



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

$$2^{18} \cdot 3^{28} \cdot 5^{33}$$

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .

$$-2\sqrt{2} : \frac{\pi}{2}$$

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases} \quad a \in (-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty)$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3. \quad \frac{1}{2}$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$\square ab = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \cdot n, n \in \mathbb{N}$$

$$bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \cdot m, m \in \mathbb{N}$$

$$ac = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39} \cdot k, k \in \mathbb{N}$$

$$\frac{ab \cdot ac}{bc} = a^2 = 2^{10} \cdot 3^{15} \cdot 5^{34} \cdot \frac{n \cdot k}{m}$$

$$\frac{ab \cdot bc}{ac} = b^2 = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{10} \cdot \frac{nm}{k}$$

$$\frac{ac \cdot bc}{ab} = c^2 = 2^{18} \cdot 3^{27} \cdot 5^{44} \cdot \frac{mk}{n}$$

$$a = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^{17} \cdot \sqrt{\frac{3nk}{m}}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^6 \cdot \sqrt{\frac{3nm}{5^{10}k}}$$

$$c = 2^9 \cdot 3^{13} \cdot 5^{22} \cdot \sqrt{\frac{3mk}{n}}$$

т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, то $\frac{3nk}{m}, \frac{3nm}{5^{10}k}, \frac{3mk}{n} \in \mathbb{N}$.

Каждое из чисел n, m, k встречается в числителе дроби $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ ~~не нужно~~ чтобы вынести 3 из под знака корня, одно из чисел
должно делиться на 3 $\Rightarrow$ ~~не нужно~~ ~~общности~~
 $\Rightarrow$ в двух из чисел a, b, c увеличится
степень числа 3 на 1. Не учитывая общности, $3k = 3e, e \in \mathbb{N}$,
т.к. от выбора n, m, k произведение abc не изменится:

$$a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{17} \cdot \sqrt{\frac{ne}{m}}; \text{ чтобы } \frac{n \cdot m}{5^{10}e} \text{ было натуральным,}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^6 \cdot \sqrt{\frac{nm}{5^{10}e}};$$

$$c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{22} \cdot \sqrt{\frac{me}{n}};$$

$$mn : 5^{10} \Rightarrow \square m = 5^{\alpha} \cdot d; \quad d, d_2 \in \mathbb{N} \wedge$$

$$n = 5^{\beta} \cdot d_2;$$

$$\text{где } \alpha + \beta = 10, \text{ но числа}$$

a и c имеют $\sqrt{\frac{n}{m}}$ и $\sqrt{\frac{m}{n}} \Rightarrow$ если $\alpha \neq \beta$, то числа a и c имеют
большую степень числа 5 $\Rightarrow abc$ будет больше $\Rightarrow \square \alpha = \beta = 5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{17} \cdot \sqrt{\frac{d_2 e}{d_1}}; b = 2^3 \cdot 3^6 \cdot \sqrt{\frac{d_1 d_2}{e}}; c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{22} \sqrt{\frac{d_1 e}{d_2}}$$

Очевидно, что если $e = d_2 = d_1$, то числа наименьшие $\Rightarrow$

$$\Rightarrow abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

Ответ: $abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐

2 ☒

3 ☐

4 ☐

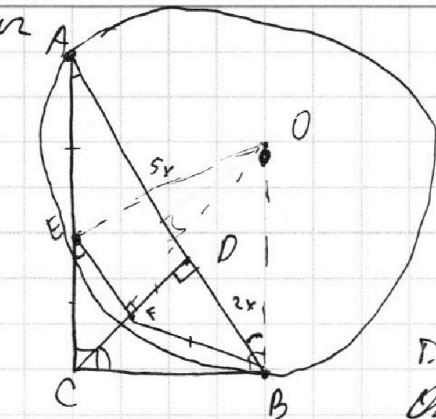
5 ☐

6 ☐

7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\square AD = 5x; DB = 2x \Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot DB} = x\sqrt{10}$$

$$BC = \sqrt{CD^2 + DB^2} = x\sqrt{14}$$

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = x\sqrt{35}$$

т.к. также применим теорему о касательной

$$\Rightarrow BC^2 = EC \cdot AC$$

$$14x^2 = EC \cdot \sqrt{35}x \Rightarrow EC = 2\sqrt{\frac{7}{5}}x$$

$$S_{\triangle ACD} = \frac{5}{7} S_{\triangle ABC}$$

$$\triangle ECF \sim \triangle ACD \Rightarrow \frac{S_{\triangle ECF}}{S_{\triangle ACD}} = k^2 = \left(\frac{EC}{AC}\right)^2 \Rightarrow S_{\triangle ECF} = \frac{4}{25} S_{\triangle ACD}$$

