МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-6x+2}-\sqrt{3x^2+3x+1}=1-9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=14$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система

$$\begin{cases} ax+y-8b=0, \\ (x^2+y^2-1)\left(x^2+(y-12)^2-16\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 5 и 2,5.

© МФТИ, 2023

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

$ab \vdots 2^{15} 7^{11}$

$bc \vdots 2^{17} 7^{18}$ $\Rightarrow a^2b^2c^2 \vdots 2^{(15+17+23)} \cdot 7^{(11+18+39)} = 2^{55} \cdot 7^{68}$

$ac \vdots 2^{23} 7^{39}$

Т.к. $a^2b^2c^2$ - квадрат (числа abc), то все степени вхождения всех его простых делителей четны, и при этом т.к. $a^2b^2c^2 \vdots 2^{55} \cdot 7^{68}$ то степень вхождения в разложение $a^2b^2c^2$ на простые ≥ 56, а 7 - ≥ 68. $\Rightarrow abc \vdots 2^{\frac{56}{2}} \cdot 7^{\frac{68}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$

$|a|_2 + |b|_2 \geq 15$

$|b|_2 + |c|_2 \geq 17$

$|a|_2 + |c|_2 \geq 23$

$ab \vdots 2^{15} 7^{11}$

$bc \vdots 2^{17} 7^{18}$ $\Rightarrow a^2b^2c^2 \vdots 2^{55} \cdot 7^{68}$

$ac \vdots 2^{23} 7^{39}$

Т.к. $a^2b^2c^2$ - квадрат (числа abc) то степень вхождения простых чисел в их разложение четна $\Rightarrow |a^2b^2c^2|_2 \geq 56$ $\Rightarrow |abc|_2 \geq 28$, $|abc|_7 \geq 34 \Rightarrow abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$ т.к. $2 \perp 7$.

~~Пример, когда достигается равенство:~~

~~ac~~ Но при этом $abc \vdots ac \vdots 7^{34} \Rightarrow |abc|_7 \geq 39$

Значит, $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$

Пример, когда достигается равенство:

$a = 2^{10} \cdot 7^{21}$

$b = 2^{5}$ $\Rightarrow abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$

$c = 2^{13} \cdot 7^{18}$

Ответ: $\min(abc) = 2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2 Если $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ сократимая на m,

то и $\frac{a^2+b^2-7ab}{a+b}$ сократимая на m.

$\frac{a^2+b^2-7ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2-9ab}{a+b} = a+b - \frac{9ab}{a+b} \Rightarrow$

$\frac{-9ab}{a+b}$ должно быть сократимо на m. Т.к. $(a,b)=1$,

то $(ab, a+b)=1 \Rightarrow$ Если что и сократится

в числителе, то только ~~одним~~ вхождение

в множитель 9 $\Rightarrow m \le 9$. Пример:

$a=7,\ b=2 \Rightarrow \frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{9}{-45} = -\frac{1}{5}$

Ответ: $\max(m)=9$.

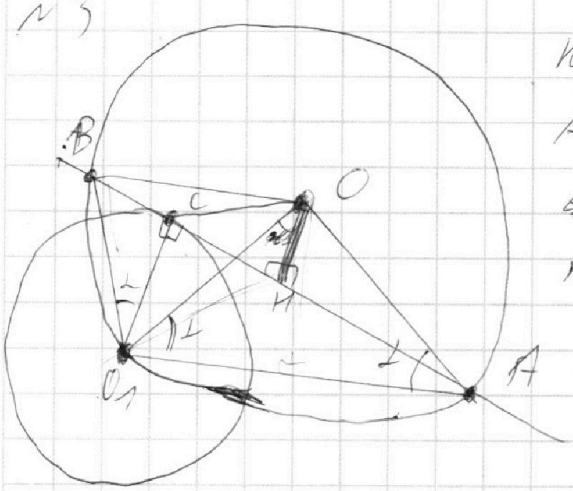
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 3



по усл. $O_1C = 7$, $\frac{BC}{AC} = \frac{7}{17}$ (=) $BC = 7x$, $AC = 17x$) $AO = OO_1 = OB = 13$. ~~Пусть~~ пусть $\angle BO_1C = \angle$, тогда $tg\angle = \frac{BC}{O_1C} = \frac{7x}{7} = x$. Т.к. $OB = OA$ как радиусы, то $\triangle OBA$ – р/б => высота OH – и биссектриса и медиана $= AH = BH = \frac{AB}{2} = 12x$ => $CH = BH - BC = 5x$

~~Если~~ $\angle = \angle OCH$ т.к. $\triangle OCH$ и O_1CB – $\cong$. => если $x > 1$ то ~~OH~~ $AH > 12$, $OH < 5$ => $CH > 5$ => $x < 1$ противоречие, если $x < 1$, то $AH < 12$ => $OH > 5$ => $CH < 5$ => $x > 1$ – противоречие => $x = 1$ => $AB = 17x = 17$

