



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



✂ [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

✂ [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

✂ [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

✂ [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

✂ [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^7 3^{11} 5^{14}$$

$$bc: 2^{13} 3^{15} 5^{18}$$

$$ac: 2^{14} 3^{17} 5^{43}$$

d_i - макс. степень двойки на
которую делится i , где i это
 a, b, c .
аналогично e_i - макс ст. тройки,
а f_i - макс степень 5-ки

по условию:

$$\begin{cases} d_a + d_b \geq 7 \\ d_b + d_c \geq 13 \\ d_a + d_c \geq 14 \end{cases}$$

$$2d_a + 2d_b + 2d_c \geq 34$$

$$d_a + d_b + d_c \geq 17. \Rightarrow abc: 2^{17}$$

$$\begin{cases} e_a + e_b \geq 11 \\ e_b + e_c \geq 15 \\ e_a + e_c \geq 14. \end{cases}$$

$$2(e_a + e_b + e_c) \geq 43$$

$$e_a + e_b + e_c \geq 21,5; \text{ так как } a, b, c - \text{натур.} \Rightarrow e_a + e_b + e_c -$$

$$\text{это целое, не отрицательное} \Rightarrow e_a + e_b + e_c \geq 22. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow abc: 3^{22}$$

$$f_a + f_c \geq 43 \Rightarrow abc: 5^{43}$$

$$e_a + e_c \geq 43 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43} \text{ (по дек.)}$$

если $b = 3^5 \cdot 2^3$; $a = 3^7 \cdot 2^4 \cdot 5^{21}$; $c = 3^{10} \cdot 2^{10} \cdot 5^{22}$, то
 $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$, все условия выполняются, меньше точно
нельзя

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

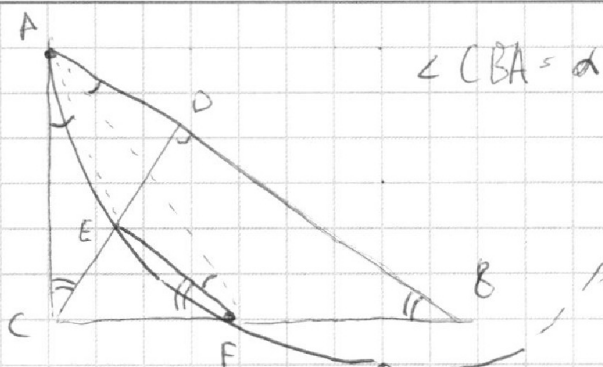
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



AC - катет $\rightarrow$
 $\Rightarrow \angle CAE = \angle EFA$ (опир. на гипот. LA)

$EF \parallel AB \Rightarrow \angle BAF = \angle AFE = \angle CAE$

$\angle ACD = \angle CBA = 90^\circ - \angle CAB$

$\Rightarrow \triangle CEA \sim \triangle BFA$ (по 2 уг.) $\Rightarrow \frac{CE}{BF} = \frac{AC}{AB}$

$\triangle ADC \sim \triangle CBD \sim \triangle ABC$ (по 2 углам) $\Rightarrow \frac{CB}{AB} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow BC^2 = AB \cdot BD$

$AB = 1,3 BD \Rightarrow BC^2 = 1,3 BD^2$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1,3} = \frac{10}{13}$$

$BA \parallel EF \Rightarrow \angle CEF = 90^\circ, \angle EFC = \alpha \Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle ABC$ (по 2 углам)

$$\cos^2 \alpha = \frac{10}{13} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{3}{13} \Rightarrow AD = \sqrt{\frac{3}{13}} \cdot AC = \frac{3}{13} AB$$

$$CD = \sqrt{\frac{3}{13}} BC = \frac{\sqrt{30}}{13} AB \Rightarrow S_{ADC} = \frac{AD \cdot DC}{2} = \frac{3\sqrt{30}}{169} \cdot \frac{AB^2}{2}$$

$$\frac{CE}{BF} = \frac{AC}{AB} = \sqrt{\frac{3}{13}}$$

$$CE = \sqrt{\frac{3}{13}} BF = (BC - CF) \sqrt{\frac{3}{13}} \Rightarrow \sqrt{\frac{3}{13}}$$

