rightarrow abc - \min = 2^{36} \cdot 3^{60} \cdot 5^{28 \cdot 2} \Rightarrow abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

по условию $\begin{cases} a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{15} \\ b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0 \\ c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{13} \end{cases}$

$\begin{cases} a \cdot b = 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{15} \\ bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \\ ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \end{cases}$

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\boxed{N2} \quad \arccos(\sin X) = \frac{9\pi - 2X}{10} \Rightarrow -1 \leq \frac{9\pi - 2X}{10} \leq 1$$

$$\sin X = \cos(0,9\pi - 0,2X)$$

$$\begin{aligned} -10 &\leq 9\pi - 2X \leq 10 \\ \frac{9\pi - 10}{2} &\leq X \leq \frac{9\pi + 10}{2} \end{aligned}$$

$$\sin X = \cos 0,9\pi \cdot \cos 0,2X + \sin 0,9\pi \cdot \sin 0,2X$$

$$\sin X = -\cos(0,1\pi + 0,2X) = -\cos 0,1\pi \cdot \cos 0,2X + \sin 0,1\pi \cdot \sin 0,2X$$

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

AB пер. ω в т. X.

$AB \parallel EF \Rightarrow \angle AEF = \angle FAB$ - попарно $\Rightarrow \angle EAB = \angle FXA = \angle C = \angle CAF$ - т.к. CA - кас. ω .

$\angle CEF = \angle CDB = x^\circ$ - сопр. при CD-кас.
 $\angle CFE = \angle CBD$ - сопр. при CF-кас.

$$\angle CAF = \angle C = \angle CAE + \angle EAF =$$

$$= \angle C = \angle FAB + \angle EAF$$

$$\angle CAE = \angle FAB.$$

CD - выс. перп. Δ -ка $\Rightarrow \angle ACD = \angle CBD$
 $\Delta ACD \sim \Delta BCD \sim \Delta ABC$

$$\left. \begin{array}{l} \angle CAE = \angle FAB \\ \angle ACE = \angle FBA \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta AEC \sim \Delta ABF \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CE}{FB}, \text{ т.к.}$$

$$\frac{AC}{AB} = \sin C = \frac{CE}{CF} = \frac{CE}{FB} \Rightarrow CF = FB = \frac{1}{2} BC$$

$$BD = x \Rightarrow AB = 0,4x. \quad CD^2 = AD \cdot DB = 0,16x^2 \Rightarrow \text{По т. Пифагора:}$$

$$\Delta ACD: AD^2 + CD^2 = AC^2 = 0,16x^2 + 0,16x^2 = 0,32x^2$$

$$\Delta CDB: CD^2 + BD^2 = BC^2 = 0,16x^2 + x^2 = 1,16x^2 \Rightarrow CF^2 = \frac{1}{4} BC^2 = \frac{1,16}{4} x^2$$

$$\Delta CEF \sim \Delta CDB \sim \Delta ADC \Rightarrow \Delta CEF \sim \Delta ADC \Rightarrow \frac{S_{\Delta ADC}}{S_{\Delta CEF}} = \left(\frac{AC}{CF} \right)^2 = \frac{0,32 \cdot 4}{1,16} =$$

$$= \frac{1,28}{1,16} = \frac{8}{5}$$

Ответ: $\frac{8}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1.
$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 16y + 77) = 0 \end{cases}$$

1. $x^2 + y^2 = 25$. Подходят пары $(x; y); (-x; -y); (-x, y); (x, -y)$.

если $x = 0$. $y = \pm 5$.

$$\begin{cases} 6 \cdot 5a - b = 0 \\ -6 \cdot 5a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 0, b = 0.$$

аналог. если $y = 0$. $x = \pm 5$.

Если иначе: $\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ -5x - 6ay - b = 0 \end{cases} \Rightarrow b = 0. \quad 5x + 6ay = 0. \quad a = \frac{-6y}{5x}, \text{ но } x \neq 0$
 потому имеют разные знаки $a = \emptyset$

2. $x^2 + y^2 + 16y + 77 = 0$

$$x^2 + (y+8)^2 = 4. \quad |x| \leq 2. \quad |y+8| \leq 2 \Rightarrow -10 \leq y \leq -6. \quad x, y \neq 0.$$

если есть пара $(x; y)$ то есть $(-x; y)$

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ -5x + 6ay - b = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 - \text{не подходит} \Rightarrow a = \emptyset$$

ответ: $a = \emptyset$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



5) $\log_x \frac{1}{11} = -2 \log_x 11 = -\frac{2}{3} \log_x 11$. $\log_x 11 = \frac{1}{m}$. $x = \sqrt[3]{11}$

тогда: $\log_x 11 = \frac{1}{m}$. $\log_{11} x = \frac{1}{m}$. $x = \sqrt[3]{11}$

$$\left(\frac{1}{m}\right)^4 - 6m = -\frac{2}{3}m - 5 \quad | \cdot 3m^4$$

$$3 - 18m^5 = -2m^5 - 15m^4$$

$$16m^5 - 15m^4 - 3 = 0 \quad \text{①}$$

$\log_y 11 = n$.

