



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

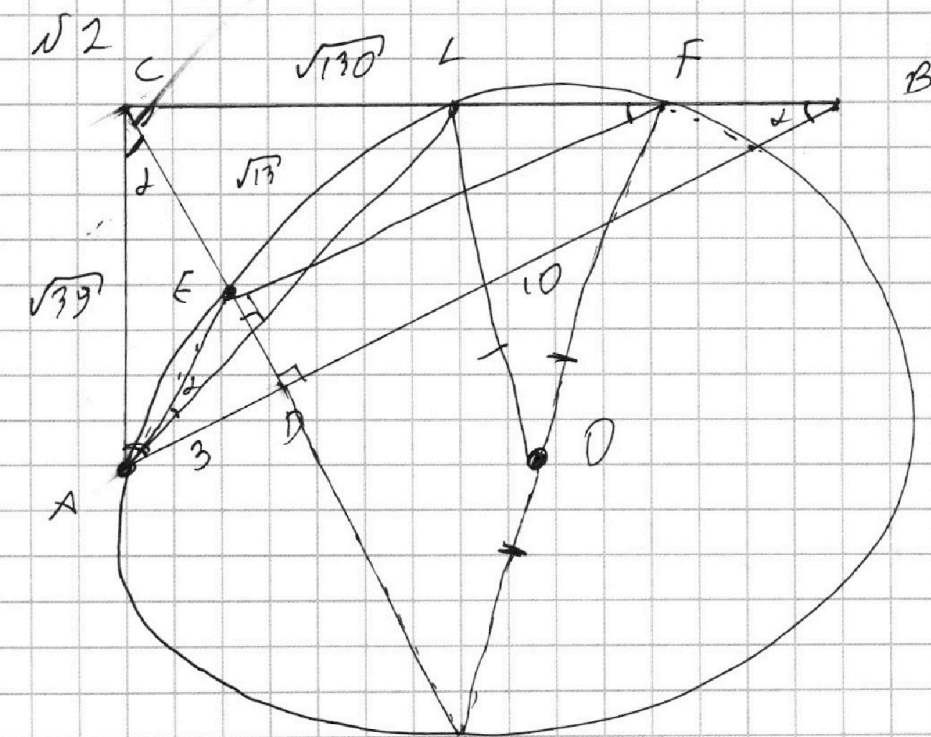
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1) \frac{AB}{BD} = 1/3 = \frac{AD+BD}{BD} \Rightarrow AD = 0,3BD$$

$$\Rightarrow BD = 10 \Rightarrow AD = 3 \Rightarrow AC = \sqrt{AD \cdot AB} = \sqrt{39}; BC = \sqrt{BD \cdot AB} = \sqrt{130}$$

$$2) EF \parallel BA \Rightarrow \angle CFE = \angle CBD; \angle BCD - \text{биссектриса} \Rightarrow$$

$$\triangle CFE \sim \triangle CBD \text{ (по 2-ым углам)} \Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{CE}{CD} = \frac{EF}{BD} = k$$

$$3) S_{\triangle CAD} = \frac{CD \cdot AD}{2} = \frac{3}{2} CD$$

$$S_{\triangle CEF} = \frac{CE \cdot EF}{2} = \frac{CD \cdot BD}{2} \cdot k^2 = 5k^2 CD$$

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2} \cdot 5k^2} = \frac{3}{10k^2}$$

$$CD = \sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{13}$$

$$CE \cdot EF = AC^2 = 39$$

$$CE = \frac{39}{EF} = k\sqrt{13} \Rightarrow k^2 = \frac{108}{EF^2}$$

$$\Rightarrow \angle CBA = \angle \Rightarrow \angle ACD = \angle, \angle EAL = \angle EFL = \angle ADF$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Окру $(O; 4) \cap BC \Rightarrow BC$ - кас., $\Rightarrow CF = AC$ (по теореме)

$$\text{кас.} \Rightarrow \frac{CF}{BC} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{100}} = k = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ACP}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{3 \cdot 10}{10 \cdot 3} = 1$$

$$\text{Ответ: } \frac{S_{\triangle ACP}}{S_{\triangle CEF}} = 1.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