$$CE = \sqrt{\frac{3}{13}} CF$$

$$\Rightarrow CF = BC - CF$$

$$2CF = BC \Rightarrow CF = \sqrt{\frac{10}{13}} \frac{AB}{2}$$

$$CE = \frac{\sqrt{30}}{13} \cdot \frac{AB}{2}, EF = \frac{10 AB}{26}$$

$$S_{CEF} = \frac{CE \cdot EF}{2} = \frac{5\sqrt{30}}{169 \cdot 4} \cdot AB^2$$

$$\frac{S_{ADC}}{S_{CEF}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$$

Ответ: $\frac{6}{5}$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \text{ тогда если } x \in \left[+\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right], \text{ то}$$

$$5 \arccos\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = 5\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$5x - \frac{5\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + k$$

$$4x = 4\pi \quad x = \pi - \text{корень.}$$

мно-во значений $\arccos t$ тем про $[0; 5\pi]$ ⇒

$$\Rightarrow \text{нас интересует } x \text{ от } -\frac{3\pi}{2} \text{ до } \frac{7\pi}{2} \text{ (линия } \frac{5\pi}{2} \text{ - просто линия, или больше } 5\pi)$$

$$\text{если } x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right], \text{ то } 5 \arccos\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = 5\left(2\pi - x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$-6x = -\frac{25\pi}{2} + \frac{5\pi}{2}$$

$$-6x = -11\pi$$

$$x = \frac{11\pi}{6} - \text{корень.}$$

$$\text{если } x \in \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right], \text{ то } 5 \arccos\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = 5\left(x - \frac{5\pi}{2}\right)$$

$$4x = 14\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{2} - \text{корень.}$$

$$\text{если } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \text{ то } 5 \arccos\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = 5\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$-6x = -\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} - \text{корень.}$$

$$\text{если } x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right], \text{ то } 5 \arccos\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = 5\left(x + 2\pi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$4x = \frac{3\pi}{2} - \frac{15\pi}{2}$$

$$4x = -12\pi$$

$$x = -3\pi - \text{корень.}$$

$$\text{Ответ: } \pi, \frac{11\pi}{6}, 14\pi, \frac{7\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

кросс 3 ~ 4

Степень точки. $\rightarrow (4,2-5)(4,2-9) = xF^2$.

$$0,8 \cdot 4,8 = xF^2.$$

x_1 - координ. точки F. по x и y осей.

$$\begin{cases} (4,2-x_1)^2 + (4,2-x_1)^2 = 4x^2 = 0,8 \cdot 4,8 \\ (4,2-x_1)^2 + (4-(x_1+7))^2 = 0,8 \cdot 4,8 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



прод. 2. ~4.

$$\begin{aligned}
 & \text{①} \Rightarrow \frac{4-x_1^2-14x_1-49}{\sqrt{4-x_1^2-14x_1-49}} = \frac{x_1^2}{\sqrt{4-x_1^2-14x_1-49}} = \sqrt{9-x_2^2} - \frac{x_2^2}{\sqrt{9-x_2^2}} \\
 & 4-x_1^2-14x_1-49-2x_1^2 + \frac{x_1^4}{4-x_1^2-14x_1-49} = 9-x_2^2-2x_2^2 + \frac{x_2^4}{9-x_2^2} \\
 & \text{①} \Rightarrow 4-3x_1^2-14x_1-49 = 9-x_2^2-2x_2^2 \\
 & -5+3x_2^2-3x_1^2-14x_1-49 = 0 \\
 & x_2^2 = 3x_1^2+14x_1+54 \\
 & \text{②} \Rightarrow \frac{x_1^2}{4-x_1^2-14x_1-49} = \frac{3x_1^2+14x_1+54}{3(4-3x_1^2-14x_1-49)} \\
 & -22x_1^2-3x_1^4-14x_1^3 = -135x_1^2-3x_1^4-14x_1^3-54x_1
 \end{aligned}$$

новый способ: касательная к окруж. касательных:

Кривая окруж-то касательная левой окружности (возвр. - $\frac{3}{2}$ из точки пересечения, центры W и O .

