



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90 , $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5 .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$2\beta_3 = 21 \quad ; \quad \beta_3 = \frac{21}{2} \quad ; \quad \beta_1 = \beta_3 - 3 = \frac{21-6}{2} = \frac{15}{2}$$

$$\beta_2 = 10 - \beta_1 = \frac{20-15}{2} = \frac{5}{2} \quad , \quad \text{однако такое}$$

Невозможно, т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 \geq 10 \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 13 \\ \beta_1 + \beta_3 \geq 18 \end{cases} \quad ; \quad \begin{aligned} 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) &\geq 41 \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &\geq 20,5 \end{aligned}$$

авс_{min} достигается при $(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)_{\min}$,
 Пусть $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 21$ где $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{Z}$
 $10 + \beta_3 = 21$
 $\beta_3 = 11$

$$\beta_1 = 18 - \beta_3 = 7 \quad ; \quad \beta_2 = 13 - \beta_3 = 2 \quad ,$$

такое возможно

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 \geq 10 \\ \gamma_1 + \gamma_3 \geq 30 \\ \gamma_2 + \gamma_3 \geq 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) &\geq 53 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 &\geq 26,5 \end{aligned}$$

Пусть $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 27$ - min

$$\gamma_3 = 27 - 10 = 17 \quad ; \quad \gamma_2 = 27 - 30 = -3$$

такое невозм., ~~так как $\gamma_2 < 0$~~

~~$\gamma_3 \neq 30$; $\gamma_3 = 17$; $(\gamma_1 + \gamma_2) = 10$~~

~~$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 27 - 13 = 14$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a, b, c \in \mathbb{N};$$

$$abc_{\min} = ?$$

$$\begin{aligned} N1. \quad & a: 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10} \\ & b: 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13} \\ & c: 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30} \end{aligned}$$

abc будет наименьшим, если a, b, c - степени 2, 3 и 5 ~~по возможности~~

$$\begin{aligned} a &= 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1} \\ b &= 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2} \\ c &= 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}, \text{ при этом} \end{aligned}$$

из укл. (если числа минимальные) и равенство возможно

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 9 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 14 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 19 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_2 = 9 - \alpha_1 \\ 9 - \alpha_1 + \alpha_3 = 14 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 19 \end{cases}$$

$$9 + 2\alpha_3 = 33$$

$$\begin{aligned} 2\alpha_3 &= 24 \\ \alpha_3 &= 12 \end{aligned}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 7 + 2 + 12 = 21$$

$$\alpha_1 = 9 + \alpha_3 - 14 = 9 - 2 = 7$$

$$\alpha_2 = 9 - \alpha_1 = 2$$

аналогично:

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = 10 \\ \beta_2 + \beta_3 = 13 \\ \beta_1 + \beta_3 = 18 \\ \beta_3 - \beta_1 = 3 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

н.к. $x_2 \in \mathbb{Z}$, $x_2 \geq 0$; ~~при $x_2 = 0$:~~

$(x_1 + x_2 + x_3)_{\min} = 30$, такое возможно при $x_2 = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 30 \\ x_1 \geq 10 \\ x_1 + x_3 \geq 30 \\ x_3 \geq 13 \end{cases}$$

Минимум можем найти при $x_1 = 10$, $x_3 = 20$,
при этом произведение a, b и c будет мин,
 $(abc)_{\min} = 2^{x_1 + x_2 + x_3} \cdot 3^{y_1 + y_2 + y_3} \cdot 5^{x_1 + x_2 + x_3} = 2^{21} \cdot 3^{30} \cdot 5^{21} = 6^{21} \cdot 5^{30}$

Ответ: $6^{21} \cdot 5^{30}$.