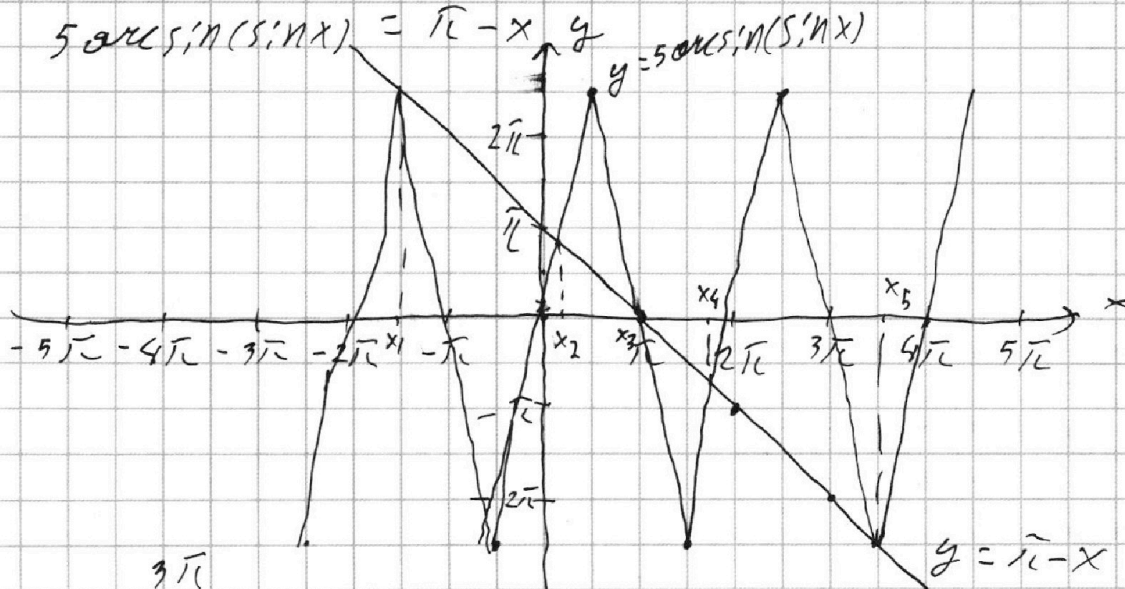
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$a \cos t + a \sin t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a \cos t = \frac{\pi}{2} - a \sin t$$

$$5 a \cos(\sin x) = 5 \frac{\pi}{2} - 5 a \sin(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5 a \sin(\sin x) = \pi - x$$



$$x_1 = -\frac{3\pi}{2}$$

$$x_2 = \frac{\pi}{6}$$

$$x_3 = \pi$$

$$x_4 = \frac{11\pi}{6}$$

$$x_5 = \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{Ответ: } x_1 = -\frac{3\pi}{2}; x_2 = \frac{\pi}{6}; x_3 = \pi; x_4 = \frac{11\pi}{6}; x_5 = \frac{3\pi}{2}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

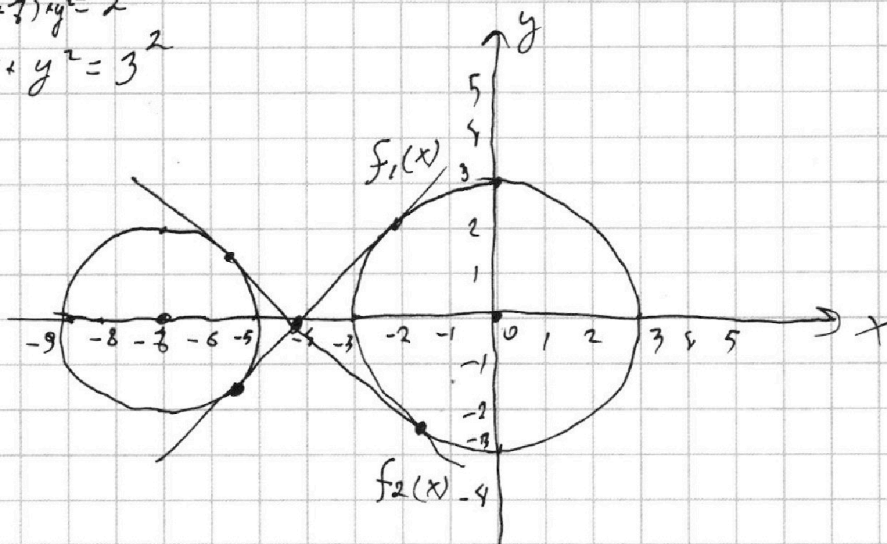
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ (x^2+17x+y^2+85)(x^2+y^2-9)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 \\ (x+7)^2+y^2=2^2 \\ x^2+y^2=3^2 \end{cases}$$