Ответ: 17

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

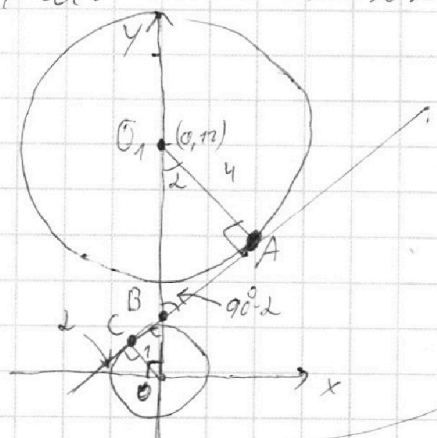
МФТИ

№6 $\begin{cases} ax+y-8b=0 \quad (1) \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16)\le 0 \quad (2) \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ x^2+(y-12)^2\ge 16 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2\ge 1 \\ x^2+(y-12)^2\le 16 \end{cases} \end{array}\right.$ – их коорд. мн-ва на OXY это два ~~окружности~~ круга с центрами в (·) $(0,0)$ и $(0;12)$ ~~соотв.~~ и радиусами 1 и 4 соотв. (~~от~~ Нам удовл. все точки из любого круга, а точки вне этих кругов – нет.

(1) – прямая вида $y=-ax+8b$, и если нужно чтобы имело 2 решения, нужно чтобы эта прямая была одной из ~~касательных~~ общих касательных к окружностям, т.к. пересечений у прямой и круга – либо 0, либо 1 (в случае касания) либо бесконечно много.

1 сл. Если касательная внутренняя:



Пусть O и O_1 – центры кругов, A и C – точки касания (как на рис), B – точка пересечения прямой $ax+y-8b=0$ и OY. Т.к. если прямая задана ур-ием $y=kx$, то $k=tg\alpha$, где α – угол между прямой и OX. $tg\alpha = \frac{AB}{O_1B}$ (из $\triangle O_1AB$, $\angle BO_1A=\alpha$ т.к. $\angle CBO=90°-\alpha$ (~~как~~ сумма углов в $\Delta=180°$) $=\angle O_1BA$ (как верт.). $tg\alpha =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

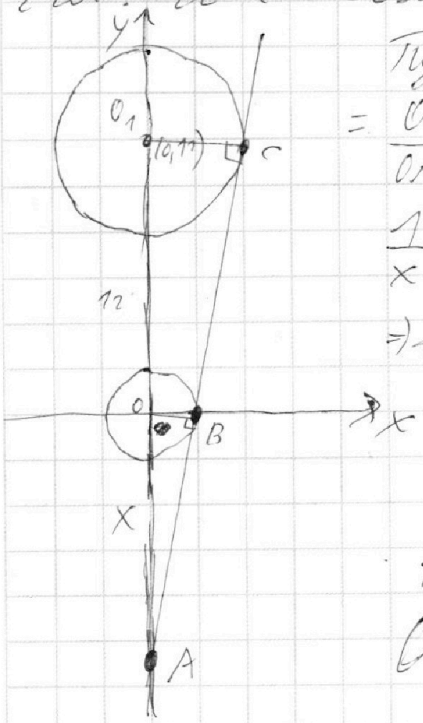
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6 (продолж)

~~Если~~ пусть угол между касательной и $Ox = \angle$ (пусть он острый, т.к. картинка симметрична ~~поэтому~~ чих отн. OY, то если нам подошло некоторое a, то и $-a$ - подойдет, ~~а~~ тогда $tg\angle = -a$ т.к. $-a$ - коэф при x в ур-ии прямой. Тогда $\angle CBO = 90^\circ - \angle$ по сумме углов Δ, $\angle CBO = \angle O_1BA$ как верт $\Rightarrow \angle BO_1A = \angle$ из суммы углов Δ. $\Delta O_1BA \sim OBC$ как п/у Δ с верт. углом $\Rightarrow \angle COB = \angle$. $\cos\angle$ (из ΔO_1BA) $= \frac{4}{O_1B}$; $\cos\angle$ (из ΔOBC) $= \frac{1}{OB} \Rightarrow$ ~~tg~~ если $OB = x$, то $O_1B = 12 - x$, т.к. $OO_1 = 12$, $\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{4}{12-x} \Rightarrow 4x = 12 - x \Rightarrow x = 2,4 \Rightarrow \cos\angle = \frac{5}{12} \Rightarrow$ ~~tg∠ = 12~~ $\Rightarrow a = \pm tg(\arccos\frac{5}{12})$, тогда $b = x \Rightarrow b = 0,6$ (т.к. b - координата точки пересечения касательной и OY, т.е. точки B)