$y = \sqrt[3]{11}$

$$\left(\frac{1}{n}\right)^4 + n = -\frac{13}{3}n - 5 \quad | \cdot 3n^4$$

$$(y^3)^n = \sqrt[3]{11}$$

$$y = \sqrt[3]{11}$$

$$3 + 3n^5 = -13n^5 - 15n^4$$

$$16n^5 + 15n^4 + 3 = 0, \text{ ②}$$

$$xy = 2 \sqrt[3]{11} \cdot 11^{\frac{1}{m}} = 2 \cdot 11^{\frac{m+n}{mn}}$$

$$\text{①} + \text{②} \quad 16(m^5 + n^5) + 15(n^4 - m^4) = 0$$

$$(n^2 - m^2)(n^2 + m^2)$$

$$(n-m)(n+m)(n^2+m^2)$$

$$(m+n) \left(16(m^4 + n^4) + 15(n-m)(n^2+m^2) \right) = 0$$

1) $m = -n \Rightarrow xy = 2 \cdot 11^0 = 2$

$$2) 16(m^4 - m^3n + m^2n^2 - mn^3 + n^4) = 15(m-n)(n^2+m^2) = 15(mn^2 + m^3 - n^3 - nm^2)$$

$$16m^4 - 16m^3n + 16m^2n^2 - 16mn^3 + 16n^4 = 15mn^2 + 15m^3 - 15n^3 - 15nm^2$$



МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

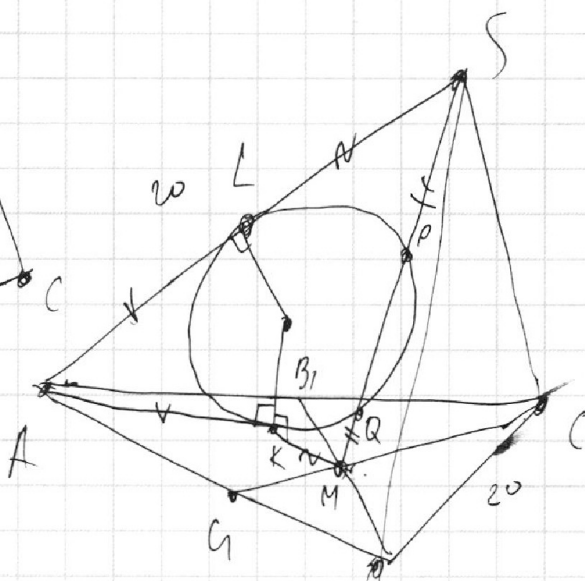
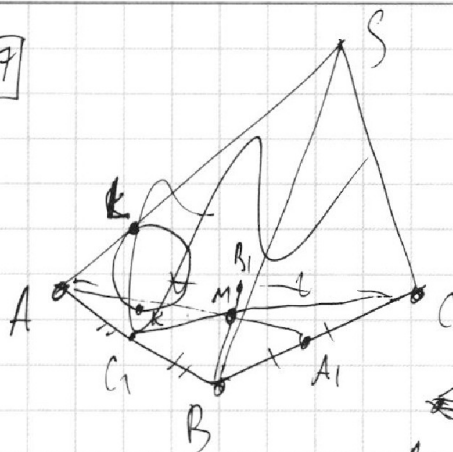
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

7



$$S_{ABC} = 180. SA = BC = 20$$

По Q -е ~~гипотенуз.~~

$$\begin{aligned} AC_1^2 &= 2(AB^2 + AC^2) - BC^2 \\ AA_1^2 &= 2(AC^2 + AB^2) - BC^2 \\ BB_1^2 &= 2(AB^2 + AC^2) - AC^2 \end{aligned}$$

$$AL = AK - \text{кас. } \angle$$

т.т. М и Н. $\angle$: $MK^2 = MA \cdot MP \Rightarrow MP = SP$ по улу.