$x+3ay-7b=0$ — серия прямых // прямой $x+3ay=0$
очевидно, будет хотя бы одно b , при котором
будет 4 решения, если наклон прямой будет
меньше чем у общей внутренней касательной
касательной $f_1(x)$ или $f_2(x)$, ~~в противном случае~~ т.к. тогда
будет возможно одновременно пересечь
обе окр.

$$\exists y=kx+b - \text{кас.} \Rightarrow \begin{cases} y=kx+b \\ x^2+y^2=3^2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y=kx+b \\ (x+7)^2+y^2=2^2 \end{cases}$$

$$\text{имеют 1 рещ.} \Rightarrow (k^2+1)x^2+2kbx+b^2-9=0 \text{ и}$$

$$(k^2+1)x^2+2(kb+3)x+b^2+85=0 \text{ имеют 1 корень}$$

$$D=0 \Rightarrow$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 4k^2b^2 - (k^2+1)(b^2-9) \cdot 5 = 0 \\ 5(kb+3)^2 - 5(k^2+1)(b^2+5) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 9(k^2+1) \quad (1) \\ 5k^2b = 4 + 15kb \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \text{ в } (2): 5k^2b + 9k^2 \cdot 3 = 4 + 15k \cdot 3\sqrt{k^2+1}$$

$$(5k^2+5)^2 = 42^2k^2(k^2+1)$$

$$12 \cdot 96 k^4 - 1224 k^2 + 25 = 0 \Rightarrow k_1 = \frac{-\sqrt{3}}{12}, k_2 = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

$$k^2 = \frac{1225 \pm 1136}{2 \cdot 12 \cdot 96} = \left[\frac{6^2 \cdot 8^2}{6^2 \cdot 8^2} \right] \Rightarrow \begin{cases} k_3 = \frac{5\sqrt{6}}{12} \\ k_4 = \frac{5\sqrt{6}}{12} \end{cases}$$

у внутренних кас. коэффициентов по модулю больше $\Rightarrow k \in \left(-\frac{5\sqrt{6}}{12}, \frac{5\sqrt{6}}{12}\right)$

$$k \neq 2 \cdot 30a - 3b = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{3a} \Rightarrow \frac{1}{3a} \in \left(-\frac{5\sqrt{6}}{12}, \frac{5\sqrt{6}}{12}\right)$$

$$a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty\right)$$

Ответ: при $a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty\right)$.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt[5]{5} \quad \log_4^4(6x) - 2 \log_{6x} 4 = \log_{36x^2} 343 - 4 \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$3 // \log_4^4(6x) = t$$

$$t^4 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4 \quad | \cdot 2t \neq 0$$

$$2t^5 + 8t - 3 = 0$$

$$f(t) = 2t^5 + 8t - 3$$

$$f'(t) = 10t^4 + 8 > 0 \Rightarrow f(t) \text{ — монотонно возрастает}$$

$\Rightarrow$ если есть реш., то оно одно.

$$\log_4^4 y + 6 \log_y 4 = \log_{y^2} 14^5 - 4 \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_4^4 y + \frac{6}{\log_4 y} = \frac{5}{2 \log_2 y} - 4$$

$$3 // \log_2 y = n$$

$$n^4 + \frac{6}{n} = \frac{5}{2n} - 4 \quad | \cdot 2n \neq 0$$

$$2n^5 + 8n + 3 = 0$$

$$g(n) = 2n^5 + 8n + 3$$

$$g'(n) = 10n^4 + 8 > 0 \Rightarrow g(n) \nearrow \Rightarrow \text{если есть реш., то оно одно}$$

Пусть t_1 — решение $2t^5 + 8t - 3 = 0$

подставим $(-t_1) \Rightarrow 2(-t_1)^5 + 8(-t_1) - 3 = 0$

$$2t_1^5 + 8t_1 + 3 = 0 \Rightarrow$$

решение $2n^5 + 8n + 3 = 0$ является $-t_1 \Rightarrow$

$$n_1 = -t_1$$

$$\log_2 y = -\log_2 6x$$

$$y = \frac{1}{6x} \Rightarrow xy = \frac{1}{6}$$

Ответ: $xy = \frac{1}{6}$.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6

Если взять какую-нибудь т. $A(x_1; y_1)$, то множество
всех т. $B(x_2; y_2)$ удовлетворяющих уравнению

$$x_2 - x_1 + y_2 - y_1 = 40 \text{ это прямая, т.к. если}$$

$$x_2 - x_1 = \Delta x, y_2 - y_1 = \Delta y \Rightarrow \Delta y = 40 - \Delta x, \text{ т.к. и эта}$$