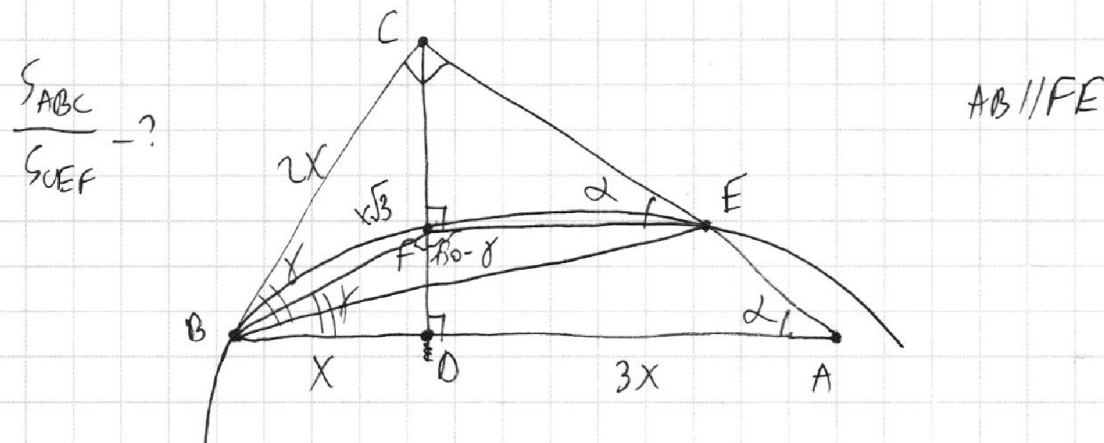
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



примем BD за x , $AD = 3x$
по св-ву впис. к Δ им: $CD^2 = x \cdot 3x$

$$CD = x\sqrt{3}$$

$$\angle CAD = \angle CEF = \alpha; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{CD}{AD} = \frac{x\sqrt{3}}{3x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

(BC) - кас. к окр-ти, поэтому

$\angle CBE = \frac{\angle BE}{2}$, как угол между касат. и хордой
 $\angle BFE = 180^\circ - \frac{\angle BE}{2} = 180^\circ - \angle CBE$ как впис.
 $\angle EFD = 90^\circ$, тогда

$$\angle BFD + 90^\circ = \angle BFE$$

$$\angle BFD = 180^\circ - \angle CBE - 90^\circ = 90^\circ - \angle CBE$$

примем $\angle CBE$ за γ

$$\begin{aligned} \text{в } \Delta CBE: \quad \operatorname{tg} \gamma &= \frac{CE}{CB} \\ \text{в } \Delta BFD: \quad \operatorname{tg} \gamma &= \frac{FD}{x} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{CE}{CB} = \frac{FD}{x}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

по ТЛ Треугольник BCD:

$$x^2 + 3x^2 = CB^2 \Rightarrow CB = 2x$$

$$\frac{CE}{2x} = \frac{FD}{x}$$

$$CE = 2FD$$

Треугольник FDE: $FD = t$, $CE = 2t$

$CF = x\sqrt{3} - t$; в треугольнике CFE:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{CF}{CE}$$

$$\frac{x\sqrt{3} - t}{2t} = \frac{1}{2}; \quad x\sqrt{3} - t = t$$

$$x\sqrt{3} = 2t$$

$$t = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CF = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

по ТЛ Треугольник: $3x^2 + 9x^2 = AC^2$

$$AC = 2x\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2x\sqrt{3} = x^2\sqrt{3}$$

$S_{DEF} = \frac{1}{2}$ $\triangle CDA \sim \triangle CFE$ по 2 углам,

поэтому $\frac{FE}{AD} = \frac{CF}{CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow FE = \frac{3x}{2}$

$$S_{CEF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3x}{2} = \frac{3x^2\sqrt{3}}{8};$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{x^2\sqrt{3} \cdot 8}{3x^2\sqrt{3}} = \frac{16}{3}; \quad \text{Ответ: } \frac{16}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{при } k = -1: 6x = -8\pi; \quad x = -\frac{4}{3}\pi$$

$$\text{при } k = -2: 6x = -18\pi; \quad x = -3\pi$$

$$\text{при } k = 0: 6x = 2\pi; \quad x = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{при } k = 1: 6x = 12\pi; \quad x = 2\pi$$

$$(2) \quad \frac{5\pi}{2} + 5x + 10\pi n = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4x = -2\pi - 10\pi n$$

$$2x = -\pi - 5\pi n$$

$$-6\pi \leq 2x \leq 4\pi$$

$$\text{при } n = -1: 2x = -\pi + 5\pi = 4\pi; \quad x = 2\pi$$

$$\text{при } n = 0: 2x = -\pi; \quad x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{при } n = 1: 2x = -\pi - 5\pi = -6\pi; \quad x = -3\pi$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -3\pi; -\frac{4}{3}\pi; \frac{\pi}{3}; 2\pi; -\frac{\pi}{2} \right\}$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3.