2 сл: если касательная внешняя:



Пусть $OA = x$, тогда $O_1A = 12 + x$. $\sin\angle = \frac{OB}{OA}$ (из ΔOBA) $= \frac{O_1C}{O_1A}$ (из ΔO_1CA) $\Rightarrow$

$\frac{1}{x} = \frac{4}{12+x} = \sin\angle \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4 = \frac{1}{\sin\angle}$

$\Rightarrow$ ~~cos∠~~ $a = \pm tg(\arcsin\frac{1}{4})$ (т.к. ~~картинка см~~ вторая касательная аналогично 1 сл. будет симм. отн. $OY \Rightarrow$ если a - подходит то и $-a$ подойдет) тогда $B = 4$ (т.к. аналог 1 сл. это y координата точки A)

Ответ: $\left[\begin{array}{l} a = \pm tg(\arcsin\frac{1}{4}) \\ a = \pm tg(\arccos\frac{5}{12}) \end{array}\right.$

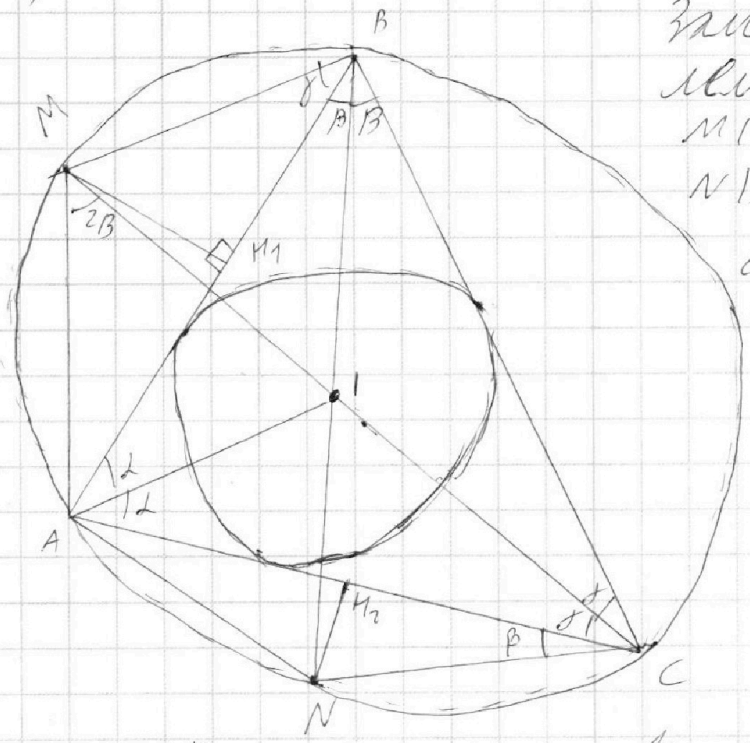
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№7



Заметим, что по лемме о трезубце $MI = AM = MB$, и $NI = NA = NC$. Пусть:
$\angle BAI = \angle IAC = \alpha$;
$\angle ABI = \angle IBC = \beta$;
$\angle ACI = \angle ICB = \gamma$;
(т.к. I - центр впис окр, тогда BI, CI и AI биссектрисы углов B, C и A соотв.)
$\angle AMC = 2B$ как впис,
$\angle ANI = 2\gamma$ как впис,
$\angle ACN = \beta$ и $\angle ABM = \gamma$ как вписанные опир. на дуги AN и AM соотв; значит, если MH_1 и NH_2 - высоты из точек M и N на прямые AB и AC, то $MB = \frac{5}{\sin\gamma} = MA = MI$; $NC = \frac{7,5}{\sin\beta} = NA = NI \Rightarrow$ по т. косинусов для $\triangle AMI$ $AI^2 = AM^2 + MI^2 - 2AM \cdot MI \cdot \cos 2B =$

$= \frac{2 \cdot 25}{\sin^2\gamma} - \frac{2 \cdot 25}{\sin^2\gamma} \cdot \cos 2B$, а по т. косинусов для $\triangle ANI$

$AI^2 = AN^2 + NI^2 - 2AN \cdot NI \cdot \cos 2\gamma = \frac{2 \cdot 7,5^2}{\sin^2\beta} - \frac{2 \cdot 7,5^2}{\sin^2\beta} \cdot \cos 2\gamma \Rightarrow$

$\Rightarrow AI^2 = \frac{2 \cdot 25}{\sin^2\gamma}(1 - \cos 2B) = \frac{2 \cdot 6,25}{\sin^2\beta}(1 - \cos 2\gamma)$. $1 - \cos 2x =$

$= \sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x = 2\sin^2 x$. $\Rightarrow AI^2 = \frac{50 \cdot 2\sin^2\beta}{2\sin^2\gamma} =$