прямая параллельна стороне параллелога,

$$\text{т.к. } \Delta y \in [-68; 68] \Rightarrow \Delta x \in [-7; 27]$$

$$\Delta x \in [-79; 19] \Rightarrow \Delta x \in [-7; 19] \Rightarrow \Delta y \in [-36; 68] \Rightarrow$$

если взять т. $A(x_1; y_1) \Rightarrow$ т. B лежит на отрезке

с концами $(-7; 68)$ и $(19; -36)$ Если брать т. A на

нижней стороне параллелога, то будет 18 пар

для каждой точки, а точек можно взять 10 $\Rightarrow$
180 пар.

~~180 пар. Если не брать точки выше на рисунке~~
~~еще ≤ 36 , то пар тоже будет 180 $\Rightarrow$ всего~~
~~180 $\cdot$ 37 пар. Если брать ещё выше, то как во всех~~

~~будет~~ Если брать т. A выше, то множество

т. B будет составленным параллельным пере-

носам на вектор $\vec{m} \{-1; 4\}$ и количество пар

не будет меняться до достижения высоты 36

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

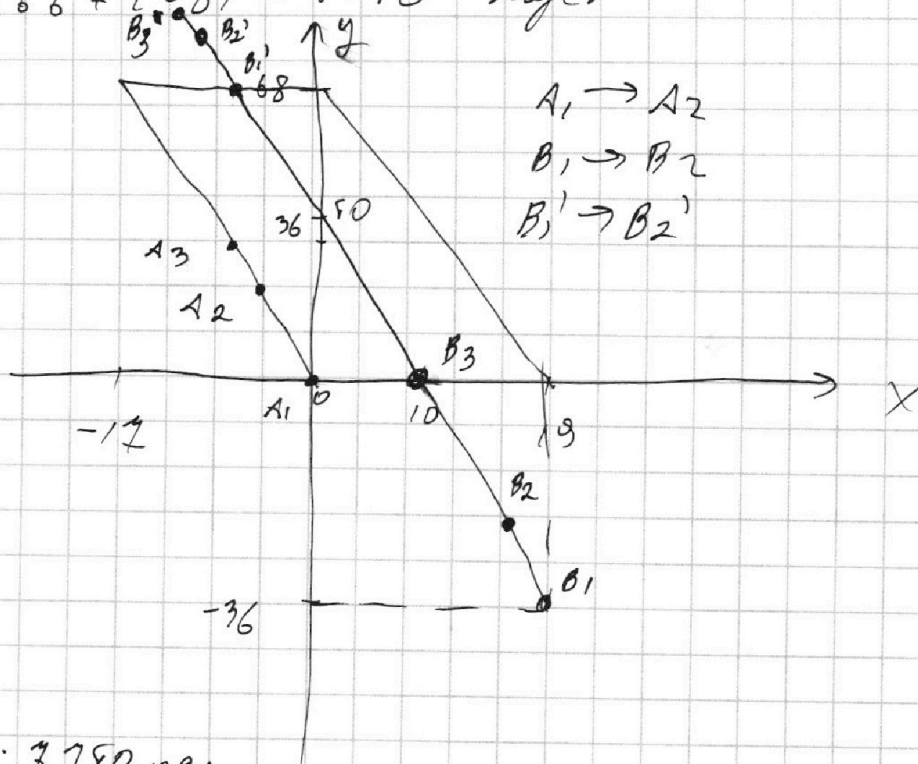
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

т.к. отрезок всё ещё будет ~~намного~~ пересекать
обе стороны параллелограмма, а после для
каждой из 10 точек будет уменьшаться на 1,
т.к. часть отрезка в параллелог. будет умень-
шаться $\Rightarrow$ всего пар точек $180 \cdot 33 + 18 \cdot 10 + 16 \cdot 10 +$
 $\dots + 10 \cdot 10 = 180 \cdot 33 + 10(18 + 16 + \dots + 10) = 10(18 \cdot 33 + \frac{27 \cdot 8}{2})$
 $= 10(666 + 108) = 7750$ пар.