т.т. S и M. $\angle$: $SP^2 = SP \cdot SQ \Rightarrow QP \cdot SQ \Rightarrow QP + MQ = QP + SP \Rightarrow MP = SQ \Rightarrow MK = SQ \Rightarrow$

$$AM = AS = 20 \Rightarrow AA_1 = \frac{2}{3} AM \text{ (пер. мед. гипот. мед. 2:1)} \Rightarrow AA_1 = 30$$

т. пер. мед. гипот. мед. 2:1 $\Rightarrow S_{\triangle AMB} = 2MA_1 = \frac{AA_1}{AM} = 10 = \frac{1}{2} BC = BA_1 = AC_1$

$\Rightarrow \triangle AMB$ - прям., т.к. мед. $= \frac{1}{2}$ гипот.

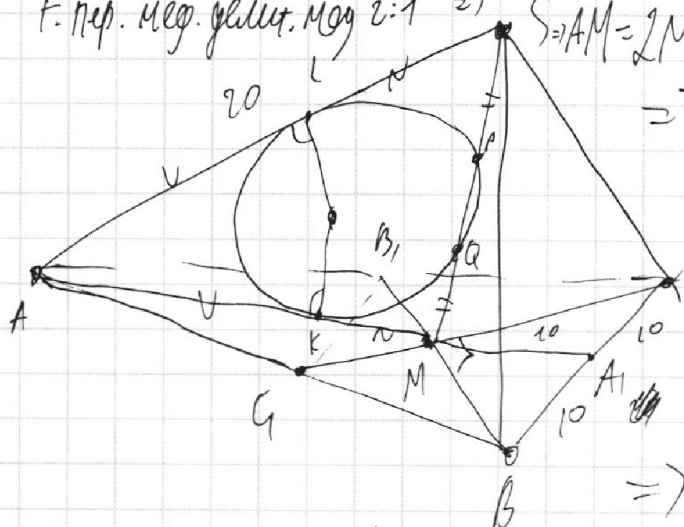
$$S_{\triangle B_1C_1B} = \frac{1}{2} BB_1 \cdot CC_1 \cdot \sin 90^\circ = \frac{1}{2} BB_1 \cdot CC_1$$

$$S_{\triangle B_1C_1B} = S_{ABC} - S_{\triangle A_1B_1C_1}, \text{ но}$$

B_1C_1 - пер. медиана $\Rightarrow S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{1}{4} S_{ABC} \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_{\triangle B_1C_1B} = \frac{3}{4} S_{ABC} = 135 = \frac{1}{2} BB_1 \cdot CC_1$$

$\Rightarrow BB_1 \cdot CC_1 = 270. AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 30 \cdot 270 = 8100. \text{ Ответ: } 8100$





