



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{11}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $3^{18}7^{16}$ ,  $ac$  делится на  $3^{21}7^{38}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC=1$  и  $BC=16$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения  $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$ .

6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 1 час 15 минут позже ~~велосипедиста~~ <sup>мотоциклиста</sup>. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .

7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA, AB, BC$  в точках  $D, E, F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX=2\sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD:DC$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~Задача~~ Задача ~ 1.

~~abc : 3<sup>21</sup> · 7<sup>38</sup>~~

$$\begin{array}{l} \text{пусть } a: 3^{a_1} \cdot 7^{a_2} \\ b: 3^{b_1} \cdot 7^{b_2} \\ c: 3^{c_1} \cdot 7^{c_2} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} ab: 3^{a_1+b_1} \cdot 7^{a_2+b_2} \\ bc: 3^{b_1+c_1} \cdot 7^{b_2+c_2} \\ ac: 3^{a_1+c_1} \cdot 7^{a_2+c_2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a_1 + b_1 \geq 11 \\ a_2 + b_2 \geq 11 \\ c_1 + b_1 \geq 18 \\ a_1 + c_1 \geq 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a_2 + b_2 \geq 11 \\ b_2 + c_2 \geq 16 \\ a_2 + c_2 \geq 38 \end{array}$$

$$\Rightarrow 2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 50$$

$$a_1 + b_1 + c_1 \geq 25$$

$$2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 65$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 32,5$$

но  $a, b, c$  — натуральные  
 $\Rightarrow a, b, c$  делится на  
целые степени 7

$$\Rightarrow a_2, b_2, c_2 - \text{целые}$$

$$\Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 - \text{целое}$$

$$\Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 33$$

$$\Rightarrow abc: 3^{25} \cdot 7^{33}, \text{ но } ac: 3^{21} \cdot 7^{38}$$

$$\Rightarrow abc: 3^{25} \cdot 7^{38}$$

$$\Rightarrow abc \geq 3^{25} \cdot 7^{38} \quad (\text{т.к. } a, b, c - \text{натур} \Rightarrow abc \neq 0)$$

$\Rightarrow$  максимальное значение  $abc = 3^{25} \cdot 7^{38}$ , достигается, например,

$$\text{при } a = 3^7 \cdot 7^{19}, b = 3^4 \cdot 7^0, c = 3^{14} \cdot 7^{19}$$

$$\text{Ответ: } 3^{25} \cdot 7^{38}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                                   | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 2

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-10ab}$$

Эту дробь можно сократить на  $m$

$$\Rightarrow a+b : m \quad \text{и} \quad (a+b)^2-10ab : m$$

$$\Rightarrow 10ab : m$$

~~$a$  и  $m$  не взаимнопросты~~

если  $ab : m \Rightarrow a+b \not: m$ , т.к.  $\frac{a}{b}$  несократимая дробь (т.е.  $a$  и  $b$  - взаимнопросты)

т.е.  $a+b \not: m$

~~$m$~~   $\Rightarrow$   ~~$a$  и  $m$~~  - взаимнопросты

Аналогично докаж., что  $b$  и  $m$  - взаимнопросты

$$10ab : m \quad ab \not: m \quad (\text{из ранее доказ.})$$

$$\Rightarrow 10 : m \Rightarrow m_{\max} \leq 10$$

$$\Rightarrow m_{\max} = 10$$

Пример:  $a=1 \quad b=9$

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} = \frac{10}{1-8 \cdot 9+9^2} = \frac{10}{1-72+81} = \frac{10}{10}$$

Ответ:  $m_{\max} = 10$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задание ~ 3