$= \frac{12,5}{\sin^2\beta} \cdot 2\sin^2\gamma \Rightarrow \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\beta} = \frac{50}{12,5} \Rightarrow \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\beta} = \sqrt{\frac{5^2}{2,5^2}} =$

$= 2 \Rightarrow AI^2 = \frac{2 \cdot 25}{\sin^2\gamma} \cdot 2\sin^2\beta = 50 \Rightarrow AI = 5\sqrt{2}$

Ответ: $5\sqrt{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X	X				X	X

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ x^2+(y-12)^2 \ge 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 \ge 1 \\ x^2+(y-12)^2 \le 16 \end{cases}$$

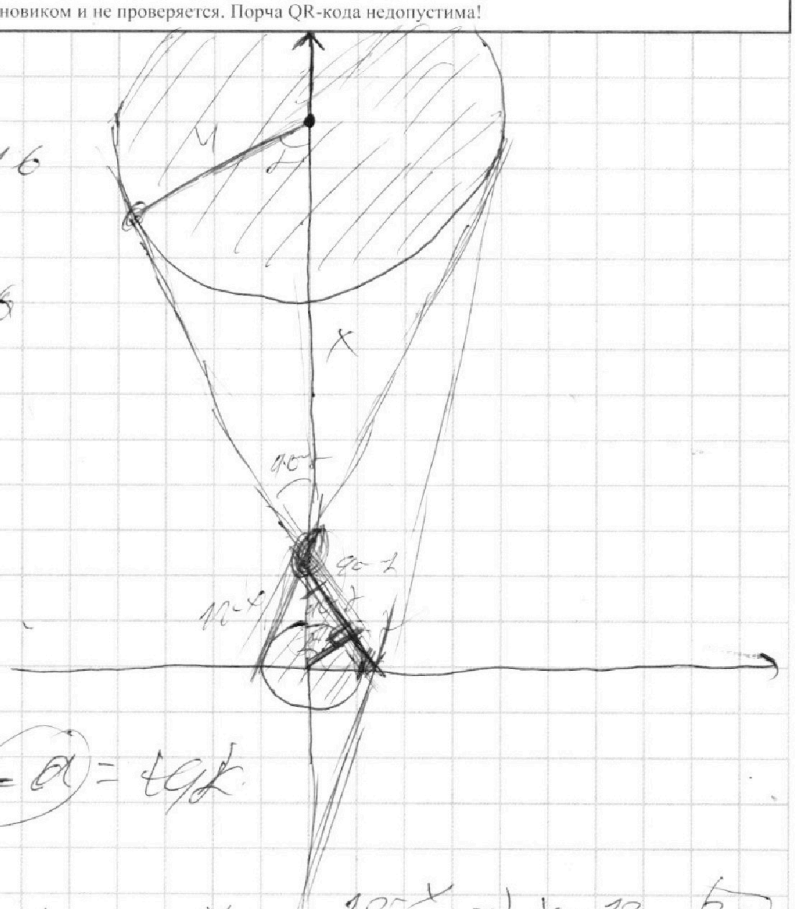
$ax+y-2b=0$

$y=-ax+2b$

$y=kx+b$

$x^2+(y-12)^2=16$

$-a=tg\alpha$



$\cancel{\frac{12-x}{y}=\frac{1}{\cos\alpha}}$

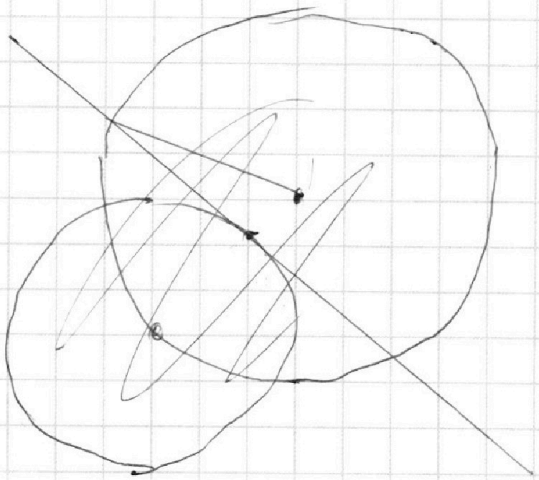
$\frac{y}{12-x}=\cos\alpha=\frac{1}{x} \Rightarrow 4x=12-x \Rightarrow x=\frac{12}{5}=\boxed{2,4}$

$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{5}{12} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{12}{13} \Rightarrow \boxed{tg\alpha=\frac{12}{5}}=-a$

$a=\pm\frac{12}{5} \Rightarrow b=2,4$

$2x=\frac{12}{5}$

$x=\frac{3}{10}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$+226x^2+4 - 12x^2+60x = +12x^2 - 72x^2$