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

Пусть $\arcsin(\cos x) = \alpha$, тогда:

$$\begin{cases} 5\alpha = x + \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin \alpha = \cos x \end{cases}$$

1)

$$\begin{aligned} -\frac{5\pi}{2} &\leq 5\alpha \leq \frac{5\pi}{2} \\ -\frac{5\pi}{2} &\leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2} \\ \boxed{-3\pi \leq x \leq 2\pi} \end{aligned}$$

2)

$$\sin \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} & (1) \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} & (2) \end{cases}$$

3)

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k &= x + \frac{\pi}{2} \\ 6x &= 2\pi + 10\pi k \end{aligned}$$

$$-18\pi \leq 6x \leq 12\pi$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Поскольку линия симметрии $OK - O_x$,
для прямой l_2 $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{\sqrt{11}}$
Чтобы было 4 реш: $\operatorname{tg} \gamma \in (-\frac{5}{\sqrt{11}}; 0) \cup (0; \frac{5}{\sqrt{11}})$,

$$\text{т.е. } \operatorname{tg} \gamma = -\frac{a}{2}$$

также был размахен угол $\operatorname{tg} \delta = 0$,
($a = 0$)
поэтому достаточно решить след. систему:

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} > -\frac{5}{\sqrt{11}} \quad | \cdot (-2) \\ -\frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}} \quad | \cdot (-2) \end{cases} \begin{cases} a < \frac{10}{\sqrt{11}} \\ a > -\frac{10}{\sqrt{11}} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right).$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐



Найти a , при которых суз. в, такое что

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 реш.

$$ax + 2y - 3b = 0$$

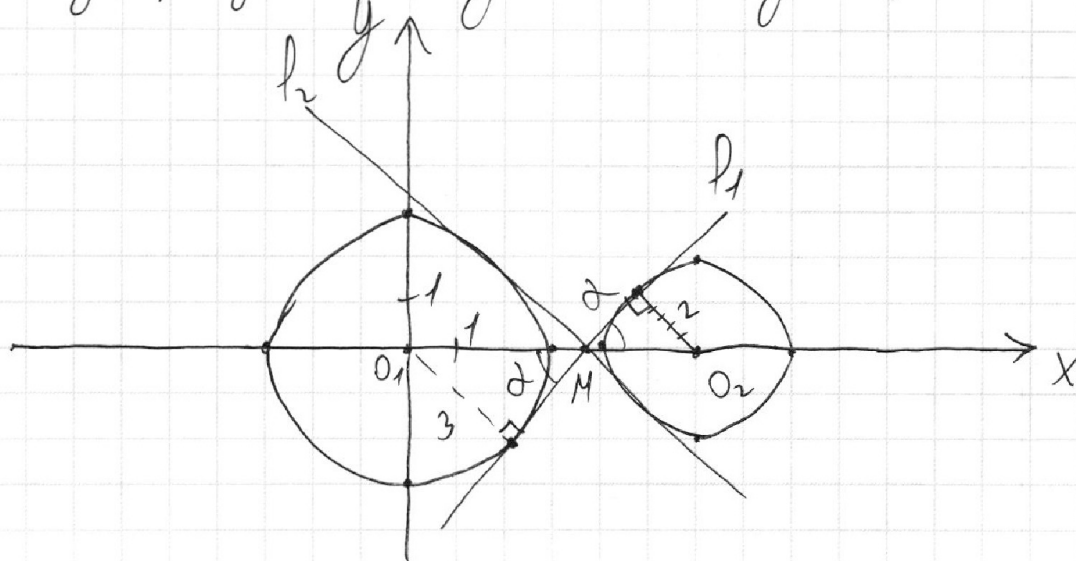
$$2y = -ax + 3b$$

$$y = -\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2} \\ x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 - 36 + y^2 + 32 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2} \\ x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Изобразим эту систему графически



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 + y^2 = 9 \text{ — окружность } R=3, O_1(0;0)$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 4 \text{ — окружность } R=2; O_2(6;0)$$

$$y = -\frac{ax}{2} + \frac{3}{2}b \text{ — прямая (если } a \neq 0)$$

1) Рассмотрим отдельно $a = 0$:

$$y = \frac{3}{2}b \text{ — прямая параллельная } O_x, \text{ это } 4 \text{ реш. (например, } b=0)$$

$$\boxed{a=0} \text{ в ответ}$$

2) от a зависит количество точек,

когда найдем предельный случай при котором нет 4 реш., — $y = -\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2}$ является общей внутренней касательной