т. перес. - X . центр правой - O , левой - W .

$$XW = \frac{2}{3}XO \quad \frac{5}{3}XO = 7 \quad XO = 4\frac{1}{5} \Rightarrow X = (-4\frac{1}{5}; 0)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

продолжение №4. $\Rightarrow$

если $|\frac{1}{3a}| < |\operatorname{tg} \alpha|$, то тогда а не подходит,

если $|\frac{1}{3a}| \geq |\operatorname{tg} \alpha|$, то рассмотрим параболы $y = ax^2 + bx + c$ в при которых Δ принимает все значения окружности в двух точках (если точка < 2 , то всего < 4 , т.к. прямая и окружность имеют максимум 2 т. пересек), то прямая при $x \geq -3$ будет лежать либо выше v либо ниже t (в зависимости от знака $-\frac{1}{3a}$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ если $|\frac{1}{3a}| \geq |\operatorname{tg} \alpha|$, то такой а не подходит

Итак $\operatorname{tg} \alpha$.

~~Рассмотрим функцию $f(x)$ и функцию $g(x)$ в точке x_1 и x_2 соответственно. Тогда $f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$ и $g'(x_2)(x - x_2) + g(x_2)$ являются касательными к $f(x)$ и $g(x)$ в точках x_1 и x_2 соответственно. Если $f(x) \geq g(x)$ для всех x , то $f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) \geq g'(x_2)(x - x_2) + g(x_2)$ для всех x . В частности, для $x = x_2$ имеем $f'(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_1) \geq g(x_2)$. Аналогично, для $x = x_1$ имеем $g'(x_2)(x_1 - x_2) + g(x_2) \geq f(x_1)$. Сложив эти два неравенства, получим $f'(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_1) + g'(x_2)(x_1 - x_2) + g(x_2) \geq f(x_1) + g(x_2)$, что упрощается до $f'(x_1)(x_2 - x_1) + g'(x_2)(x_1 - x_2) \geq 0$. Если $f'(x_1) = g'(x_2)$, то неравенство выполняется. Если $f'(x_1) \neq g'(x_2)$, то неравенство не выполняется. Следовательно, $f'(x_1) = g'(x_2)$.~~

Кроме след. стр.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

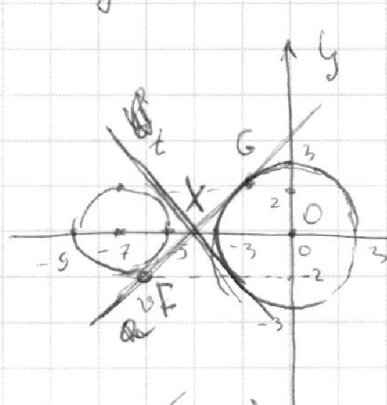
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} (x^2 + y^2 + 14x + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 & \text{или } (1) \\ x + 3ay - 7b = 0. & (2) \end{cases}$$



~~вещь~~ (1) равно нулю

если точка с коорд.

(x_1, y_1) лежит

либо на окруж. с центром $(7, 0)$

и $r = 2$ либо на окруж.

с центром $(0, 0)$ и $r = 3$.

$$x + 3ay - 7b = 0 \begin{cases} y = \frac{7b - x}{3a}, \text{ если } a \neq 0, \text{ или} \\ x = 7b, \text{ если } a = 0. \end{cases}$$

прямая t и v -касательные к кругу дуги

окружности, которые касаются друг друга так, как

это показано на графике. Присутствует симмет-
рия относительно прямой $Ox \Rightarrow |\tan \alpha| = |\tan \beta|$, где α - угол

Заметим, что благодаря параметру b

мы можем перемещать прямую,
заданную уравнением (2).

также
угол наклона t ,
а $\tan \beta$ - угол наклона
 v

Если $\tan \alpha < \frac{1}{3a}$ (макс. угол наклона прямой) $< |\tan \alpha|$, то