$-24x+24x^2+24x+8$

$27x^4+54x^3 - 249x^2-60x+4$

$432+432+4 - 996+120$

868

$432\cdot 2^4+432\cdot 2^3 = 432(16+8)$

$10368+4 -$

$3456+4 - 996+$

$3x^2-6x+2=0$

$\frac{6\pm\sqrt{36-24}}{6}$

$\frac{6\pm 2\sqrt{3}}{6}$

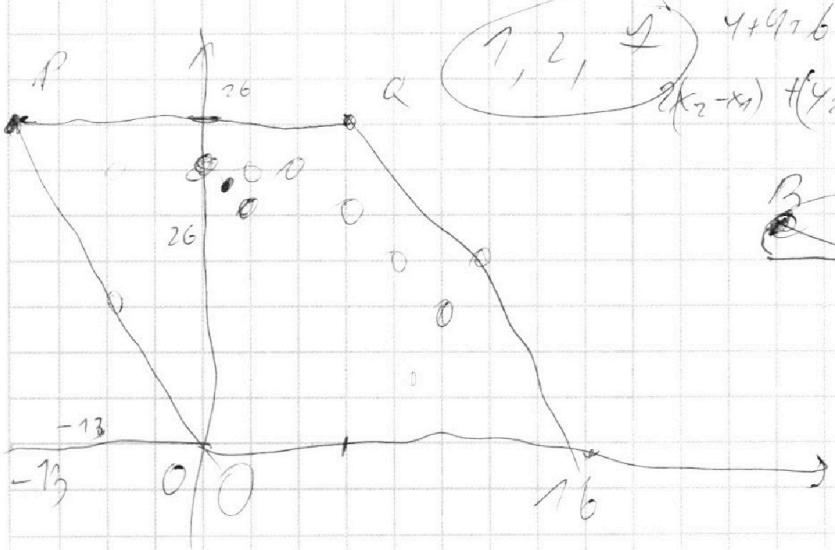
$x^2+3x+1=0$

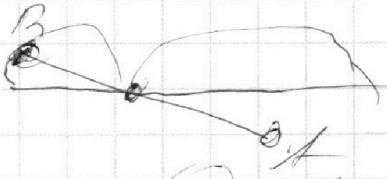
$-3\pm\sqrt{9-12}$

$4+4+6$ (17)

$1, 2, 1$

$2(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=14$





$\frac{5}{3}$

если 2 корня то $a+b$ - целое a^2+b^2-7ab - целое

$x_2-x_1 \le 16-(-13) = \boxed{\le 29}$

$y_2-y_1 \le 26$

$\neq 2$

$\frac{(a+b)^2-9ab}{a+b}$ $(a+b)$

$a+b - \frac{9ab}{a+b} \to 9$

>9

$101-40\cdot 2+4$

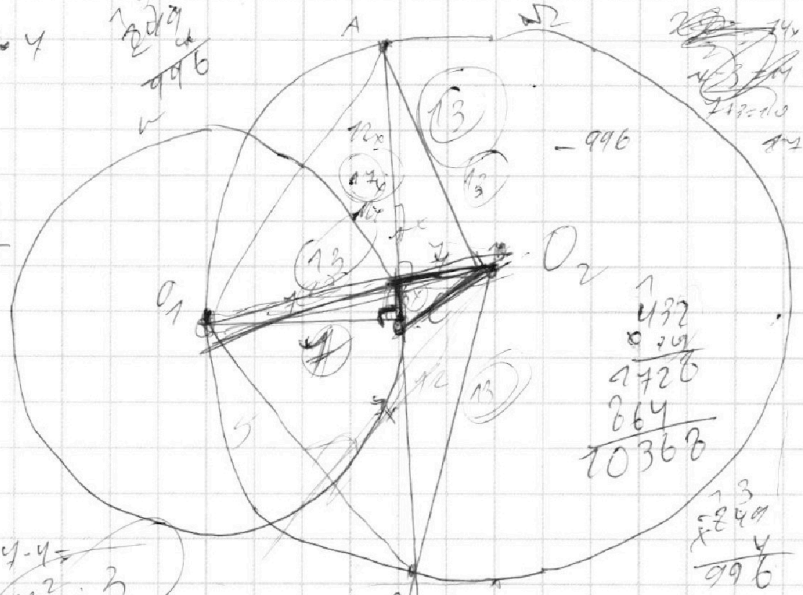
$-49+4 = -45$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$\frac{AC}{AC} = \frac{17}{7}$

$x = 1$

$(3x^2 - 15x - 2)$

$\sqrt{3x^2}$

$3x^2 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1$

$6x^2 - 3x + 3$

$3(2x^2 - x + 1) = 1 - 10x + 9x^2 + 2\sqrt{(2x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)}$