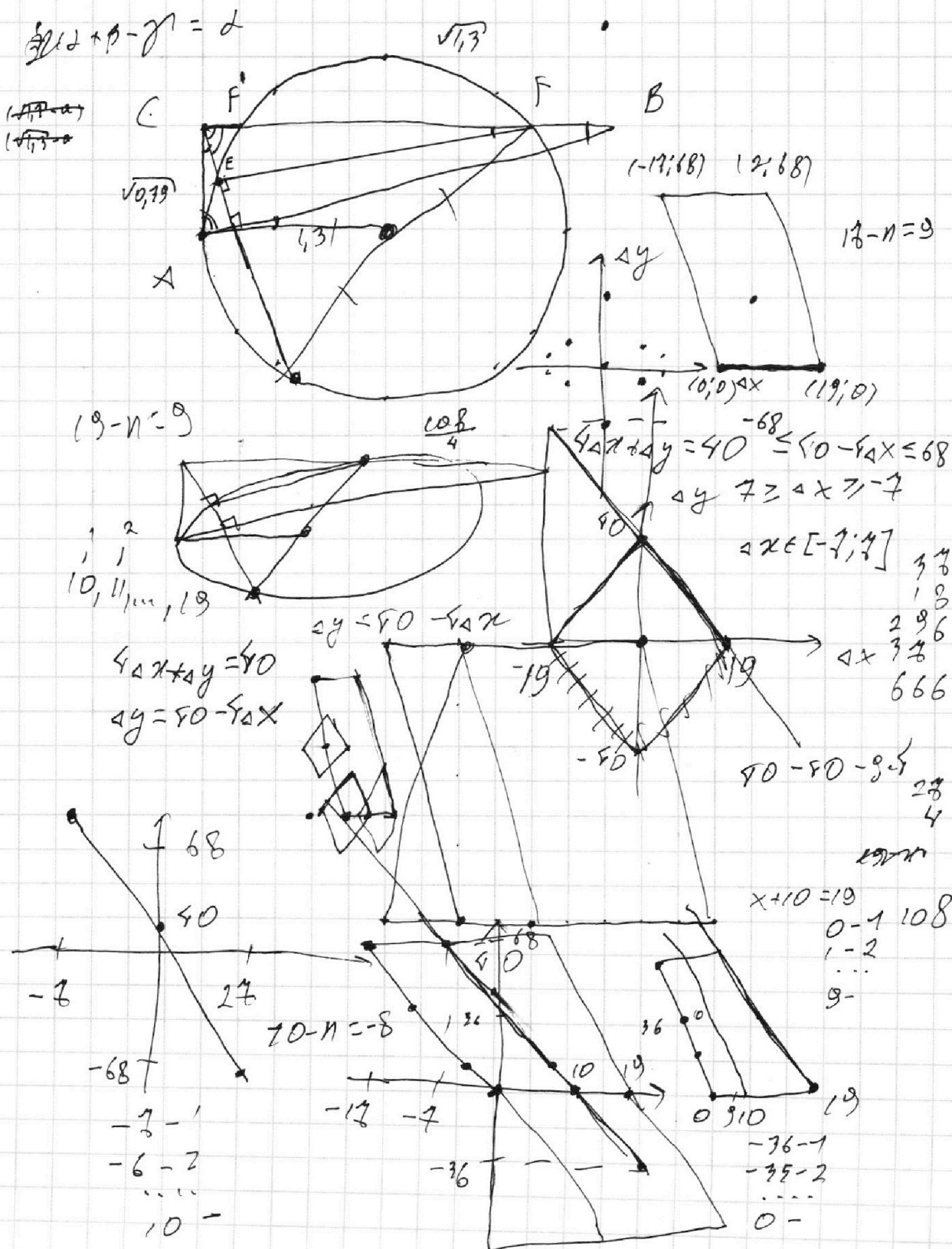


Ответ: 7750 пар.



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

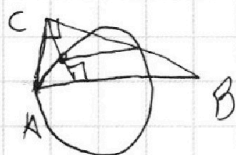
Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

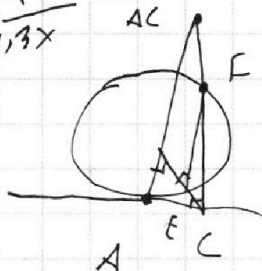
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