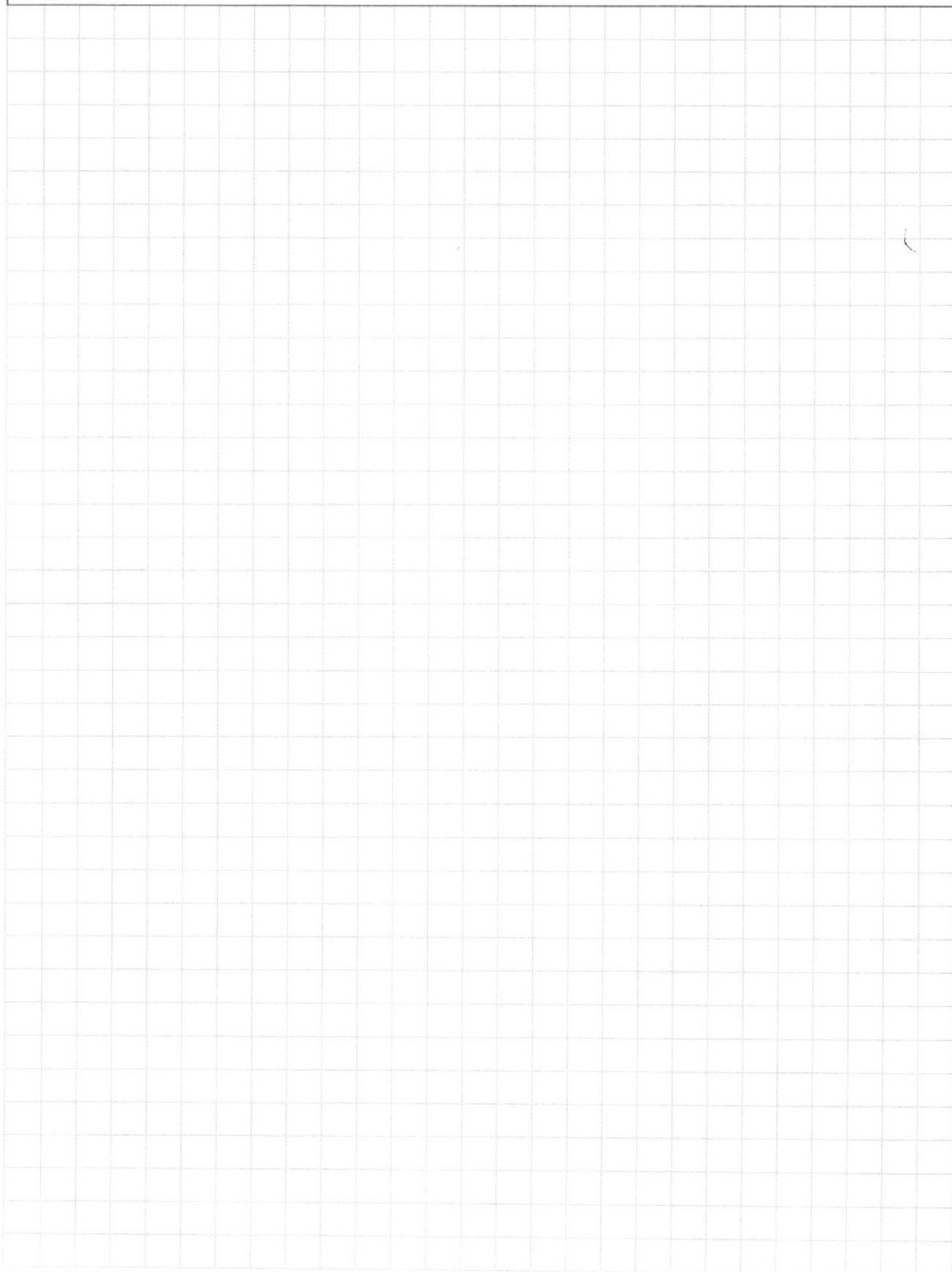
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





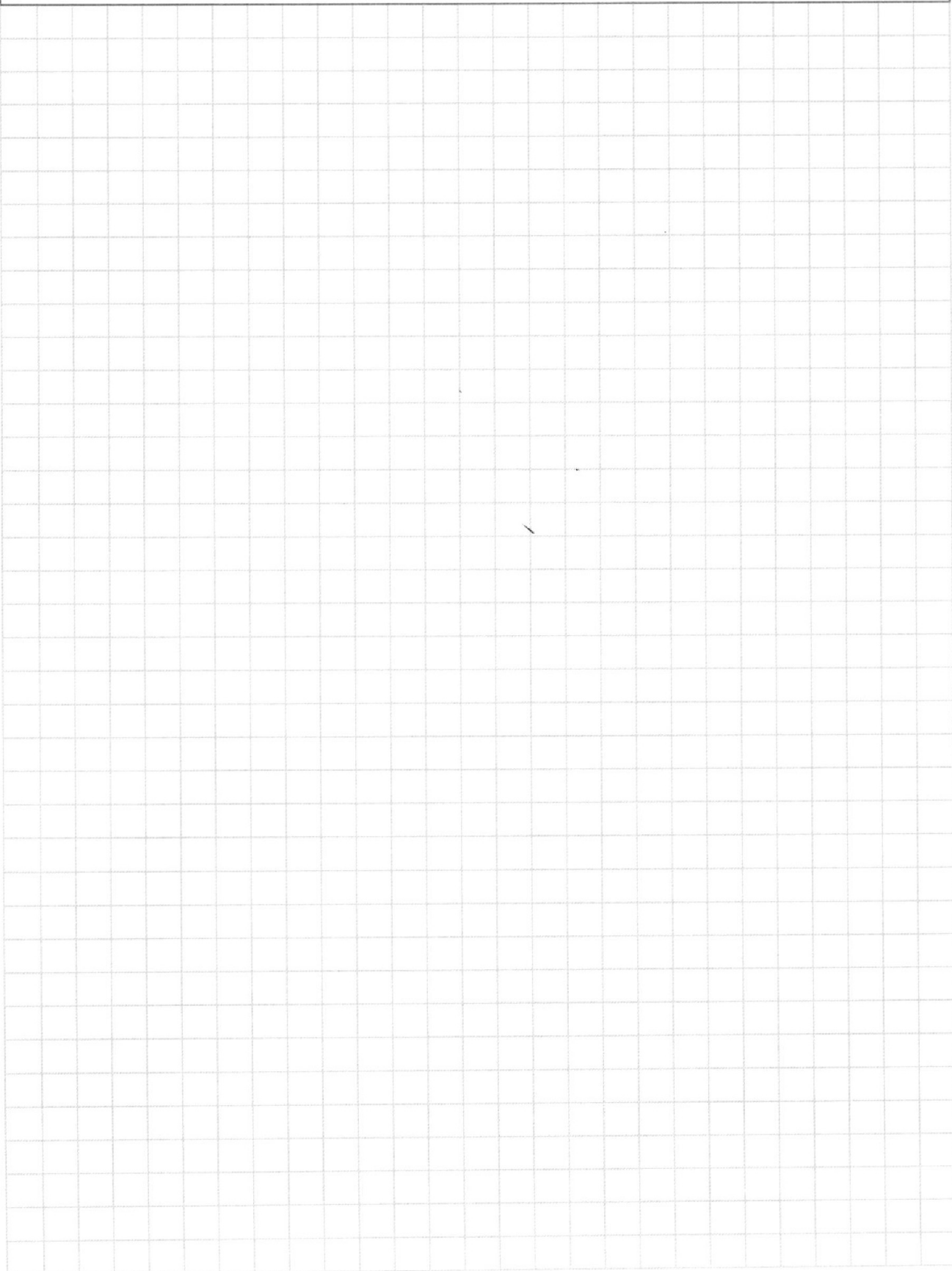
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