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x^2 - 3x + 4 \geq 0 \\ 2x^2 + x + 3 \geq 0 \end{cases}$$

$$2x^2 - 3x + 4 + 2x^2 + x + 3 - 2\sqrt{(2x^2 - 3x + 4)(2x^2 + x + 3)} = 1 + 16x^2 - 8x$$

$$-2\sqrt{4x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 6x^3 - 3x^2 - 9x + 8x^2 + 4x + 12} = 12x^2 - 6x - 6$$

$$\sqrt{4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 12} = -6x^2 + 3x + 3$$

$$\text{ОДЗ: } 4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 12 \geq 0$$

$$4x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 5x + 12 = 36x^4 - 18x^3 - 18x^2 - 18x^3 + 9x^2 + 9x - 18x^2 + 9x + 9$$

$$32x^4 - 32x^3 - 38x^2 + 23x - 3 = 0$$

$$16x^3(2x-3) + 8x^2(2x-3) - 7x(2x-3) + (2x-3) = 0$$

$$(16x^3 + 8x^2 - 7x + 1)(2x-3) = 0$$

$$\begin{aligned} 2x-3 &= 0 \\ x_1 &= 1.5 \end{aligned}$$

$$16x^3 + 8x^2 - 7x + 1 = 0$$

$$16x^2(x+1) + 8x(x+1) + (x+1) = 0$$

$$(16x^2 - 8x + 1)(x+1) = 0 \quad x_2 = -1$$

$$16x^2 - 8x + 1 = 0 \quad \Delta = 64 - 64 = 0$$

$$x_3 = \frac{8}{32} = 0.25$$

Проверка: 1)  $x = 1.5$

$$\begin{aligned} \sqrt{4.5 - 4.5 + 4} - \sqrt{4.5 + 1.5 + 3} &= 1 - 6 \\ 2 - 3 &= -1 \end{aligned}$$

2)  $x = -1$

$$\begin{aligned} \sqrt{2 + 3 + 4} - \sqrt{2 - 1 + 3} &= 1 + 4 \\ 3 - 2 &= 1 \end{aligned}$$

3)  $x = 0.25$

$$\sqrt{\frac{1}{8} - \frac{6}{8} + \frac{32}{8}} - \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{24}{8}} = 0$$

$$\sqrt{\frac{27}{8}} - \sqrt{\frac{27}{8}} = 0$$

Ответ:  $x = 0.25$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                                   | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

$$3x + 2y = z$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}, \quad x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$$

$$\Rightarrow 1) \quad z^2 = 9x^2 + 4y^2 + 12xy$$

$$\Rightarrow z = \frac{2}{\frac{3x}{xy} + \frac{1}{y}} = \frac{2xy}{3y+x}$$

$$\Rightarrow 2) \quad y = 0,5z - 1,5x$$

$$y = \frac{xy}{3y+x} - 1,5x = \frac{xy - 4,5xy - 1,5x^2}{3y+x}$$

$$3y^2 + xy = xy - 4,5xy - 1,5x^2$$

$$3y^2 + 4,5xy + 1,5x^2 = 0$$

решение отн. y

$$y^2 + 1,5xy + 0,5x^2 = 0$$

(решение отн. y)

$$D = 1,5^2 x^2 - 2x^2 = 0,25x^2 > 0 \Rightarrow 2 \text{ корня}$$

$$y_1 = \frac{-1,5x + 0,5x}{2} = -0,5x$$

$$y_2 = \frac{-1,5x - 0,5x}{2} = -x$$

$$1) \quad y = -0,5x \quad \frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3x^2 - 4y^2 - 9x^2 - 4y^2 - 12xy}{x^2 - 6y^2} = \frac{-6x^2 - 8y^2 - 12xy}{x^2 - 6y^2} = \frac{-6x^2 - 2x^2 + 6x^2}{x^2 - 1,5x^2}$$

$$= \frac{-2x^2}{-0,5x^2} = 4$$

$$2) \quad y = -x \quad \frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{-6x^2 - 8y^2 - 12xy}{x^2 - 6y^2} = \frac{-6x^2 - 8y^2 + 12x^2}{x^2 - 6x^2} = \frac{-4x^2}{-4x^2} = 1$$