при подстановке такого b , что прямая проходит чрез
т. перес. v и t (м.х), ~~либо~~ при $x < 0$ ~~либо~~
прямая будет иметь выше v и ниже t , а при $x > 0$ выше t ,
но ниже $v \Rightarrow$ будет пересекать 2 окруж. в ровно 4-х точках.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4.$$

$$\frac{343}{7^3} = \frac{1}{49}$$

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \frac{3}{2} \log_{6x} 7 - 4.$$

$$\log_7^4(6x) = \frac{3.5}{\log_{6x} 7 \log_7(6x)} - 4.$$

$$\log_7^4 y = \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \log_y 7 - 4.$$

$$\log_7^4 y = \frac{17}{2} \log_y 7 - 4.$$

$$\log_7^4(6x) = \frac{7}{2} \log_{6x} 7 - 4$$

$$\log_7^5 y = \frac{17}{2} - 4 \log_2 y$$

$$\log_7^5(6x) = \frac{7}{2} - 4 \log_7(6x)$$

$$\log_7^5 6xy = 12 - 4 \log_7 6xy.$$

$$\log_7 6xy = t. \quad t^5 + 4t = 12.$$

$$t^5 + 4t - 12 = 0$$

Левое возр., правое конинз $\rightarrow$ решение.

$$(t-a)(t^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e)$$

$$b=a$$

$$a+b=0$$

$$-ae=12.$$

$$-a^2=-c$$

$$c=a^2$$

$$-4t=a^4$$

$$-ae=12.$$

$$-ab+c=0$$

$$d=a^3$$

$$e=-4a^4$$

$$-ac+d=0$$

$$-ad+e=0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

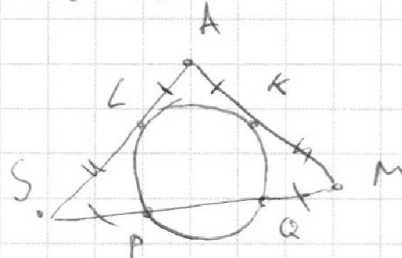
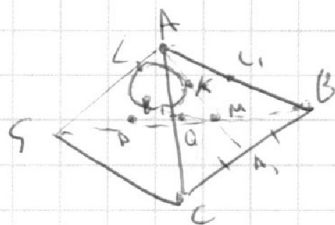
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



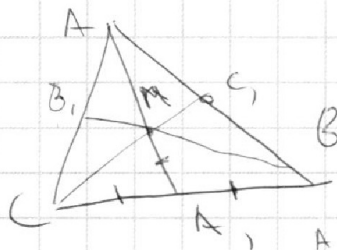
$$SA = BC = 10.$$



$$\begin{aligned} a) \quad SL^2 &= SP \cdot SQ = SP \cdot (SM - SP) \\ MK^2 &= MQ \cdot MP \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad SL = MK \Rightarrow$$

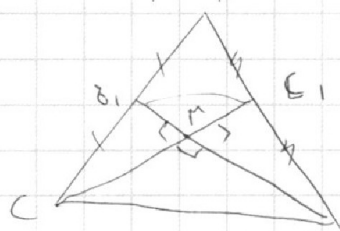
$\Rightarrow \triangle SAM$ - равноб., т.к. $AL = AK$ (отр. касаясь).

$$AM = SA = 10 \Rightarrow AA_1 = 15 = \frac{3}{2} AM \text{ (т.к. т.н. медиан делит в } \frac{2}{1})$$



$$BC = 10 \Rightarrow CA_1 = AB = AM = 5. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle CMB = 90^\circ. \Rightarrow$$



$$\frac{CM \cdot MB + CM \cdot MB_1 + BM \cdot MC_1 + MC_1 \cdot MB_1}{2},$$

$$= \frac{3}{4} S_{ABC} \text{ (т.к. } B_1C_1 \text{ - ср. линия)} \\ S_{B_1AC_1} = \frac{1}{4} S_{ABC}$$