$-3x^2 + 15x + 2 = 2\sqrt{\ }$

$(3x^2 - 15x - 2)^2 = 4(2x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)$

$+225x^2 + 4 - 90x - 12x^2 + 60x = 4(+6x^2 + 3x^2 - 6x + 6x^2 + 6x + 2)$

$27x^4 + 81x^3 - 204x^2 - 60x$

$-60 + 24 - 36$

$225 - 36$

$225 - 84$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

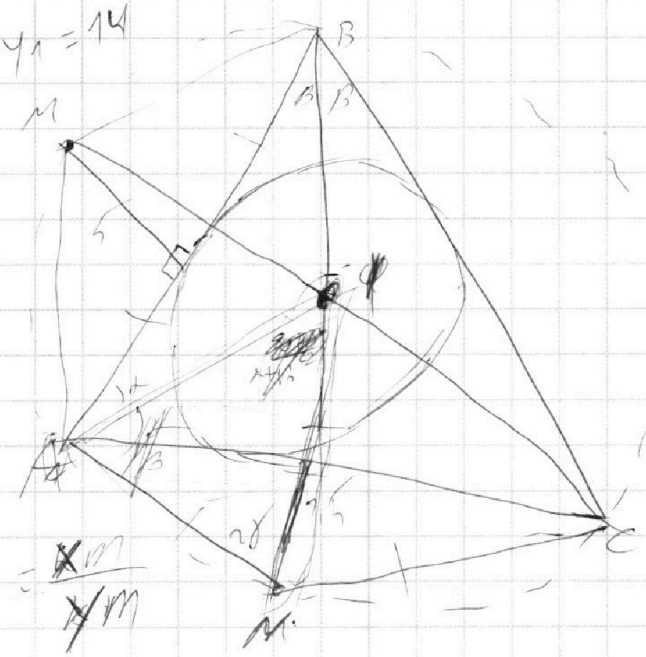
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$

$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$

$2(x_2 - x_1)$



$BM = \frac{5}{\sin\gamma}$

$NC = \frac{2,5}{\sin\beta}$

$\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta$

$\cos 2\gamma = \cos^2\gamma - \sin^2\gamma$

$AN = 2b/\sin\beta$

$BM_1 = AM = 2b/\sin\gamma$

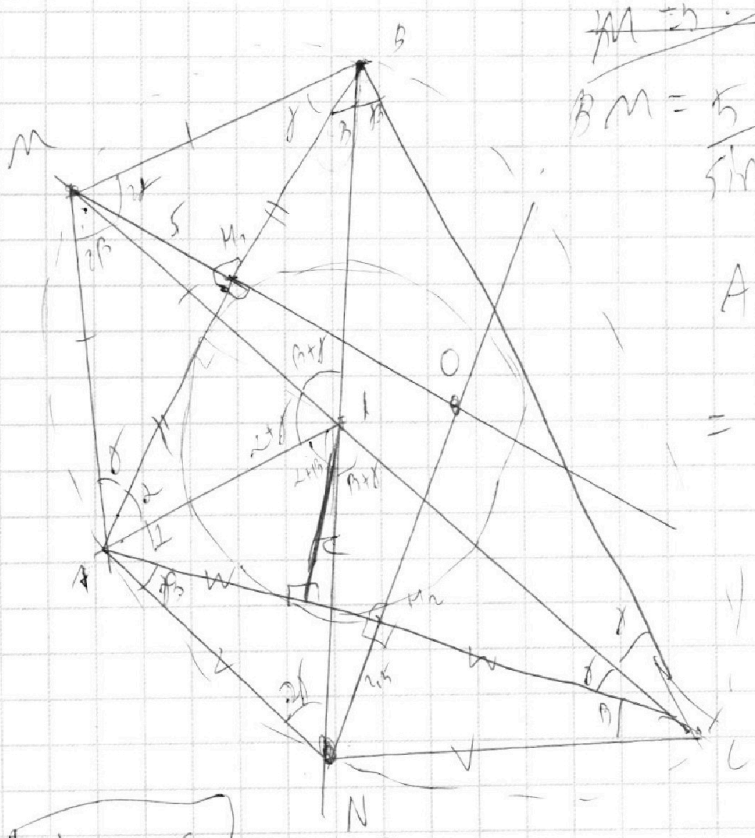
$\frac{ab}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{xm}{ym}$

$\frac{AM}{AN} = \sqrt{\frac{2\sin\gamma}{2\sin\beta}}$

$\cancel{AM = 5 \cdot \sin\gamma}$

$BM = \frac{5}{\sin\gamma} \Rightarrow AI^2 = \frac{2 \cdot 25}{\sin^2\gamma} \cdot (1 - \cos^2\beta + \sin^2\beta)$