Пусть эта прямая l , пересекает O_x в $(.)M$

$$O_1M + O_2M = 6. \text{ Пусть } \angle 2, \text{ тогда}$$

$$\sin 2 = \frac{2}{O_2M} = \frac{3}{O_1M}$$

$$\frac{2}{6 - O_1M} = \frac{3}{O_1M}; \quad 2O_1M = 18 - 3O_1M$$

$$5O_1M = 18; \quad O_1M = \frac{18}{5}$$

$$\sin 2 = \frac{18 \cdot 5}{48 \cdot 6} = \frac{5}{6}; \quad \cos 2 = \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$\tan 2 = \frac{5}{\sqrt{11}} \neq \frac{1}{\sqrt{11}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x < 1$$

$$(2) \quad \frac{7}{2} \log_{5y} 3 = \log_3^4(5y) + 8 > 0$$

$$\log_{5y} 3 > 0$$

$$\log_{5y} 3 - \log_{5y} 1 > 0$$

$$(5y - 1)(3 - 1) > 0$$

$$5y > 1$$

$$(*) \quad (\log_3 5y - \log_3 x) \log_3 x \log_3 5y \underset{>0}{\overbrace{(\log_3^2 5y + \log_3^2 x)}} = \frac{7}{2}$$

$$(1) + (2): \quad \frac{7}{2} (\log_x 3 - \log_{5y} 3)$$

$$\frac{7}{2} (\log_x 3 - \log_{5y} 3) + \log_3^4 x + \log_3^4 5y = -16$$

$$\log_x 3 - \log_{5y} 3 = \frac{2}{7} (-16 - \log_3^4 x - \log_3^4 5y) < 0$$

$$\log_x 3 - \log_{5y} 3 < 0, \text{ тогда}$$

н.к. $\log_3^2 5y + \log_3^2 x > 0$, но равенство (*)

возможно, только если $\log_3 x \log_3 5y < 0$,

но по дока-мэ это не так

Ответ: $\frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{5}$.

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \\ \log_3^4 (xy) + 2 \log_{xy} 3 = \log_{xy^2} (3^{11}) - 8 \end{cases}$$

$xy = ?$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \pm 1 \\ y > 0 \\ y \neq \pm \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \frac{5}{2} \log_x 3 - 8 \\ \log_3^4 (xy) + 2 \log_{xy} 3 = \frac{11}{2} \log_{xy} 3 - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 = -8 & (1) \\ \log_3^4 (xy) - \frac{7}{2} \log_{xy} 3 = -8 & (2) \end{cases}$$

$$\log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 = \log_3^4 (xy) - \frac{7}{2} \log_{xy} 3$$

$$\begin{aligned} \log_3^4 (xy) - \log_3^4 x &= \frac{7}{2} (\log_x 3 + \log_{xy} 3) \\ (\log_3^2 (xy) - \log_3^2 x) (\log_3^2 (xy) + \log_3^2 x) &= \frac{7}{2} \left(\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 xy} \right) \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(\log_3(5y) - \log_3 x)(\log_3(5y) + \log_3 x)(\log_3^2 5y + \log_3^2 x) =$$

$$= \frac{7}{2} \left(\frac{\log_3 x + \log_3 5y}{\log_3 x \log_3 5y} \right)$$

$$\log_3\left(\frac{5y}{x}\right) \cdot \log_3(5xy) \cdot (\log_3^2 5y + \log_3^2 x) =$$

$$= \frac{7}{2} \cdot \frac{\log_3(5xy)}{\log_3 x \log_3 5y}$$

1) или $\log_3(5xy) = 0$:

$$\log_3(5xy) = \log_3 1$$

ф-ция $g(t) = \log_3 t$ монотонна на $(0; +\infty)$,

тогда

$$5xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{5}$$

2) или $\log_3(5xy) \neq 0$:

$$\log_3\left(\frac{5y}{x}\right) \cdot \log_3 x \cdot \log_3 5y \cdot (\log_3^2 5y + \log_3^2 x) = \frac{7}{2}$$