$\Rightarrow$  наибольшее возможное значение = 4

Ответ: 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание ~ 6

$v_B$  - скорость велосипедиста, км/ч

$v_M$  - скорость мотоциклиста, км/ч

$S$  - расстояние от А до В, км

$$\frac{S}{v_B} = \frac{S}{v_M} + 2 \Rightarrow S \cdot v_M = S v_B + 2 v_M v_B$$

$$\text{т.к. } v_M > 0 \quad v_B > 0 \quad S > 0 \Rightarrow v_M > v_B$$

$$\text{① } 2 v_M v_B = S(v_M - v_B)$$

$$96 + v_B \cdot \frac{S}{v_M} = v_M \cdot \frac{S}{v_B} \Rightarrow v_M^2 S = v_B^2 S + 96 v_M v_B$$

$$96 v_M v_B = S(v_M^2 - v_B^2)$$

$$\frac{S(v_M - v_B)(v_M + v_B)}{96} = \frac{S(v_M - v_B)}{2}$$

$$\text{② } v_M + v_B = 48$$

$$\frac{S}{v_B + 6} = \frac{S}{v_M + 6} + 1,25$$

$$S v_M + 6S = S v_B + 1,25 S v_M v_B + 7,5(v_M + v_B) + 45$$

$$2 \cdot S(v_M - v_B) = 1,25 S v_M v_B + 15 \cdot 48 + 90$$

$$4 v_M v_B = 2,5 S v_M v_B + 810$$

$$\text{③ } v_M v_B = 540$$

$$\text{из ②}$$

$$v_M + v_B = 48$$

$$v_M = 48 - v_B$$

из ③

$$48 v_B - v_B^2 = 540 = 0$$

$$\Delta = 2304 - 2160 = 144$$

$$v_B = \frac{-48 \pm \sqrt{144}}{-2} = 24 \pm 6$$

$$\text{т.к. } v_M > v_B \text{ (по условию доказ.)}$$

$$v_{B1} = 30$$

$$v_{M1} = 18$$

$$v_{B2} = 18$$

$$v_{M2} = 30$$

$$\text{из ① } S = \frac{2 v_M v_B}{v_M - v_B} = \frac{1080}{30 - 18} = \frac{1080}{12} = 90 \text{ км}$$

Ответ: 90 км



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{10}{1-8 \cdot 9+81} = \frac{10}{1-72+81} =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