$$\frac{CC_1 \cdot BB_1}{2} = 45$$

$$CC_1 \cdot BB_1 = 90$$

$$CC_1 \cdot BB_1 = AA_1 = 90 \cdot 15 = 1350$$



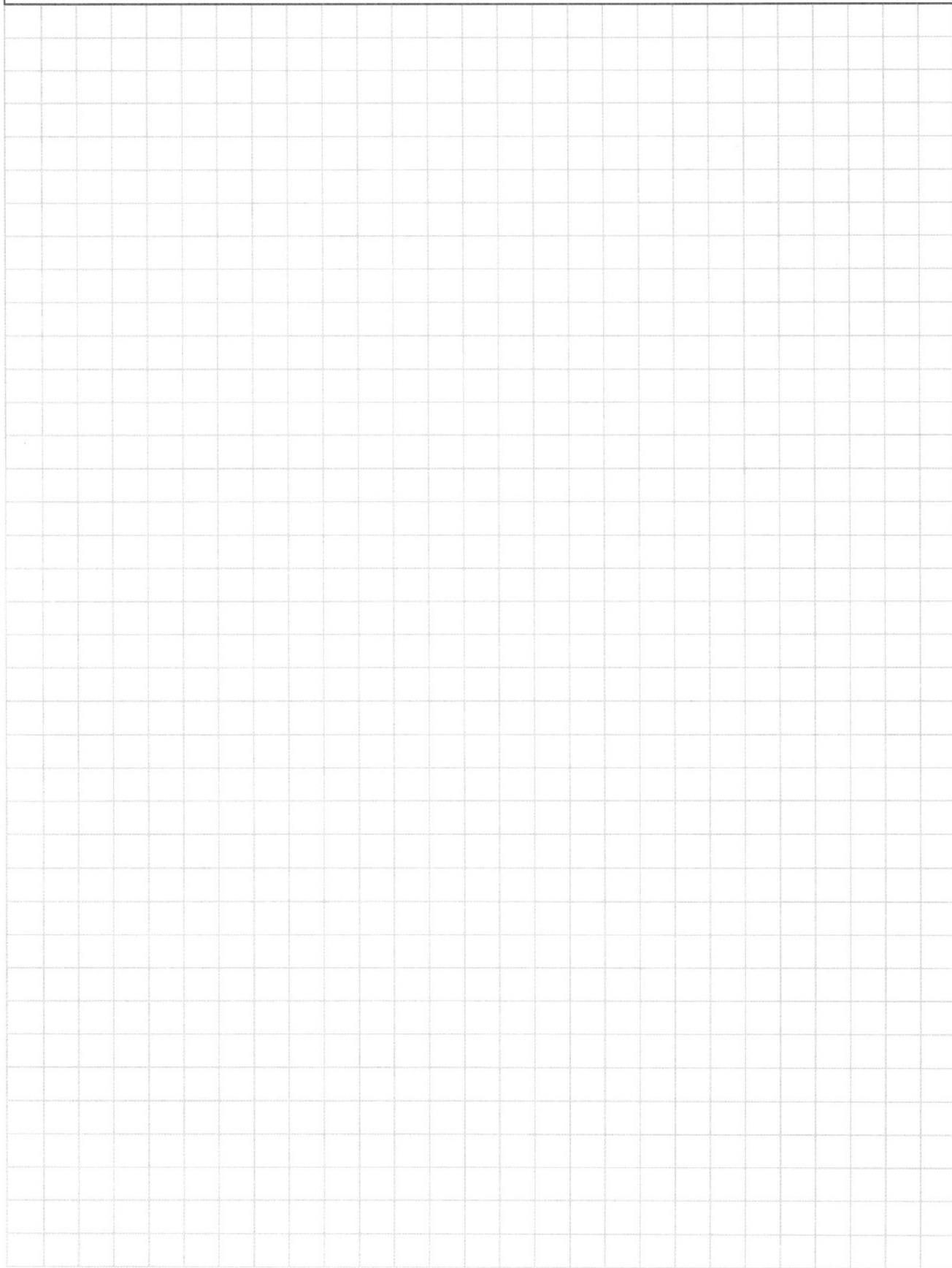
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





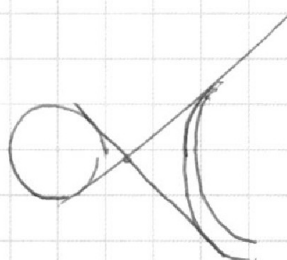
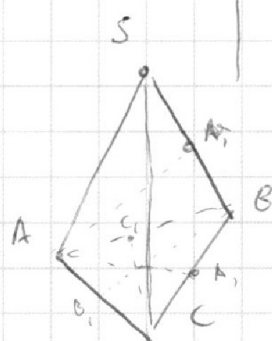
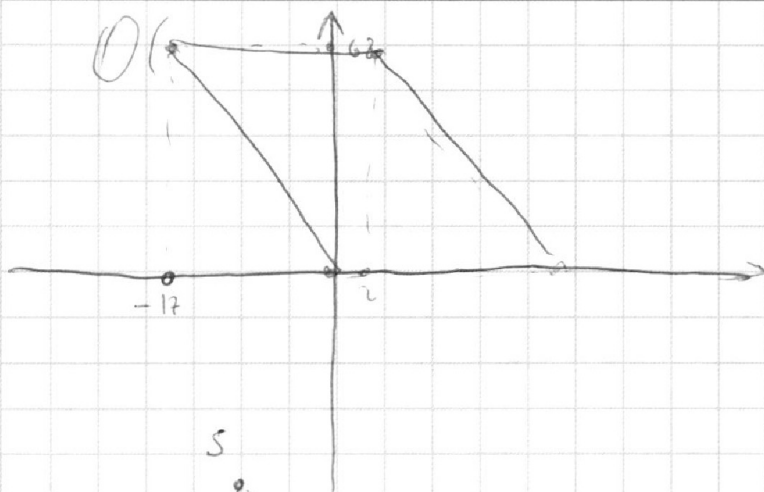
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(-3-x)(3-x) = (x+5)(x+9)$$
$$(3+x)(x-3)$$