$$\frac{7}{2} \log_x 3 = -8 - \log_3^4 x < 0$$

(1) $\log_x 3 < 0$

$$\log_x 3 - \log_x 1 < 0$$

$$(x-1)(3-1) < 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{5y^2} (3^{11}) - 8$$

$$xy = ? \quad k+t = ? \quad k^2+t^2 = (k+t)^2 = 2+kt$$

$$\text{от } 3: \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ y > 0 \\ y \neq \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1 \cdot xy - ?}{\log_3 5y} = \frac{\log_3 x + \log_3 5y}{\log_3 x \log_3 5y} = \frac{\log_3 5xy}{\log_3 x \log_3 5y}$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \frac{1}{2} \cdot 5 \log_x 3 - 8$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \frac{1}{2} \cdot 11 \log_{5y} 3 - 8$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_x^2 3 - \frac{5}{2} \log_x 3 + 8 = 0$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y}^2 3 - \frac{11}{2} \log_{5y} 3 + 8 = 0$$

$$\log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 + 8 = 0$$

$$\log_3^4 5y - \frac{7}{2} \log_{5y} 3 + 8 = 0$$

$$\log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 = \log_3^4 5y - \frac{7}{2} \log_{5y} 3$$

$$\log_3^4 x - \log_3^4 5y = -\frac{7}{2} (\log_x 3 + \log_{5y} 3)$$

$$a^4 - b^4 =$$

$$= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) =$$

$$= (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)$$

$$\log_{\frac{x}{5y}} \log_3 5xy$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Thyris $\log_3 x = t \neq 0, \log_3 y = k \neq 0$

$$\frac{2}{2} \log_3 = -8 - 3 = -11, 3^k = 5y, 3 > 0 \quad t+k \quad 3$$

$$\log_3 x \leq \log_3 5y \quad 5xy = 3^{t+k}; \quad xy = \frac{3}{5}$$

$x \leq 5y$ перемножим на нашему xy -ю:

$\log_x 3 < 0$
 $\lim_{k \rightarrow \infty} (k-t) + k(k^2+t^2) = \frac{7}{2}$
 $\log_x 3 < \log_x 1 < \log_x 5$
 $k+t = \frac{1}{2} \log_x 3$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k+t}{x} = 0$ $\frac{1}{(x-1)(3-1)} \frac{258}{x} = 0$
 $t-k = \log_3 \left(\frac{x}{xy} \right) \cdot \frac{1}{x} = k^2 + 2tk + t^2$ $\log_3 3 \geq \log_3 xy \rightarrow -2 \log_3 xy \log_3 x$
 $\log_3 x \log_3 xy$ $xy > 1$
 $-2tk = k^2 + t^2$

$$t-k = \log_{3^{\frac{1}{254}}} (k-t) \quad t \cdot k (p^2 - 2tk) = \frac{7}{2}$$

$$\left\{ \begin{aligned} t^4 - k^4 + \frac{7}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k} \right) &= 0 \\ t^4 - k^4 + \frac{7}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{k} \right) &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\frac{(t^2 - k^2)(t^2 + k^2) + \frac{7(k+t)}{2tk}}{(t^2 - k^2)(t^2 + k^2) + \frac{7(k+t)}{2tk}} = 0$$