*Черновик*

$$x^2 = \frac{1}{9}z^2 + \frac{4}{9}y^2 - \frac{4}{9}yz$$

$$y^2 = \frac{1}{4}z^2 + \frac{9}{4}x^2 - \frac{3}{2}xz$$

$$z^2 = 9x^2 + 4y^2 + 12xy$$

$$x^2 = \frac{9y^2z^2}{4y^2z^2 - 4yz}$$

$$y^2 = \frac{z^2x^2}{4x^2 + 9z^2 - 12xz}$$

$$z^2 = \frac{4x^2y^2}{9y^2 + x^2 + 6xy}$$

$$y = \frac{xy}{3y+x} - \frac{1.5x}{3y+x} = \frac{xy - 4.5xy - 1.5x^2}{3y+x}$$

$$3y^2 + yx = xy - 4.5xy - 1.5x^2$$

$$3y^2 + 4.5xy + 1.5x^2 = 0$$

$$y^2 + 1.5xy + 0.5x^2 = 0$$

$$y = \frac{-1.5x \pm \sqrt{1.5^2x^2 - 2x^2}}{2} = \frac{-1.5x \pm 0.5x}{2}$$

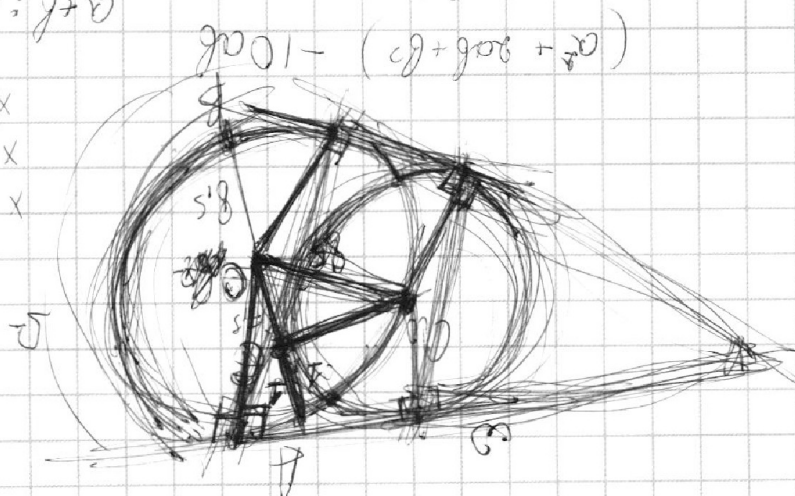
$$y = \begin{cases} -0.5x \\ 0 \end{cases} ; -x \begin{cases} \text{root} \\ \text{root} \end{cases} - x(9+x)$$

$F < x$

$5'8 < 5'8 + x$

$5'8 > 5'8$

$5'8 + 5'8 > x$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                                     |                                     |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                                   | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задание 2

Черновик

$\frac{a}{b}$  - несократимая дробь,  $a \in \mathbb{N}$   $b \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a$  и  $b$  - взаимнопростые числа

Если дробь  $\left( \frac{a+b}{a^2-8ab+b^2} \right)$  можно сократить на  $m$

$$\Rightarrow 1) a+b \equiv a^2-8ab+b^2 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$\Rightarrow 2) \begin{cases} m \leq a+b \\ m \leq a^2-8ab+b^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow 3) m$  и  $a$  - взаимнопростые,  $m$  и  $b$  - взаимнопростые (т.к.  $a+b \equiv 0 \pmod{m}$  т.к.  $a \perp b$ )

$$a-a^2 \equiv b^2-b-8ab \pmod{m}$$

$$a(a-1) \equiv b(b-1-8a) \pmod{m}$$

$\Rightarrow$  либо  $a:b \in \mathbb{Z}$  (по усл.)  
либо  $b:m \in \mathbb{Z}$  (по ранее доказ.)  
либо  $(a-1):b \Rightarrow a-1 \geq b$

$$a-a^2+8ab \equiv b^2-b \pmod{m}$$

$$a(1-a+8b) \equiv b(b-1) \pmod{m}$$

$\Rightarrow$  либо  $b:a \in \mathbb{Z}$  (по усл.)  
либо  $a:m \in \mathbb{Z}$  (по ранее доказ.)  
либо  $(b-1):a \Rightarrow b-1 \geq a$  (т.к.  $a-1 \geq b$  по ранее доказ.)

$\Rightarrow (a+b)$  и  $(a^2-8ab+b^2)$  - взаимнопростые

$$\Rightarrow m_{\max} = 1$$

Ответ:  $m_{\max} = 1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                                   | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$b = 3^4 \cdot 7^0$$

$$a = 3^1 \cdot 7^{19}$$

$$c = 3^1 \cdot 7^{19}$$

29

$$(-6x^2+3x+3)(-6x^2+3x+3)$$

$$c_1 \geq 4$$

$$c_1 \geq 14$$

$$a_1 \geq 7$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ + 18 \\ \hline 39 \\ + 11 \\ \hline 50 \end{array}$$

$$\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} = \frac{a+b}{(a-b)^2-6ab}$$

$$6xy^2 = \frac{a+b+a^2-6ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}$$