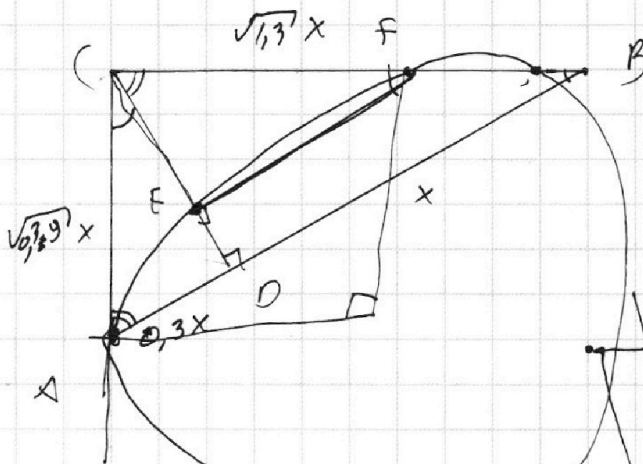
$$\frac{CD}{0,3x} = \frac{x}{CD}$$
$$\frac{AC}{1,3x} = \frac{0,3x}{AC}$$



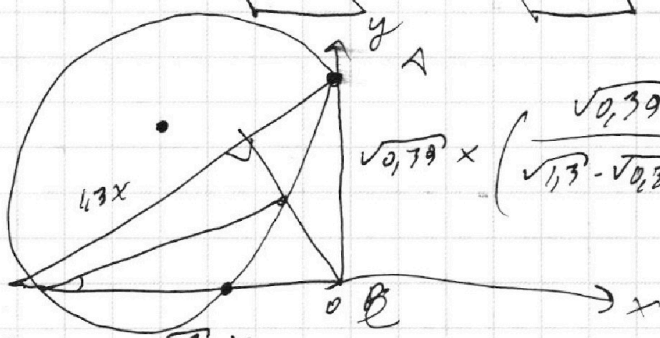
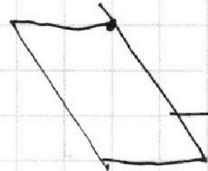
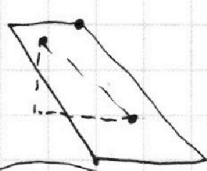
$$\frac{AD}{AD} = \frac{AB}{BD} = 1,3$$

$$AD = 0,3BD$$

$$AC = \sqrt{0,9}x$$



$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{CD}$$



$$\left(\frac{\sqrt{0,9}}{\sqrt{1,3} - \sqrt{0,39}} \right)^2 \cdot \frac{CD \cdot x}{2}$$

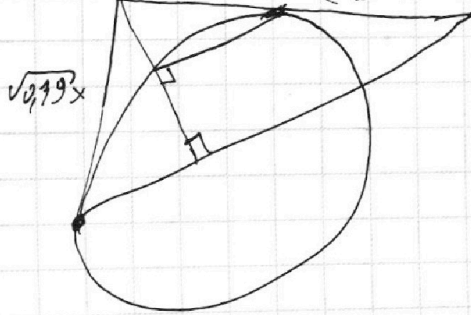
$$(x+z)^2 + (y - \sqrt{0,39}x)^2 = z^2$$

$$x^2 + 2xz + 0,39x^2 = 0$$

$$1,39x^2 + 2xz = 0$$

$$x = \frac{-2z}{1,39}$$

$$\sqrt{0,39}x \cdot (\sqrt{1,3} - \sqrt{0,39}) \cdot x \cdot 0,39$$



$$\frac{0,1}{0,13} \cdot \frac{10}{13} (981 - 2,6\sqrt{0,3})$$

$$0,12 \dots 14$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 + y^2 = 9$$

