



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

Пусть $st_p(n)$ - степень вхождения p в разложение n на простые. Заметим, что $st_p(nm) = st_p(n) + st_p(m)$

Пусть $st_2(a) = a_2$; $st_3(a) = a_3$; $st_5(a) = a_5$; $st_2(b) = b_2$; $st_3(b) = b_3$; $st_5(b) = b_5$; $st_2(c) = c_2$; $st_3(c) = c_3$; $st_5(c) = c_5$.

По условию $ab: 2^6 3^{15} 5^{11} \Rightarrow$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 6 \\ a_2 + c_2 \geq 14 \\ b_2 + c_2 \geq 21 \\ b_3 + c_3 \geq 21 \\ b_5 + c_5 \geq 13 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 + c_2 \geq 16 \\ a_3 + c_3 \geq 25 \\ a_5 + c_5 \geq 28 \end{cases} \quad \begin{cases} a_3 + b_3 \geq 13 \\ a_5 + b_5 \geq 11 \end{cases}$$

, следовательно

Складывая первые, вторые и третьи неравенства соответственно из каждой системы, получаем:

$$\begin{cases} 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 36 \\ 2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 59 \\ 2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 + c_2 \geq 18 \\ a_3 + b_3 + c_3 \geq 30 \\ a_5 + b_5 + c_5 \geq 28 \end{cases}$$

(м.к. $a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{N}$)

$$\begin{cases} st_2(abc) \geq 18 \\ st_3(abc) \geq 30 \\ st_5(abc) \geq 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} abc: 2^{18} \\ abc: 3^{30} \\ abc: 5^{28} \end{cases} \Leftrightarrow (m.k. (2^{18}, 3^{30}, 5^{28}) = 1) \Leftrightarrow abc: 2^{18} 3^{30} 5^{28} \Rightarrow abc \geq 2^{18} 3^{30} 5^{28}$$

Пример: пусть $a = 2^4 3^9 5^{15}$, $b = 2^2 3^4 5^0$, $c = 2^{12} 3^{17} 5^{13}$, тогда $ab = 2^6 3^{13} 5^{15}$:
 $: 2^6 3^{15} 5^{11}$; $ac = 2^{16} 3^{26} 5^{28}$; $bc = 2^{14} 3^{21} 5^{13}$; $abc = 2^{18} 3^{30} 5^{28}$.

Ответ: $2^{18} 3^{30} 5^{28}$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №3

Пусть $y = \arcsin(\sin x)$, $y \in [0; \pi] \Rightarrow 0 \leq 10y \leq 10\pi \Rightarrow$
 $\Rightarrow 0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi \Leftrightarrow -9\pi \leq -2x \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{9\pi}{2} \leq -x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$
 $-4\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \pi$. Заметим, что $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, $\cos y = \sin x \Rightarrow$
 $\Rightarrow y$ - такое число $\in [0; \pi]$, что $\cos y = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

Рассмотрим все возможные случаи расположения $\frac{\pi}{2} - x$

I случай: $-4\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq -3\pi$, тогда $y = \frac{\pi}{2} - x + 4\pi = \frac{9\pi}{2} - x$

$$\begin{cases} -4\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq -3\pi \\ 10(\frac{9\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{9\pi}{2} \leq -x \leq -\frac{7\pi}{2} \\ 10(9\pi - 2x) = 2(9\pi - 2x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2} \\ x = \frac{9\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$x = \frac{9\pi}{2}$ - один из ответов

II случай: $-3\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq -2\pi$, тогда $y = -(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi) = x - \frac{5\pi}{2}$

$$\begin{cases} -3\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq -2\pi \\ 10(x - \frac{5\pi}{2}) = 9\pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7\pi}{2} \leq -x \leq -\frac{5\pi}{2} \\ 10x - 25\pi = 9\pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2} \\ x = \frac{17\pi}{6} \end{cases}$$

$\frac{5\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2} \Rightarrow \frac{15\pi}{6} \leq x \leq \frac{21\pi}{6}$ $x = \frac{17\pi}{6}$ - один из ответов

III случай: $-2\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq -\pi$, тогда $y = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi = \frac{5\pi}{2} - x$

$$\begin{cases} -2\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq -\pi \\ 10(\frac{5\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5\pi}{2} \leq -x \leq -\frac{3\pi}{2} \\ 25\pi - 10x = 9\pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2} \\ x = 2\pi \end{cases}$$

$x = 2\pi$ - один из ответов

ит. на след. листе

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 13 (продолжение)

~~III случай: $-\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq -\pi$ тогда $y = -(\frac{\pi}{2} - x + \pi)$~~
~~$$\begin{cases} -2\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq -\pi \\ 10(x - \frac{3\pi}{2}) = 9\pi - 2x \end{cases}$$~~

IV случай: $-\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq 0$, тогда $y = x - \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} -\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq 0 \\ 10(x - \frac{\pi}{2}) = 9\pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3\pi}{2} \leq -x \leq -\frac{\pi}{2} \\ 10x - 5\pi = 9\pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \\ x = \frac{7\pi}{6} \end{cases}$$