$$S_{\triangle ECF} = \frac{4}{35} S_{\triangle ABC}$$

Ответ: $\frac{S_{\triangle ECF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4}{35}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

$$10 \arccos(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\arccos(t) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \in [-2\pi; 3\pi]$$

$$\Rightarrow x = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$1. \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

$$10\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \pi - 2(\varphi + 2\pi k)$$

$$\varphi = 0, k = -1$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, k = 0, \text{ т.к. } \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}k \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, x = -2\pi$$

$$2. \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right] \Rightarrow \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \pi - 2(\varphi + 2\pi k) \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}k \Rightarrow \varphi = \pi, k = 1$$

$$\Rightarrow x = \pi + 2\pi = 3\pi$$

$$3. \varphi \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \arccos(\cos x) = -\frac{3\pi}{2} + \varphi$$

$$10\left(\varphi - \frac{3\pi}{2}\right) = \pi - 2(\varphi + 2\pi k)$$

$$\varphi = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3}k \Rightarrow \varphi = \frac{4\pi}{3}, k = 0, \text{ т.к. } \varphi \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4\pi}{3}$$

$$4. \varphi \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right] \Rightarrow \arccos(\cos x) = \varphi - 2\pi$$

$$10(\varphi - 2\pi) = \pi - 2(\varphi + 2\pi k)$$

$$\varphi = \frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{4}k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \varphi = \frac{7\pi}{4}, k = 0, \text{ т.к. } \varphi \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{7\pi}{4}$$

$$\text{Ответ: } x = -2\pi; x = \frac{\pi}{2}; x = 3\pi; x = \frac{4\pi}{3}; x = \frac{7\pi}{4}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

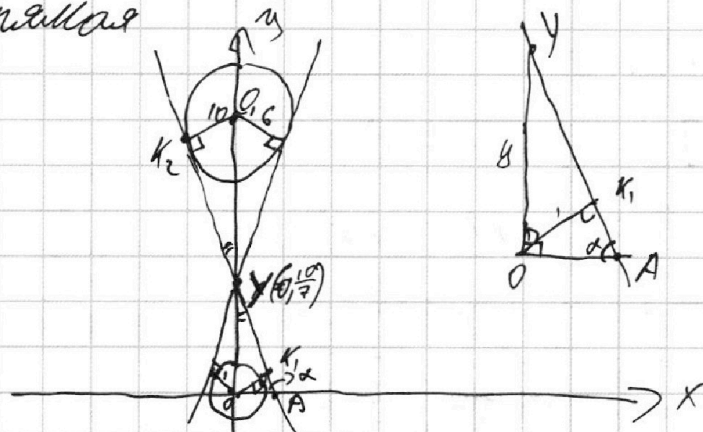


$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

окружности с ц. $(0; 0)$ $r = 1$
ц. $(0; 10)$ $r = 6$

$$y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b - \text{прямая}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 10)^2 = 6^2 \end{cases}$$



т.к. решений 4, то прямая пересекает окр-ти в двух точках каждой. также возможно, когда угол наклона прямой в дгого OX имеет значения между значениями углов ~~как~~ внутренних касательных

$$\Delta K_1 O Y \sim \Delta K_2 O Y \text{ по 2-м углам} \Rightarrow \frac{K_2 O_1}{K_1 O} = \frac{O_1 Y}{O Y} = \frac{10 - y}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{10}{7}$$

$$\alpha = \angle OAY = \angle YOK_1 = \arccos \frac{OK_1}{OY} = \arccos \frac{7}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{(\frac{7}{10})^2} - 1\right)} = \pm \frac{\sqrt{51}}{7} \Rightarrow \text{два решения будут, когда } \begin{cases} \tan \alpha > \frac{\sqrt{51}}{7} \\ \tan \alpha < -\frac{\sqrt{51}}{7} \end{cases}, \text{ но } y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b \Rightarrow \tan \alpha = \frac{a}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{3} > \frac{\sqrt{51}}{7} \\ \frac{a}{3} < -\frac{\sqrt{51}}{7} \end{cases} \Rightarrow a \in (-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } a \in (-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}) \cup (\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 5

$$3// t = \log_5(2x); n = \log_5 y$$

$$\text{ОДЗ: } x > 0; y > 0 \\ x \neq \frac{1}{2}; y \neq 1$$

$$\begin{cases} t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3t} - 3 | t \neq 0 \\ n^4 + \frac{4}{n} = -\frac{1}{3n} - 3 | n \neq 0 \end{cases}$$