$AI = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$



$AI^2 = \frac{2 \cdot 25}{\sin^2\gamma} - \frac{2 \cdot 25}{\sin^2\gamma} \cdot (\cos^2\beta - \sin^2\beta)$

$= \frac{2 \cdot 6,25}{\sin^2\beta} - \frac{2 \cdot 6,25}{\sin^2\beta} \cdot (\cos^2\gamma - \sin^2\gamma)$

$\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\beta} = \frac{5(1 - \cos 2\beta)}{12,5(1 - \cos 2\gamma)}$

$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{5}{5} \frac{\sin^2\beta}{1 - \cos^2\beta + \sin^2\beta}$

$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = 2\sqrt{\frac{1 - \cos 2\beta}{1 - \cos 2\gamma}}$

$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = 2\sqrt{\frac{2\sin^2\beta}{2\sin^2\gamma}} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$

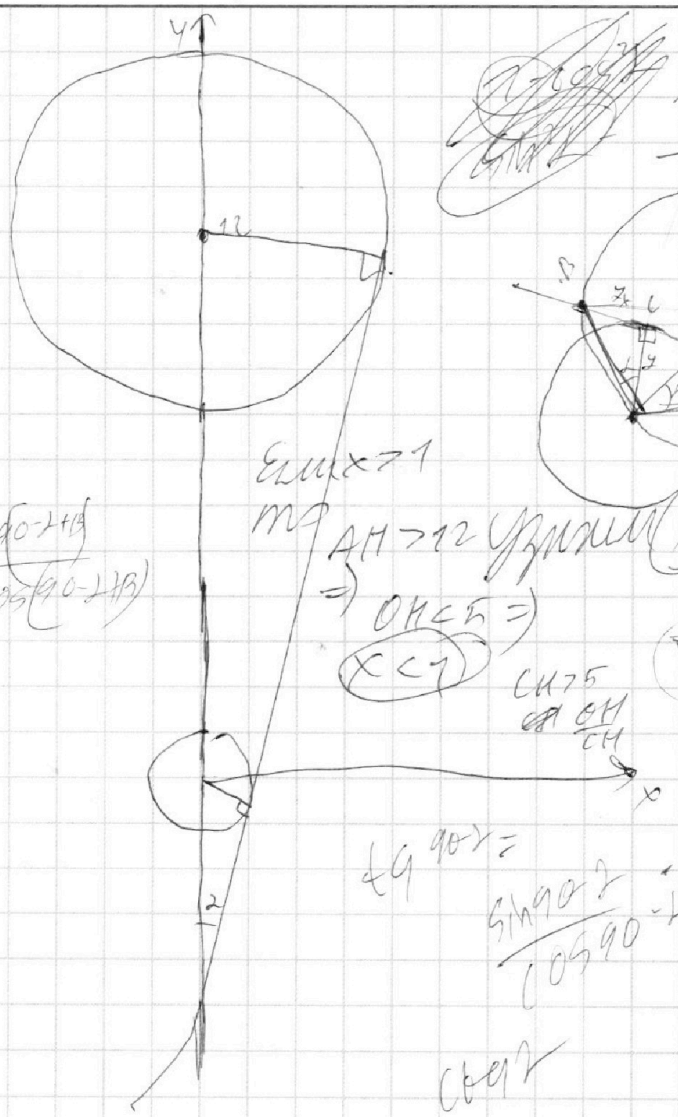
$\boxed{\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \sqrt{2}}$ ⇒ $\sin\beta$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

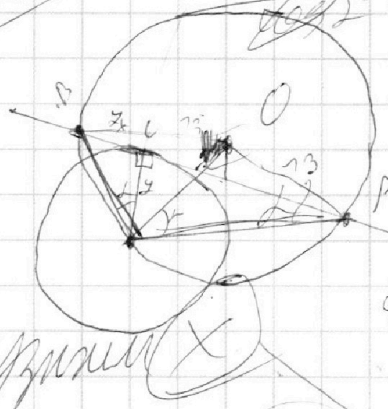
МФТИ



$tg\,2 = x$

$x \le \frac{28}{24}$

$1 - tg^2 =$



знаю $\angle 2$

мы

$tg(90 - \angle + \beta) =$

Если $x > 1$

то $AH > 12$ уравнение (x)