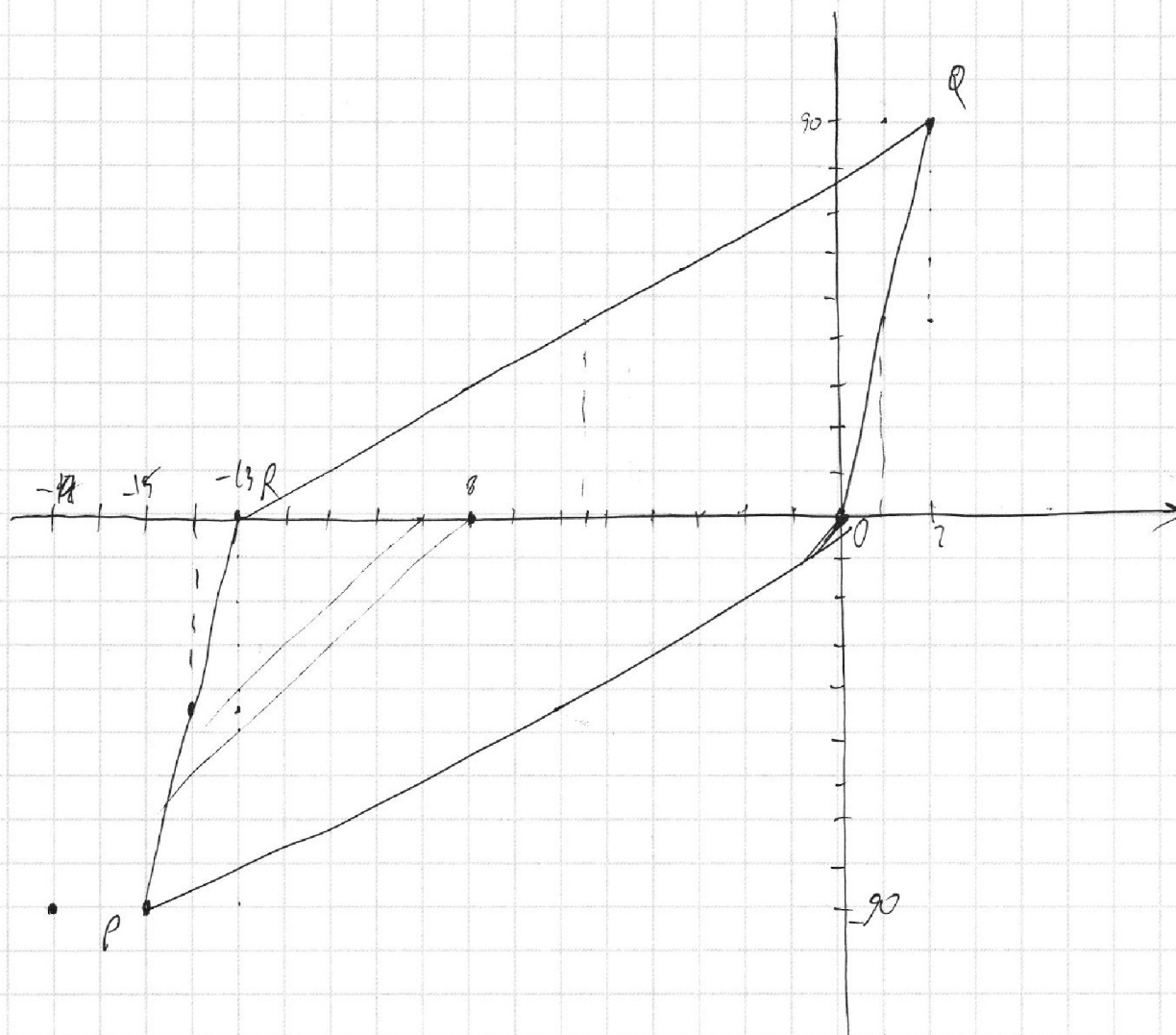
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