$$y = kx + b$$

$$x^2 + (kx + b)^2 + 55 = 0$$

$$x^2 + k^2 x^2 + 2kbx + b^2 + 55 = 0$$

$$4k^2 b^2 - 4(k^2 + 1)(b^2 + 55) = 0$$

$$k^2 b^2 = k^2 b^2 - 4k^2 b^2 - 9$$

$$b^2 = 9(k^2 + 1)$$

$$6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 32$$

$$x^2 + (kx + b)^2 + 55 = 0$$

$$(k^2 + 1)x^2 + 2(kb + 55)x + b^2 + 55 = 0$$

$$(kb + 55)^2 = (k^2 + 1)(b^2 + 55)$$

$$k^2 b^2 + 19kb = k^2 b^2 - 4 + 55k^2 + b^2$$

$$19kb = -4 + 55k^2 + b^2$$

$$55k^2 + b^2 = 5 + 19kb$$

$$55k^2 + 5 = 19k \cdot 3 \sqrt{k^2 + 1}$$

$$55^2 k^4 + 550k^2 + 25 = 92^2 k^4 + 92^2 k^2$$

$$12.96k^4 - 1225k^2 + 25 = 0$$

$$1225^2 - 12.9600$$

$$38$$

$$33$$

$$259$$

$$1$$

$$(40-1)^2$$

$$1600 + 1 - 80$$

$$(50-1)^2$$

$$2501 - 100$$

$$3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 59$$

$$17$$

$$3$$

$$17$$

$$3$$

$$17$$

$$3$$

$$17$$

$$3$$

$$17$$

$$3$$

$$17$$

$$3$$

$$17$$

$$9 \cdot 3^2 \cdot 9604$$

$$3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2 \cdot 2501 \cdot 59^2$$

$$89$$

$$24$$

$$196$$

$$98$$

$$1224$$

$$1176$$

$$125-962400$$

$$8 \cdot 3$$

$$24\sqrt{6}$$

$$5 \cdot 3$$

$$8 \cdot 3$$

$$22 \cdot 2 + 17$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$5b+5$$

$$21$$

$$28+15$$

$$6$$

$$7$$

$$42$$

$$52$$

$$84$$

$$168$$

$$1224$$

$$1224$$

$$9+3+5$$

$$1224$$

$$4896$$

$$2$$

$$448$$

$$1498176$$

$$775200$$

$$1382948$$

$$43$$

$$18$$

$$14$$

$$75$$

$$24.2$$

$$8 \cdot 3$$

$$1224$$

$$1176$$

$$125-962400$$

$$8 \cdot 3$$

$$24\sqrt{6}$$

$$5 \cdot 3$$

$$8 \cdot 3$$

$$22 \cdot 2 + 17$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^7 3^{11} 5^{14} \cdot 3$$

$$bc: 2^{13} 3^{15} 5^{18} \cdot 5$$

$$ac: 2^2 3^{17} 5^{43}$$

$$a = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3}$$

$$b = 2^{\beta_1} 3^{\beta_2} 5^{\beta_3}$$

$$c = 2^{\gamma_1} 3^{\gamma_2} 5^{\gamma_3}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \geq 7 \\ \alpha_2 + \beta_2 \geq 11 \\ \alpha_3 + \beta_3 \geq 14 \end{cases}$$

$$\sqrt{k_1 k_2 k_3} \cdot 2^{18} \cdot 3^{21} \sqrt{3} \cdot 5^{32}$$

$$abc = 2^{17} 3^{22} 5^{38}$$

$$c = 2^{10} 3^{11} 5^{14}$$

$$b =$$

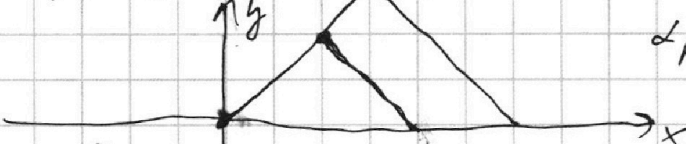
$$\sqrt[5]{6}$$

$$ab = 2^7 3^{12} 5^{14}$$

$$a \cos t + a \sin t = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5a \cos t \sin t = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5a \cos t \sin t = \pi - x$$