$$(t-k)(t+k)(t^2+k^2) + \frac{7}{2} \frac{(t+k)}{tk} = 0$$

$$(k+t) \left((t-k)(t^2+k^2) + \frac{7}{2tk} \right) = 0$$

$$f(k) \stackrel{k+t=0}{=} (t^2 + k^2) (t-k) + \frac{7}{2tk} = 0$$

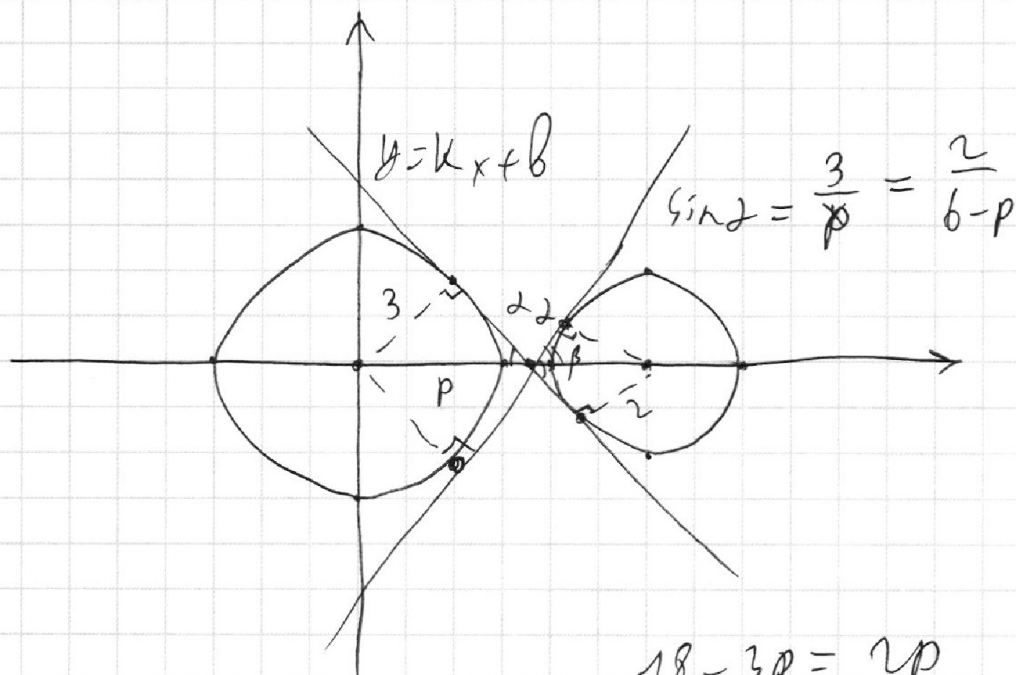
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$18 - 3p = 2p$$

$$5p = 18$$

$$p = \frac{18}{5}$$

$$\sin 2 = \frac{3}{\frac{18}{5}} = \frac{13 \cdot 5}{48 \cdot 6} = \frac{5}{6}; \quad \frac{36}{25}$$

$$\cos 2 = \sqrt{1 - \frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{11}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$1 + \sin^2 = \frac{1}{\cos^2}$$

$$\tan 2 = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{\sqrt{11}}{6}} = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$\tan(180 - 2) = -\frac{5}{\sqrt{11}} = -\frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$\tan \beta = \frac{2}{b-k} = \frac{3}{k}$$

м.к. *мнимая* *прямая* *симметричек*, *по* *ошк-о O_x*

$$\tan \beta = -\tan 2 = -\frac{5}{\sqrt{11}} \\ = \tan(180 - 2) = -\tan 2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