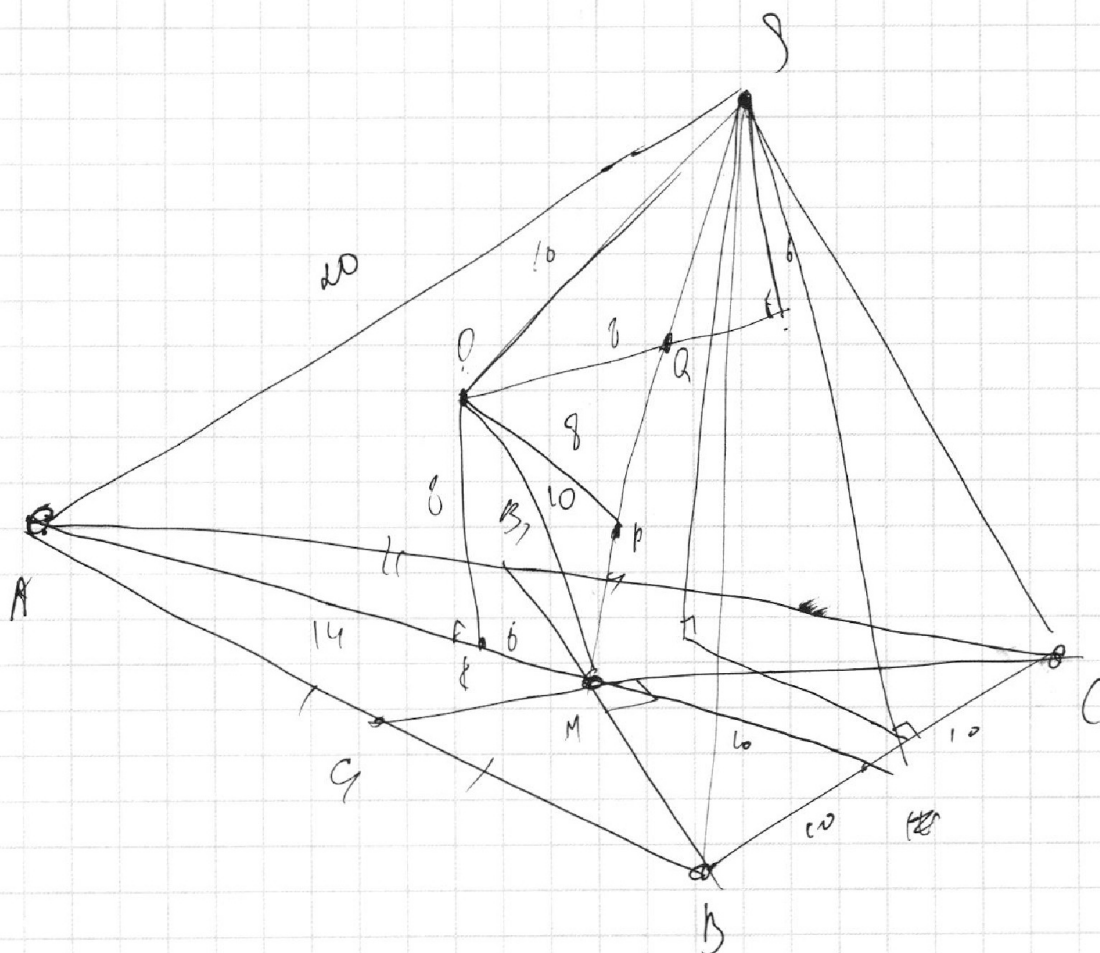
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