Если подставить $t=0$ и $n=0$, то есть $2x=1$ и $y=1$ в исходные уравнения, получим неверное равенство $\Rightarrow t \neq 0; n \neq 0$

$$\begin{cases} 3t^5 + 3t - 13 = 0 \\ 3n^5 + 3n + 13 = 0 \end{cases}$$

т.к. $f(x) = 3x^5 + 3x$ — монотонно возрастающая функция, то к. $f'(x) = 15x^4 + 3$, система имеет одно решение, т.к. каждое значение она принимает один раз.

$$t^5 + n^5 + 3(t+n) = 0$$

$$(t+n)(t^4 - t^3n + t^2n^2 - tn^3 + n^4 + 3) = 0$$

$t+n=0$, больше реш. нет, т.к. t и n — единственные

Спр-зи $\log_5(2x) + \log_5(y) = 0$

$$\log_5(2xy) = 0 \Rightarrow 2xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ответ: } xy = \frac{1}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

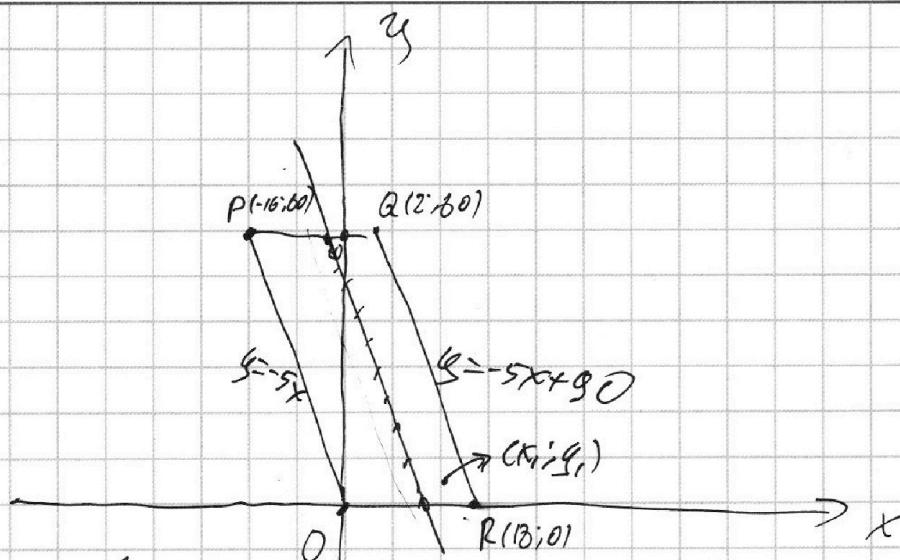
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~6



Пусть мы выбрали $\tau: A(x_1; y_1) \Rightarrow$ есть

$y_2 = -5x_2 + 5x_1 + y_1 + 45$ — функция $y_2(x_2)$ — заданная
ординаты точек $B(x_2; y_2)$. Заметим, что данная
прямая параллельна PQ и $QR \Rightarrow \tau: A(x_1; y_1)$ соответствует
отрезку полученный при пересечении прямой

$y_2(x_2)$ параллельноуглами. Углы когда данная

прямая пересекает его. $\tau: (x_1; y_1 + 45) \in y_2(x_2)$

Прямая $y_1(x_1)$ должна иметь между $y = -5x$ и

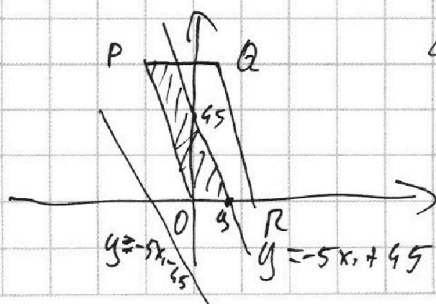
$$y = -5x + 90 \Rightarrow \begin{cases} y_2 \geq -5x_2 \\ y_2 \leq -5x_2 + 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 + y_1 \geq -45 \\ 5x_1 + y_1 \leq 45 \end{cases}$$

Каждой $\tau: (x_1; y_1)$ соответствует 17 точек, т.к. на PQ
лежит 17 τ с целочисленными координатами.

$$\begin{cases} y_1 \geq -5x_1 - 45 \\ y_1 \leq -5x_1 + 45 \end{cases}$$

— данные неравенства дают
нам ~~квадрат~~ параллелограмм со
сторонами основания 9 и высотой
80. $\Rightarrow$ всего $10 \cdot 81 = 810$ точек. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ Всего пар: $\frac{810 \cdot 17}{2} = 6885$, т.к.
каждую посчитали дважды.