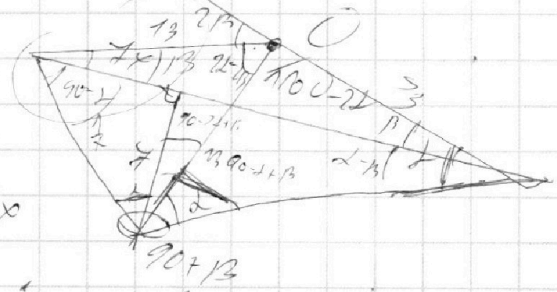
$\Rightarrow OH < 5 \Rightarrow$

$x < 1$

$\frac{\sin(90 - 2\angle + \beta)}{\cos(90 - 2\angle + \beta)}$

$CH > 5$

$\frac{OH}{CH}$



$tg\,90 - \angle =$

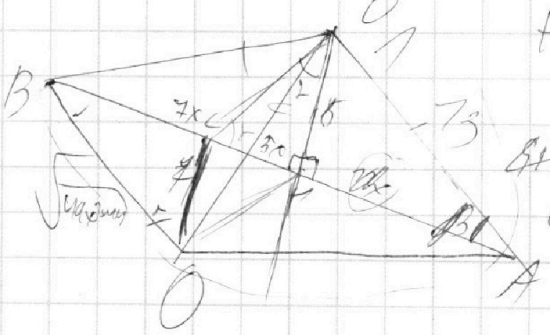
$\frac{\sin 90 - \angle}{\cos 90 - \angle} + 180 - \beta - 90 + \angle - \angle - 90$

$+ 2\angle - \beta$

$= 2\angle - 2\beta$

$\cos\angle$

$tg\,2\angle = x$



$\sin\beta =$

$\cos\beta = \frac{12x}{13}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

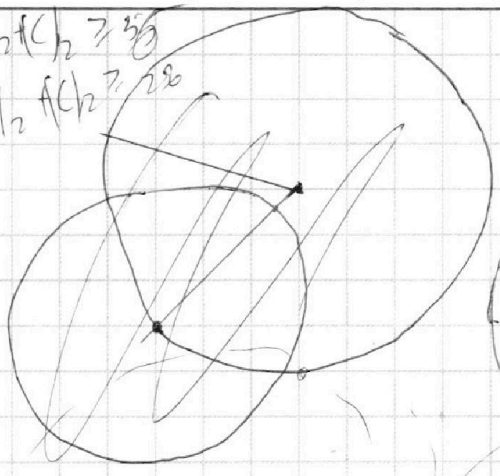
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

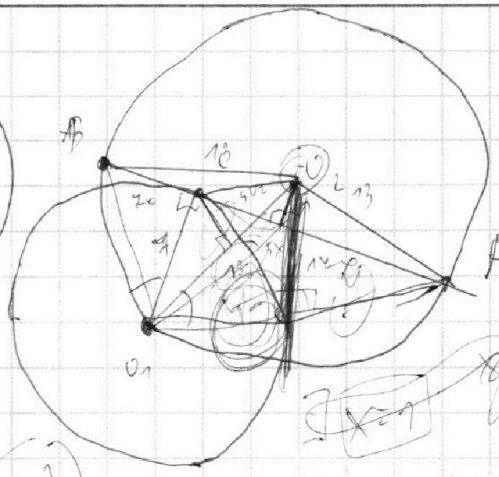
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$2(a)_2+(b)_2+(c)_2 \geq 36$

$(a)_2+(b)_2+(c)_2 \geq 28$





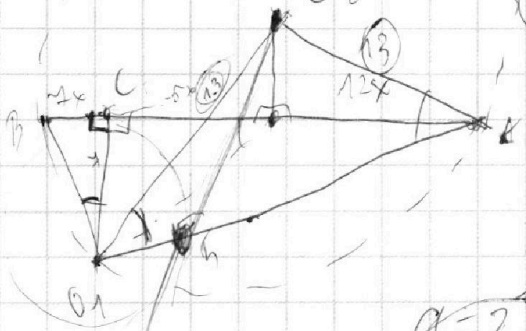
$9+7=\boxed{29}$

$24x \leq 26$

$x \Rightarrow x \leq \frac{26}{24}$

$\boxed{x=1}$

$AH=?$



$x = \frac{BC}{O_1C} = tg\angle BO_1C =$

$= tg\angle O_2O_1A$

15 55
29
23

$a=2^{16}$

$b=7^{11}$

$ab=2^{15}7^{11}$

$32=23+2b$

$11=2b$

$b=6\ 5$

$\Rightarrow a=9\ 10\ 22$

$b=11\ 13$

$ab: 2^{15}7^{11}$

$bc: 2^{17}7^{16} \Rightarrow c=2^{17}$

$a=2^{10}$

$c=7^{13}$

$b=2^{5}$

$a+b \geq 11$

$a+c \geq 16$

$b+c \geq 39$

$b \geq 39-c$

$a+39-c \geq 11$

$a-c \geq -28$

$a+c \geq 16$

$2c \geq 46$

$\boxed{c \geq 23}$

$\Rightarrow a=0$

$a=22$

$\cancel{29=29+2b}$

$29 = 39+2b$

11

$b=\cancel{29+2b}$