$$a^2-8ab+b^2 \neq a \neq b$$

$$2x^2-3x+4 + 2x^2+x+3 - 2\sqrt{(2x^2-3x+4)(2x^2+x+3)} = 1+16x^2-8x$$

$$-2\sqrt{4x^4+2x^3+6x^2-6x^3-3x^2-9x+8x^2+4x+12} = 12x^2-6x-6$$

$$\sqrt{4x^4-4x^3+11x^2+4x+12} = -6x^2+3x+3$$

$$4x^4-4x^3+11x^2+4x+12 = 36x^4-18x^3-18x^2-18x^3+9x^2+9x-18x^2+9x+9$$

$$4x^4-4x^3+11x^2+4x+12 = 36x^4-36x^3-27x^2+18x+9$$

$$32x^4-32x^3-16x^2+14x-3=0$$

$$32x^4(X-3) + 64x^3(X-3) + 16x^2(2X-3) + 18x(2X-3) + 9(2X-3) =$$

$$x = \frac{9}{2}$$

$$2x^4-4x^3-4x^2+7x-3=0$$

$$(2x^4-6x^3) + (2x^3-6x^2) + 7x^2 - 3x =$$

$$a \cdot b = \frac{a^2-8ab+b^2}{x+8x}$$

$$x+8x$$

$$8+x$$

$$\frac{8+x}{x+8x} = \frac{8+x}{x}$$

$$\frac{8+x}{x} = 8 + \frac{x}{x} = 8 + 1 = 9$$

$$16x^2(x-3) + 8x^2(2x-3) - 7x(2x-3) + 2x-3$$

$$\begin{array}{r} 20 \overline{) 100} \\ \underline{40} \phantom{0} \\ 60 \phantom{0} \\ \underline{20} \phantom{0} \\ 40 \phantom{0} \\ \underline{20} \phantom{0} \\ 20 \phantom{0} \\ \underline{20} \phantom{0} \\ 0 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

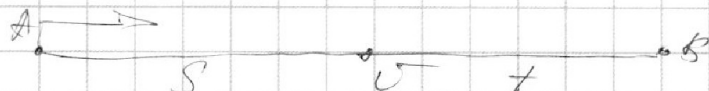
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

*Черновик*



B

M

$$\begin{array}{r} 1080 \\ - 108 \\ \hline 972 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1080 \\ - 96 \\ \hline 984 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1,25 \\ - 1,2 \\ \hline 0,05 \end{array}$$

$$\frac{S}{U_B} = \frac{S + 2U_M}{U_M + U_B} \Rightarrow U_M S = U_B S + 2U_M U_B$$

$$U_B S = U_M S - 2U_M U_B$$

$$2U_M U_B = -U_B S + U_M S$$

$$\frac{U_B S + 96U_M}{U_M} = \frac{U_M S}{U_B} \Rightarrow U_M^2 S = U_B^2 S + 96U_M U_B$$

$$\frac{S}{U_B + 6} = \frac{S + 1,25U_M + 7,5}{U_M + 6}$$

$$S U_M + 6S = S U_B + 1,25U_M U_B + 7,5U_B + 6S + 7,5U_M + 45$$

$$1,25U_M U_B + 7,5U_B + 6,5U_M + 45 = S U_M - S U_B$$

$$(1,625U_M S - 0,625U_B S) + 7,5U_B + 6,5U_M + 45 = S(U_M - U_B)$$

$$810 \mid 115$$

$$U_M U_B = \frac{U_M^2 S - U_B^2 S}{96} = \frac{U_M S - U_B S}{2}$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times 15 \\ \hline 240 \\ 48 \\ \hline 720 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 270 \\ \times 2 \\ \hline 540 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2304 \\ - 2160 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$(U_M - U_B)(U_M + U_B) = S(U_M - U_B) \cdot 48$$

$$U_M + U_B = 48$$

$$2S(U_M - U_B) = 2,5U_M U_B + 15(U_B + U_M) + 45$$

$$6U_M U_B = 2,5U_M U_B + 765$$

$$3,5U_M U_B = 765$$

$$U_M U_B = 218,57$$

$$\begin{array}{r} 132 \\ \times 2 \\ \hline 264 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times 48 \\ \hline 2304 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 765 \\ \times 3 \\ \hline 2295 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 48 \\ \hline 720 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2304 \\ - 2040 \\ \hline 264 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x = \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}y$$