Ответ: 6885.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① $\angle(ABC; BSC) = 180^\circ - \angle KON$, т.к. сфера касается
данных плоскостей в т. К и т. N $\Rightarrow ON \perp (BSC)$
 $OK \perp (ABC)$

$SL = SN = 4$ (т.к. отрезки касательных) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AK = 12 = AK \Rightarrow \underline{KA_1 = 12}$; $KA_1 = A_1N$ (т.к. отрезки касатель-
ных)

Ответ: а) 3600
б) -

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

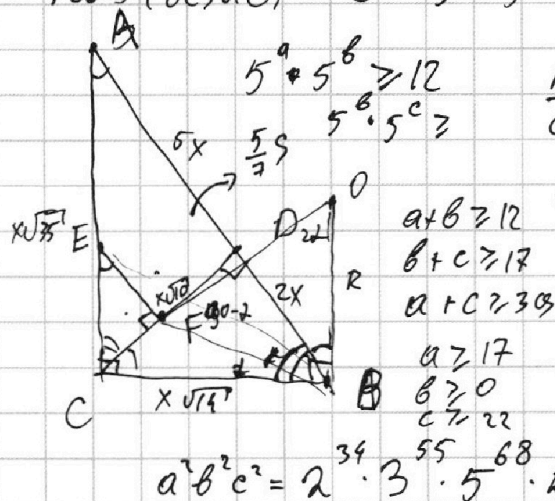
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

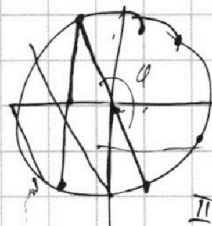


$$\begin{aligned} \text{НОД}(ab, bc) &= 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} = b \cdot \text{НОД}(a, c) & \varphi \in (0; \frac{\pi}{2}); k \in (-1; 1) \\ \text{НОД}(ab, ac) &= 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} = a \cdot \text{НОД}(b, c) \\ \text{НОД}(bc, ac) &= 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} = c \cdot \text{НОД}(a, b) \end{aligned}$$



$$\frac{AB}{CE} = \frac{AC}{EF} = \frac{BC}{CF}$$

$$CD = x\sqrt{10} - \left(\frac{\pi}{2} - (\pi - \varphi)\right)$$

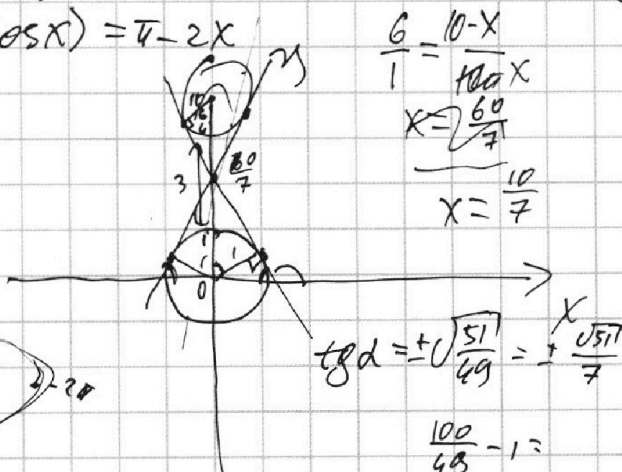


$$\begin{aligned} a+b &\geq 14 \\ b+c &\geq 20 \\ a+c &\geq 21 \\ a &\geq 8 \\ b &\geq 7 \\ c &\geq 14 \\ a+b+c &\geq 28 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 b^2 c^2 &= 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68} \cdot k \\ abc &= 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34} \cdot \sqrt{3k} - \left(\frac{\pi}{2} - (\pi - \varphi)\right) = \frac{\pi}{2} + \varphi \\ abc &= 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34} \cdot C = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{22} \\ b &= 2^3 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \\ a^2 &= 2^{10} \cdot 3^{15} \cdot 5^{34} \cdot k \\ b^2 &= 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{10} \cdot n \\ c^2 &= 2^{18} \cdot 3^{27} \cdot 5^{44} \cdot m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^{17} \cdot \sqrt{3k} \\ b &= 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^{11} \cdot \sqrt{3 \cdot 5 \cdot n} \\ c &= 2^9 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot \sqrt{3m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10 \arcsin(\cos x) &= \pi - 2x \\ -\frac{\pi}{2} &\leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2} \\ -25 &\leq x \leq 34 \end{aligned}$$