$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{6} \leq x \leq \frac{9\pi}{6}$ $x = \frac{7\pi}{6}$ — один из ~~решений~~ ^{ответов}

V случай $0 \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \pi$, тогда $y = \frac{\pi}{2} - x$

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \pi \\ 10(\frac{\pi}{2} - x) = 9\pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq -x \leq \frac{\pi}{2} \\ 5\pi - 10x = 9\pi - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$x = -\pi/2$ — один из ^{ответов}

Ответ: $x \in \{-\pi/2; 7\pi/6; 2\pi; 17\pi/6; 9\pi/2\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 14 (продолжение)

Допустим, что если $-\frac{5}{6a} \in [k_2; k_1]$, то
прямая $-\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$ не может иметь 4 пересечения
с ω_1 и ω_2 . Пусть l_3 - прямая с угл. коэф. $k_3 \in [k_2; k_1]$.
Проведем прямую l_3 через точку $\Phi - l_3'$. Пусть
 B_1, B_2, C_1, C_2 - т. касания как на рисунке. т.к. $k_3 \in [k_2; k_1]$, то
 l_3' окажется в углах $\angle B_2 \Phi C_1$ и $\angle B_1 \Phi C_2$, если $\Rightarrow$
~~прямая~~ $\Rightarrow$ она не имеет не более 1 пересечения с
каждой окр., если l_3 лежит выше l_3' , то она не
пересекает ω_2 , аналогично если ниже, то $\omega_1 \Rightarrow$ она не
может иметь 4 т. пересеч. с ω_1 и ω_2 .

Если же $-\frac{5}{6a} \notin [k_2; k_1]$, то достаточно выбрать
в точке, что прямая проходит через т. Φ и она
пересечет ω_1 и ω_2 в 4 точках. $\Rightarrow$ ~~ответ: 4~~

~~Далее~~ Заметим, что $k_2 = -k_1$,

найдем k_1 . Заметим, что Φ - центр симметрии
с коэф. $-\frac{2}{5}$ переводящий ω_1 в $\omega_2 \Rightarrow \frac{\Phi O_1}{\Phi O_2} = \frac{5}{2} \Rightarrow \Phi O_1 = \frac{45}{7}$,
 $O_1 B_1 = 5 \Rightarrow$ по Т. Пифагора в $\triangle \Phi O_1 B_1$: $\Phi B_1 = \frac{20\sqrt{2}}{7} \Rightarrow \tan \angle = \frac{4}{\sqrt{2}} \Rightarrow$
 $\Rightarrow k_1 = \tan(90^\circ - \angle) = \frac{4\sqrt{2}}{7} \Rightarrow k_2 = -\frac{4\sqrt{2}}{7}$ см. на след. листе



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4 (продолжение)

$$\begin{cases} -\frac{5}{6a} > \frac{4\sqrt{2}}{7} \\ -\frac{5}{6a} < -\frac{4\sqrt{2}}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{6a} + \frac{4\sqrt{2}}{7} < 0 \\ \frac{4\sqrt{2}}{7} - \frac{5}{6a} < 0 \end{cases} \quad a=7$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{35 + 24a\sqrt{2}}{42a} < 0 \\ \frac{24a\sqrt{2} - 35}{42a} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in \left(-\frac{35\sqrt{2}}{48}, 0\right) \\ a \in \left(0, \frac{35\sqrt{2}}{48}\right) \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\frac{35\sqrt{2}}{48}, 0\right) \cup \left(0, \frac{35\sqrt{2}}{48}\right)$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

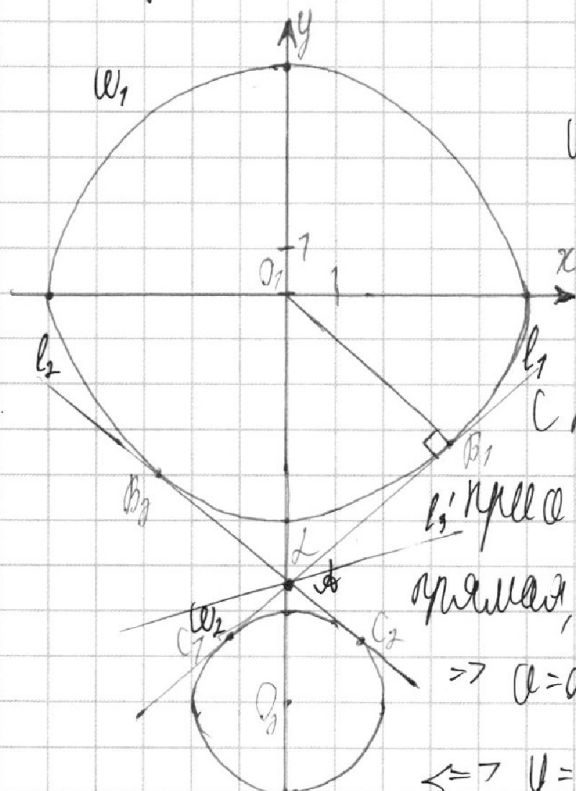
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + (y+9)^2 - 4) = 0 \end{cases}$$