$$y = \frac{1}{2}z - \frac{3}{2}x$$

$$z = 3x + 2y$$

Черновик

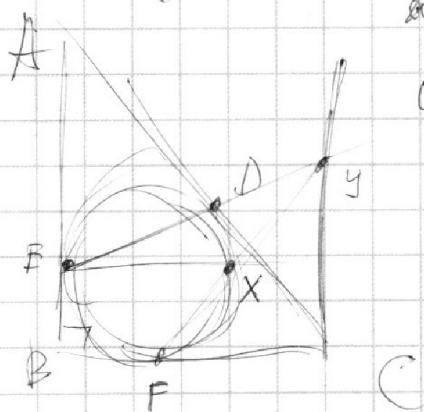
$$\frac{z}{3} = \frac{2y}{3} + \frac{1x}{3} = \frac{2xy}{3y+x}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{2y}{3} - \frac{1z}{2} = \frac{3yz}{2y-z}$$

$$y = \frac{1}{\frac{2x}{2x} - \frac{3z}{xz}} = \frac{1xz}{2x-3z}$$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3x^2 - 4y^2 - 9x^2 - 4y^2 - 24xy}{x^2 - 6y^2} =$$

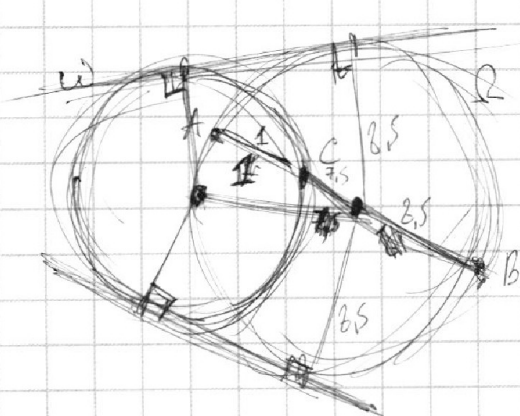
$$= \frac{-6x^2 - 8y^2 - 24xy}{x^2 - 6y^2} =$$



мха мxb

$$a(1-a) \equiv b(b-1) - 6ay$$

$$Ex = 2\sqrt{2} \cdot xy$$



$$r\Omega = 85$$

$$d\Omega = 17$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

☒ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача № 5

Черновик

$$3x + 2y = z$$

$$\Rightarrow 1) x = \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}y$$

$$2) y = \frac{1}{2}z - \frac{3}{2}x$$

$$3) z = 3x + 2y$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}, x, y, z \neq 0$$

$$\Rightarrow 1) z = \frac{2}{\frac{3y}{xy} + \frac{x}{yx}} = \frac{2xy}{3y+x}$$

$$2) x = \frac{3}{\frac{2y}{zy} - \frac{z}{yz}} = \frac{3yz}{2y-z}$$

$$3) y = \frac{1}{\frac{2x}{2x} - \frac{3z}{2x}} = \frac{2x}{2x-3z}$$

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} &= \frac{3x^2 - 4y^2 - (3x+2y)^2}{x^2 - 6y^2} \\ &= \frac{3x^2 - 4y^2 - 9x^2 - 12xy - 4y^2}{x^2 - 6y^2} \\ &= \frac{-6x^2 - 12xy - 8y^2}{x^2 - 6y^2} \\ &= \frac{-6x^2 - 12xy - 8y^2}{x^2 - 6y^2} \cdot \frac{2x}{2x} = \frac{-12x^2 - 24xy - 16y^2}{2x^2 - 12xy} \\ &= \frac{-12x^2 - 24xy - 16y^2}{2x^2 - 12xy} \cdot \frac{1}{1} = \frac{-12x^2 - 24xy - 16y^2}{2x^2 - 12xy} \\ &= \frac{-12x^2 - 24xy - 16y^2}{2x^2 - 12xy} \cdot \frac{1}{1} = \frac{-12x^2 - 24xy - 16y^2}{2x^2 - 12xy} \end{aligned}$$