$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + (y-10)^2 = 6^2$$

$$\begin{cases} \frac{1461}{\sqrt{a^2 + 9}} \leq 1 \\ \frac{146 - 301}{\sqrt{a^2 + 9}} < 6 \end{cases}$$

$$y = \frac{a}{3}x - 4b$$

$$\begin{aligned} \frac{16}{6} &< \sqrt{a^2 + 9} \\ d &= \arccos \frac{7}{10} \\ \beta &= \pi - d \end{aligned}$$

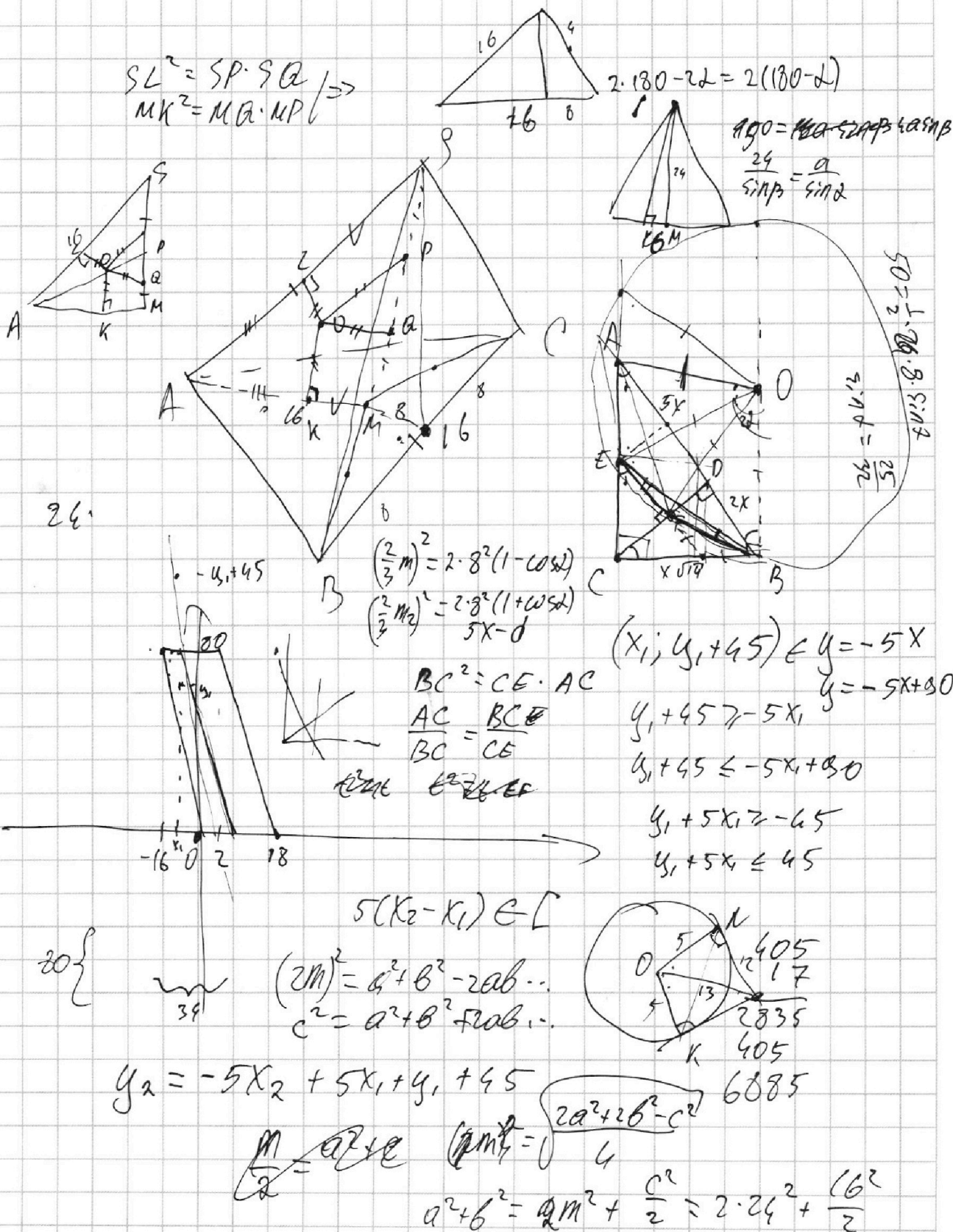
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