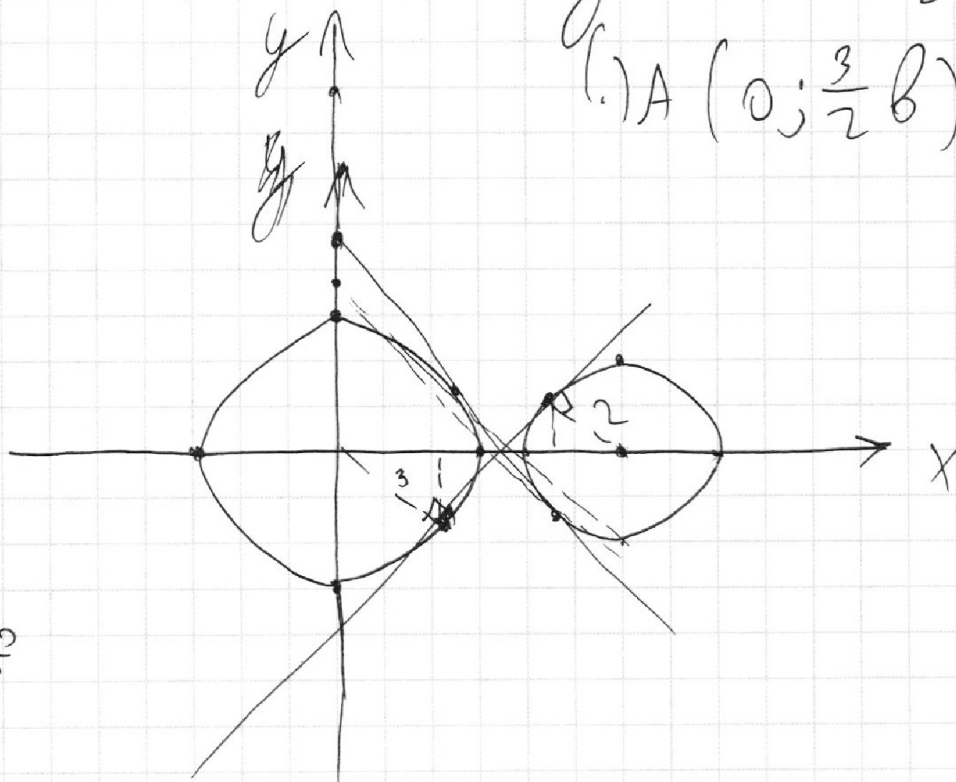


$$x^2 + y^2 = 9$$

$$(x-b)^2 + y^2 - 36 + 32 = 0 \rightarrow (x-b)^2 + y^2 = 4$$

$$y = -ax + 3b \rightarrow y = -\frac{ax}{2} + \frac{3}{2}b$$

$$\therefore A(0; \frac{3}{2}b)$$



$$1) \text{ так как } a=0 : y = \frac{3b}{2}$$

касательная (касир $b=0$)

2) граница - внутрен. обл. кас.

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x = \frac{1}{2} \cdot 5 \log_3^3 - 8$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad \sqrt{3} \\ \sin \alpha = \cos x \\ \alpha = x + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\sin \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k \quad (1) \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + x + 2\pi k \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} = 5x + 10\pi k \rightarrow x + \frac{\pi}{2}$$

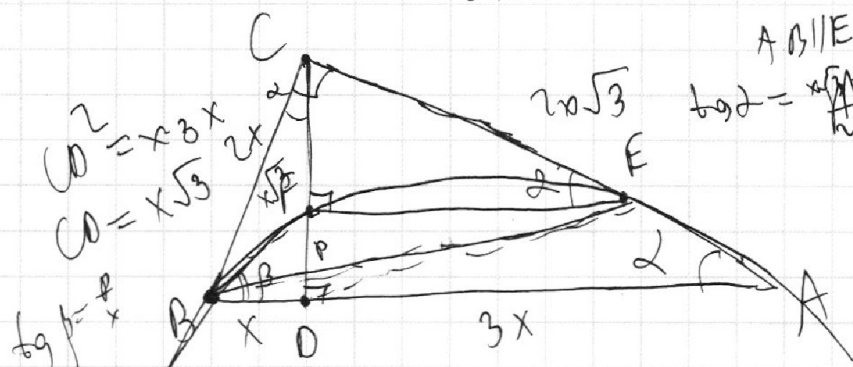
$$-\frac{5\pi}{2} \leq 5\alpha \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$(1) \quad \frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-18\pi \leq 6x = 2\pi + 10\pi k \leq 10\pi$$



$$AC = \sqrt{3x^2 + 9x^2} = x\sqrt{12} = 2x\sqrt{3}$$

$$PC = \sqrt{3x^2 + x^2} = 2x$$

$AB \parallel EF$

$$\tan \alpha = \frac{EF}{CF} = \frac{2x\sqrt{3}}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$\alpha = 30^\circ$
 $\triangle ABC$ — ?
 $\triangle CEF$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = k^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 > 2 \quad -2 > 0 \quad 31$$

$$2 > 2$$

$$2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 41$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 20,5$$

$$\text{нужно } \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 21 - \min$$

$$\text{при } \beta_1 + \beta_2 = 10: \quad \beta_3 = 11$$

$$\beta_2 = 13 - \beta_3 = 2$$

$$\beta_1 = 18 - \beta_3 = 7$$

$$2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \geq 10 + 13 + 30 = 53$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 28 - \min$$

$$\gamma_3 = 28 - 10 = 18$$

$$\gamma_2 = 28 - 30 = -2$$

$$(\gamma_1 + \gamma_3)_{\min} = 30$$

$$\gamma_{\min} = 0 \quad \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\frac{14}{31}$$

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 5\alpha \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$\sin \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} - x \\ \alpha = \pi - (\frac{\pi}{2} - x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \sin \alpha = \cos x, \\ 5\alpha = x + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