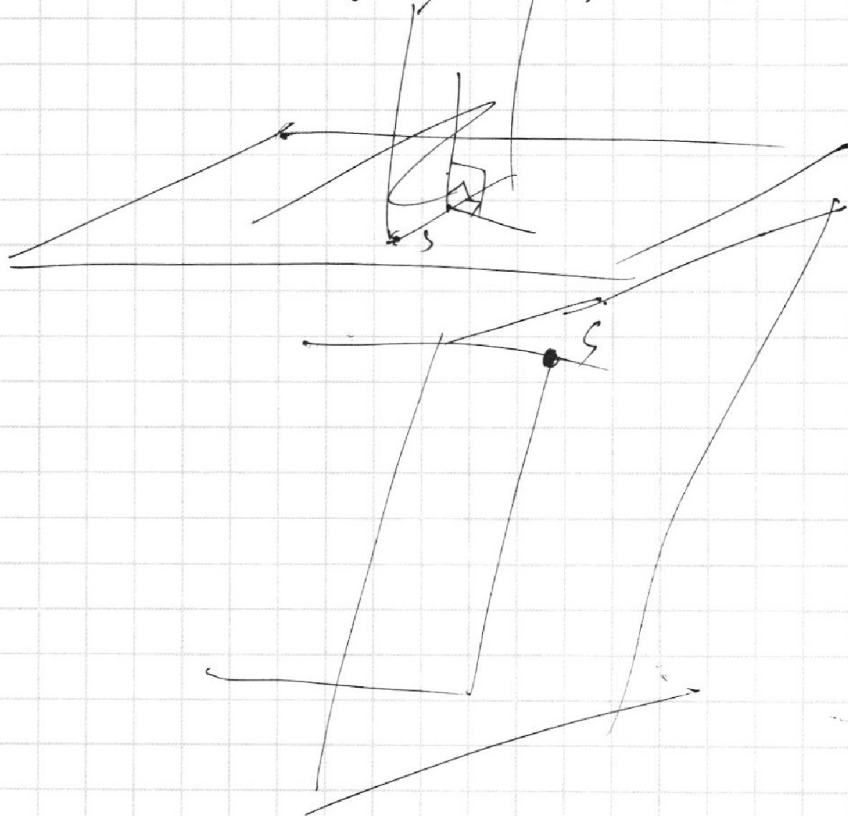
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$m^5 + a^5 = (m+a)(m^4 - m^3a + m^2a^2 - ma^3 + a^4)$$
$$m^5 - m^4a + m^3a^2 - m^2a^3 + ma^4$$

$$m^5 + a^5 = (m+a)(m^4 - m^3a + m^2a^2 - ma^3 + a^4)$$
$$- m^4a + m^3a^2 - m^2a^3 + ma^4$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

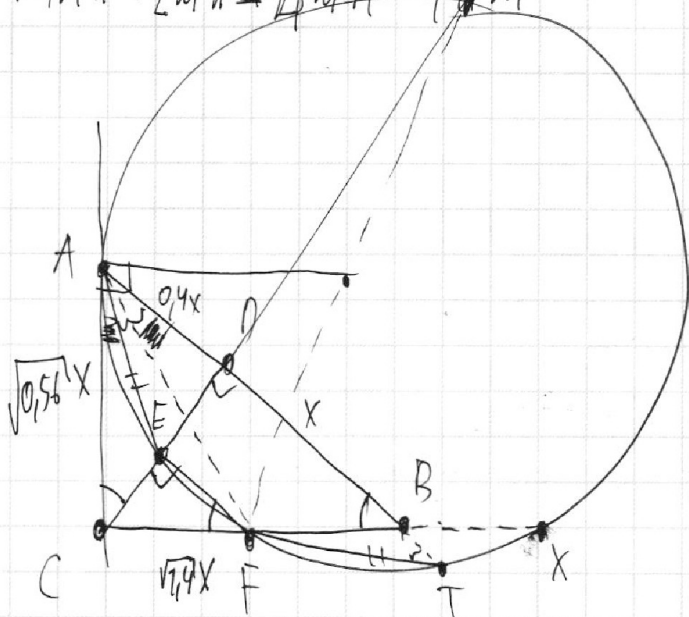
$$m^4 + n^4 + 4m^2n^2 + 2m^2n^2 - 4n^3m$$

$$20^2 - 14$$

$$80 + 8 = 88$$

$$196$$

$$\begin{array}{r} 196 \\ \times 12 \\ \hline 392 \\ 1960 \\ \hline 2352 \end{array}$$