$$x^2 - 9 = x^2 + 14x + 45$$

$$-14x = 54$$

$$x = -\frac{54}{14}$$

$$-7 ; 0 \quad \frac{3}{2}(x-7) = -x$$
$$\frac{5}{2}x = \frac{21}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

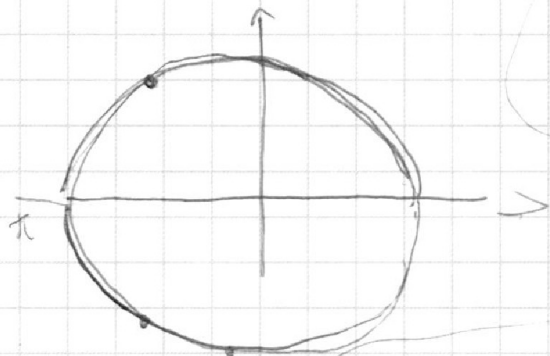
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \arccos(\sin x), 5 \arccos(\cos(x - \frac{\pi}{2}))$$

$$\arccos \alpha \in (0; \pi)$$



$$-6 \quad -2$$

$$\frac{6}{4-36+84-49} = \frac{2}{2}$$

$$2\pi -$$

$$\frac{-x_2}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$x_2^2 = 4(9-x_2^2)$$

$$5x_2^2 = 36$$

$$x_2 = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$x^2 \in 9, x^2 = 9$$