$$c = 2^{10} 3^{10} 5^{24}$$

$$a + b \geq 7$$

$$a + c \geq 14$$

$$b + c \geq 7$$

$$c \leq b + 7$$

$$x = 7b$$

$$y = \frac{1}{9a} x + \frac{3b}{9a}$$

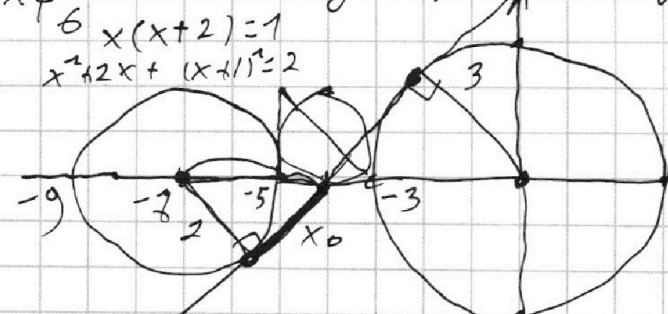
$$2^{13} 3^{15} 5^{18}$$

$$c^2 - 4 = l \cdot (x+5)$$

$$x > 0, x \neq \frac{1}{6}$$

$$x(x+2) = 1$$

$$x^2 + 2x + (x+1)^2 = 2$$



$$\sqrt[5]{k^2 + 5} = \sqrt[14]{k^2 + 9k + 3}$$

$$\log_8(6x) - 2 \log_{6x} 4 = \log_{36x^2} 2x^3 - 4$$

$$t^5 - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4$$

$$t^5 - 2 - 1.5 + 4t = 0$$

$$t \neq 0$$

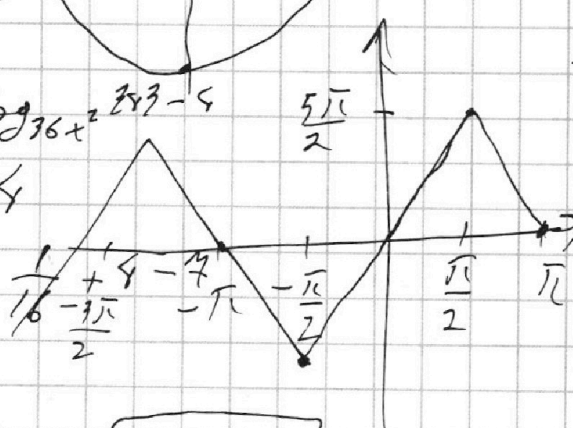
$$2t^5 + 8t - 7 = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$-(x+3)$$

$$\sqrt{9-(x_0+3)^2}$$

$$(x_0+3)^2 = 4 + (x_0+5)(x_0+9)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



5 3 4

ab: 2³ 3⁵ 5¹⁴ d_c 7
bc: 2¹⁹ 3¹⁵ 5¹⁸
ac: 2¹⁵ 3¹³ 5⁴³

$d_a + d_b \geq 7$ (1)
 $d_b + d_c \geq 13$ (2)
 $d_a + d_c \geq 14$ (3)

$d_c \geq 2d_a + 7$ (1) u (2)

$d_b \geq d_a + 6$ (1) u (2)
 $d_c \geq d_a + 13$

$d_b \geq d_a - 1$
 $d_c \geq d_a + 6$

$d_a + d_b \geq x$
 $d_b + d_c \geq y \Rightarrow$
 $d_a + d_c \geq z$

$d_a \geq d_c + 6$
 $d_b \geq d_c - 7$
 $d_b \geq d_a - 1$

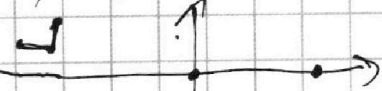
$d_c = 8, d_b = 0, d_a = 1$

$2d_c = 13$

$d_c \geq 10$

$d_a \geq 4$

$d_c = 10$
 $d_a = 4$
 $d_b = 3$



$$4(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 40$$

$$(k^2 + 1)x^2 + 2k^2x + k^2 - 9 = 0$$

$$x^2 + (kx + 6)^2 = 9$$

$$x \neq \frac{1}{6}, x > 0 \quad x^2 + 15x + k^2x^2 + 2k^2x + k^2 - 9 = 0$$

$$\frac{4}{t} - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4$$

$$10n^4 + 8$$

$$4k^2b^2 - 4(k^2 + 1)(b^2 - 9) = 0$$

$$2t^5 + 8t - 4 = 0$$

$$n^4 + \frac{6}{n} = \frac{5}{2n} - 4$$

$$2n^5 + 8n + 4 = 0$$

$$\log_3(6x) = -\log_3(4)$$

$$6x = \frac{1}{y}$$

$$xy = \frac{1}{6}$$

$d_a \geq d_c + (x - y)$
 $d_b \geq d_c + (x - z)$
 $d_b \geq d_a + (y - z)$

$$13 \cdot 4$$

$$\frac{34 + 14}{2}$$

$\beta_a \geq \beta_c - 4$
 $\beta_b \geq \beta_c - 6$

β_c
 $\gamma_a \geq \gamma_c - 4$
 $\gamma_b \geq \gamma_c - 29$

$$\sqrt{10} - 5$$

$$2\sqrt{10}$$

$$9(k^2 + 1) = b^2$$

$\gamma_c = 24$
 $\gamma_a = 20$
 $\gamma_b =$

$$\begin{cases} y = \sqrt{10} - x \\ y = 5x + 10\sqrt{10} \end{cases}$$

$$5x - 10\sqrt{10} = \sqrt{10} - x$$

$$k^2b^2 = k^2a^2 - 9k^2 + b^2 - 9$$