Второе ур-е задает 2 окр w_1 и w_2 , изображенные на рисунке, чтобы система имела 4 решения график ур-ия $5x + 6ay - b = 0$ должен иметь с ними 4 пересечения. Заметим, что

$l_1: y = 0$, этот график — горизонтальная прямая, она не может иметь 4 т. пер. с w_1 и w_2 ⇒

⇒ $a \neq 0$, тогда ур-е $5x + 6ay - b = 0$ ⇒

⇒ $y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$ — ур-е прямой, за-

метим, что при изменении в ур. коэф. прямой не меняется ⇒

⇒ она просто поднимается или опускается, причем меняя в ней

нужные знаки $\frac{b}{6a}$ ⇒ надо найти при каких

условиях коэф. прямая имеет 4 пересечения с w_1 и w_2

Проведем к w_1 и w_2 2 общие касательные l_1 и l_2 как на рисунке. Пусть $F = l_1 \cap l_2$, пусть K_1 — ур. коэф. l_1 , K_2 — ур. коэф. l_2 и. на след. шаге



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5.

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5$$



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6

Пусть целая точка-точка с целыми координатами

Пусть $6x_1 + y_1 = k$, тогда

$$\begin{cases} 6x_1 + y_1 = k \\ 6x_2 + y_2 - k = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -6x_1 + k - \text{прямая } l_1 \\ y_2 = -6x_2 + k + 48 - \text{прямая } l_2 \end{cases}$$

Заметим, что если $A \in l_1$, $B \in l_2$, то условие для них выполняется. Также заметим, что прямая l_1 имеет уравнение $y = -6x + 102$,

а прямая l_2 имеет уравнение $y = -6x + k + 48$.

Значит для каждого $k \in [0; 54]$ прямые l_1 и l_2 будут пересекаться в точке PQ .

Заметим, что на прямой l_1 (внутри отрезка)

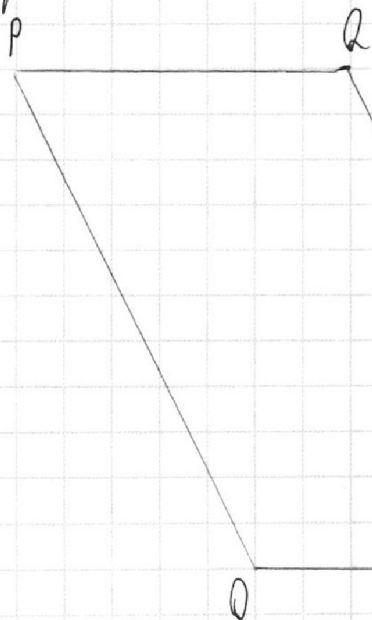
лежит 16 точек с целыми координатами ($0 - (-15) + 1$), также на каждой прямой $y = -6x + t$, где t — любое целое число, (т.к. эти прямые — сдвиги прямой $y = -6x$ на целое расстояние) на прямой $y = -6x + t$, где t — любое целое число, лежит 15 целых точек.

Заметим, что на прямой l_1 (внутри отрезка) лежит 16 точек с целыми координатами ($0 - (-15) + 1$), также на каждой прямой $y = -6x + t$, где t — любое целое число, (т.к. эти прямые — сдвиги прямой $y = -6x$ на целое расстояние) на прямой $y = -6x + t$, где t — любое целое число, лежит 15 целых точек.

Заметим, что на прямой l_1 (внутри отрезка) лежит 16 точек с целыми координатами ($0 - (-15) + 1$), также на каждой прямой $y = -6x + t$, где t — любое целое число, (т.к. эти прямые — сдвиги прямой $y = -6x$ на целое расстояние) на прямой $y = -6x + t$, где t — любое целое число, лежит 15 целых точек.

Заметим, что на прямой l_1 (внутри отрезка) лежит 16 точек с целыми координатами ($0 - (-15) + 1$), также на каждой прямой $y = -6x + t$, где t — любое целое число, (т.к. эти прямые — сдвиги прямой $y = -6x$ на целое расстояние) на прямой $y = -6x + t$, где t — любое целое число, лежит 15 целых точек.

или на след. листе



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐



Задача 16. (продолжение)

Назовём парой прямых 2 прямые вида $y_x = -6x + k$ и $y = -6x + k + 48$, где $k \in [0; 54]$, $k \in \mathbb{Z}$

Заметим, что А и В удов. условию только если А летит на первую прямую из пары, а В на вторую. Также, заметим, что на прямых в одной паре одинаковое кол-во целых точек внутри $PAKO$, т.к. если $k \in \mathbb{Z}$, то $k:6 \Leftrightarrow k+48:6$. Если на пря-

мых из пары по n точек, то пар (А, В) удовств. условию n^2 . Заметим, что всего пар прямых 55 из них 10 пар на каждой прямой по 16 точек, а в остальных 45 пар на каждой прямой по 15 целых точек внутри $PAKO \Rightarrow$ всего указанных кол-во пар точек равно

$$10 \cdot 16^2 + 45 \cdot 15^2 = 2560 + 10125 = 12685$$

Ответ: 12685