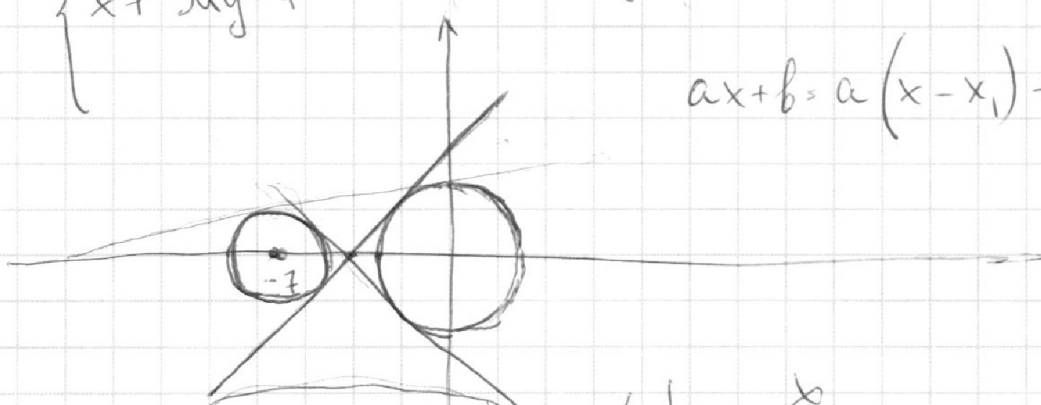
$$2x^2 = 9$$

$$4x = 2\pi, 4\pi$$

$$\begin{cases} x + 3ay - 7 \end{cases}$$

$$x^3(x+1)^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 9)$$

$$ax+b = a(x-x_1) + ax_1 + b$$



$$y = \sqrt{4 - (x+7)^2}$$

$$y' = -\frac{x}{6}$$

$$y = \sqrt{2(-5-x)(x+9)}$$

$$36$$

$$36 \cdot 3 + 14 \cdot 6 + 54$$

$$6 \cdot 4 - 45 - 36$$

$$84 - 45 - 36$$

$$84 - 81$$

$$12 \leq$$

$$-36 - 45 - 84$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a, b, c

$$ab: 2^7 3^{11} 5^{14}$$

$$bc: 2^{12} 3^{15} 5^{18}$$

$$ac: 2^{14} 3^{17} 5^{43}$$

e_1, e_2, e_3

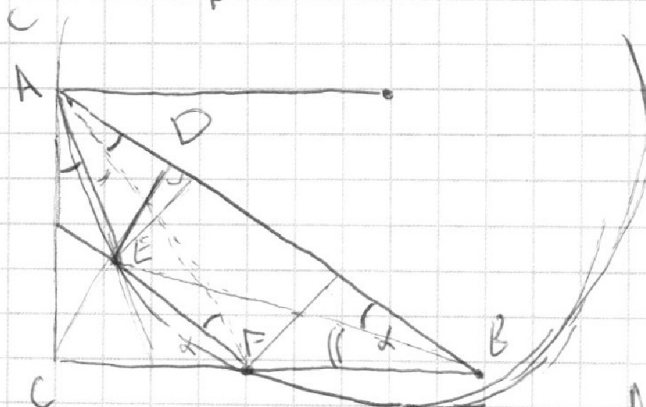
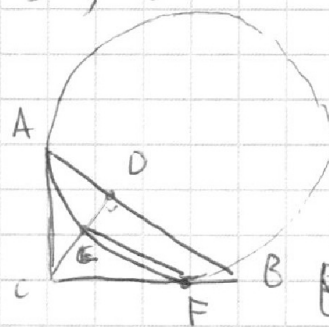
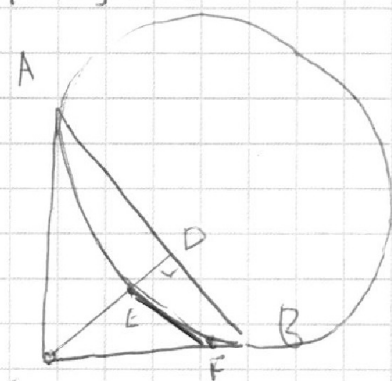
$$d_1 + d_2 \geq 7$$

$$d_2 + d_3 \geq 13$$

$$d_1 + d_2 + d_3 \geq 17$$

$$d_1 + d_3 \geq 14$$

$$3^7, 3^5, 3^{10}$$



$$\frac{AB}{AC} = \frac{CE}{BF}$$

$$3\alpha + 2\beta = 90$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{CB}{BD}$$

$$1,3 BD^2 = BC^2$$

$$\sqrt{1,3} BD = BC$$

BD

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

проф. 324.

Искать точки $\rightarrow (-4\frac{1}{3} + 5)(-4\frac{1}{3} + 9) = XF^2$
 F - т. касания Γ и левой.

$(-3 + 4\frac{1}{3})(3 + 4\frac{1}{3}) = XG^2$
 G - т. касания Γ и правой

$\frac{2}{3} = \frac{14}{3} = XF^2$

$XF = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\frac{4}{3} = \frac{22}{3} = XG^2$

$XG = \frac{2\sqrt{22}}{3}$

$XF^2 = (-5 + x_1)^2 + (\operatorname{tg} \alpha (x_1 - 5))^2$
 $XG^2 = \dots$ где x - коорд. Γ по x -ю.

x_1 - коорд. X по x -ю

x_2 - коорд. F по x -ю $\Rightarrow (x_1 - x_2) = \frac{2}{3}(x_3 - x_1)$

x_3 - коорд. G по x -ю

$XF^2 = (x_1 - x_2)^2 + (\operatorname{tg} \alpha \cdot (x_1 - x_2))^2$
 $XG^2 = \frac{9}{4}(x_1 - x_2)^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \frac{9}{4}(x_1 - x_2)^2$

$\begin{cases} \frac{28}{9} = (\frac{13}{3} - x_2)^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha (x_2 + \frac{13}{3})^2 \\ \frac{88}{9} = \frac{9}{4}(x_2 + \frac{13}{3})^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha (x_2 + \frac{13}{3})^2 \cdot \frac{9}{4} \end{cases}$