$$\begin{array}{l} 10^2 - x^2 \\ 10^2 - y^2 \end{array}$$

$$CD = 0.4x^2 \Rightarrow CD = \sqrt{0.4}x$$

$$\frac{\sin(\angle)}{AE} = \frac{\sin(90 - \xi)}{AC}$$

$$\frac{\cos \xi}{AC} = \frac{\sin \xi}{FB}$$

$$\frac{(m+n)(m^2 - mn + n^2)}{m^3 - m^2n + mn^2 - mn^2}$$

$$\frac{\sin(\angle)}{FT} = \frac{\sin \xi}{FB} \frac{(m-n)^2}{(m^2 + n^2 - 2mn)^2}$$

$$\frac{FB}{AC} = \tan \xi = \frac{ED}{AD}$$

$$\sin(\angle) = \frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BF}$$

$$(m^3 + n^3) = (m+n)(m^2 + mn + n^2)$$

$$\frac{CE}{BF} = \frac{ED}{BF}$$

$$m^3 + m^2n + mn^2 - nm^2 - mn^2 - n^3$$

$$m^5 + n^5 = (m+n)(m^4 - mn^4 - nm^4 + n^5)$$

$$m^5 + n^5 = (m+n)(\dots)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

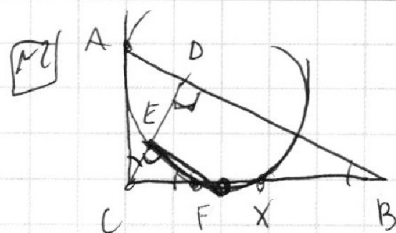
Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AB = 1,4 BD$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = ?$$

$$EF \parallel BD \Rightarrow \angle CEF = \angle CDB = 30^\circ$$

$$\angle EFC = \angle DBC =$$

Стороны при $EF \parallel BD$,
 CD и BC — соответств.

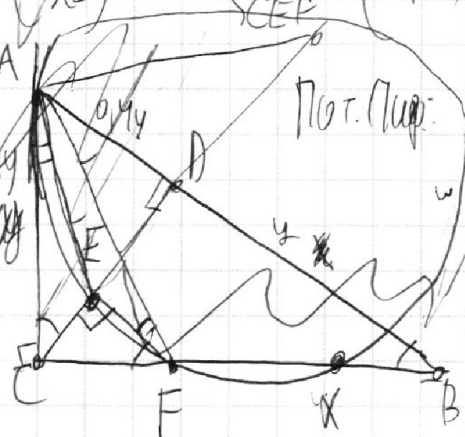
$$CD \parallel BC \Rightarrow \angle ACD = \angle ABC = \angle CFE \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle CFE$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{кр}^2 \\ \text{кр}^2 \end{array} \right. BD \cdot AB = BC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{1,4} BD = \sqrt{1,4} y$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{BCD}} = \left(\frac{AC}{BC} \right)^2$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \left(\frac{AC}{CF} \right)^2$$

$$\frac{S_{CEF}}{S_{BCD}} = \frac{CF^2}{BC^2}$$



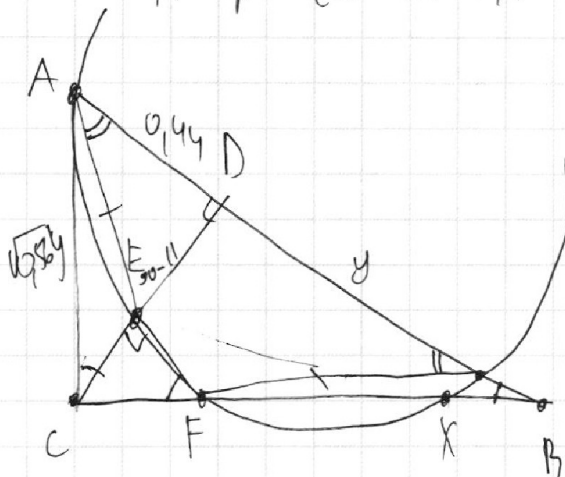
$$CD^2 = BC^2 - BD^2 = 0,4 BD^2$$

$$CD = \sqrt{0,4} y$$

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 = 0,16 y^2 + 0,4 y^2 = 0,56 y^2$$

$$AC = \sqrt{0,56} y$$

$$\text{Г-Т-С от Н. Окр: } CA^2 = CF \cdot CX = 0,56 y^2$$



$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(60 - 30) = \cos 60 \cdot \cos 30 + \sin 60 \cdot \sin 30$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$