



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1.

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$

$bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$

$ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$

$\min abc = ?$

1) Заметим, что т.к. $ac: 7^{37}$, то и $abc: 7^{37}$

2) $ab \cdot ac \cdot bc = (abc)^2: 2^{14+17+20} \cdot 7^{51} = 2^{51} \cdot 7^{51}$

Отсюда $abc: 2^{26}$, если $abc \not\vdash 2^{26}$, то ст. вхождения 2-й в $a^2 b^2 c^2$ не больше 50.

Значит $abc: 2^{26} \cdot 7^{37} \Rightarrow abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$

Пример: $a = 2^9 \cdot 7^{10}$ $b = 2^5$ $c = 2^{12} \cdot 7^{27}$

Тогда $ab = 2^{14} \cdot 7^{10}: 2^{14} \cdot 7^{10}$

$bc = 2^{17} \cdot 7^{27}: 2^{17} \cdot 7^{17}$

$ac = 2^{21} \cdot 7^{37}: 2^{20} \cdot 7^{37}$

$abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$. Все сошлось.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2.

Ответ: 8

$(a; b) = \text{НОД}(a; b)$
быть, что $(a; b) = (a; b + a \cdot k)$ - трив. св-во НОД.

т.к. 8 - несократимая, то $(a; b) = 1$. Отсюда

$(a; a+b) = 1$ и $(b; a+b) = 1$, тогда $(ab; a+b) = 1$

Заметим, что если $\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$ сокр. на m , то

$$(a+b; a^2 - 6ab + b^2) \stackrel{m}{=} a^2 - 6ab + b^2 = (a-b)^2 - 4ab$$

$$(a+b; (a-b)^2 - 4ab) = (a+b; -(a+b)^2 + (a-b)^2 - 4ab) =$$

$$= (a+b, -a^2 - b^2 - 2ab + a^2 + b^2 - 2ab - 4ab) =$$

$$= (a+b, 8ab)$$

Выведем из этого, что $(a+b, ab) = 1$.

Поэтому $(a+b, 8ab) \leq 8$. То есть $m \leq 8$.

$$(a+b, 8)$$

Пример:

$$a=6 \quad b=2$$

$$\frac{6+2}{36 - 6 \cdot 6 \cdot 2 + 2^2} = \frac{8}{40 - 72} = -\frac{8}{32} \quad \text{сократили на 8.}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №4.

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

Данную разность левую часть на $\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}$

получим:

т.к. $0 \leq \sqrt{2x^2+2x+1} \leq \frac{1}{2}$

$$\frac{2x^2-5x+3 - 2x^2-2x-1}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} = 2-7x$$

$$\frac{-7x+2}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} = 2-7x$$

Пусть $x=3,5$ - не годит $\Rightarrow$ можно делить на $2-7x$

$$\frac{-1}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} = 1$$

$$-1 = \sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}$$

$\begin{matrix} \vee & \vee \\ 0 & 0 \end{matrix}$

(?)

Значит нет решения.

При делении на $2-7x$ область опред. изменилась на $\{3,5\}$,

но $3,5$ - не годит, т.к. можно подставить и не сойдется, а

при делении на $\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}$ область определения не изменялась, т.к.

$\begin{matrix} \vee \\ 0 \end{matrix}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

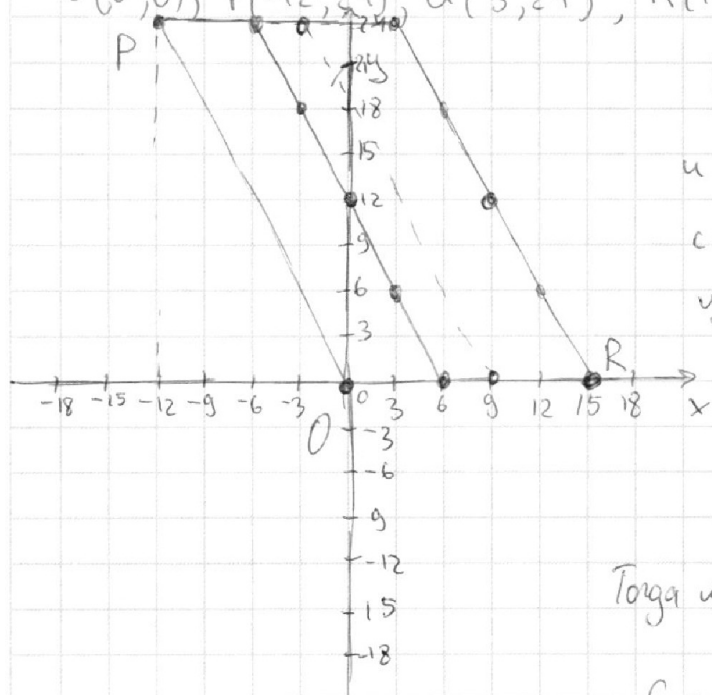
МФТИ



Задача №5.

Ответ: 1690 пар.

$O(0;0); P(-12;24); Q(3;24); R(15;0)$

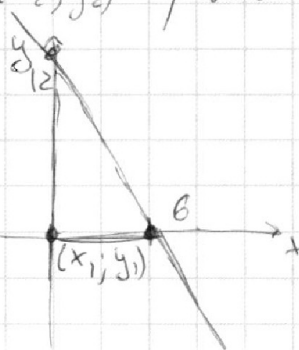


Пусть мы выбрали $(\cdot)(x_1; y_1)$
и хотим найти, какие $(x_2; y_2)$
с целыми коорд. удовлетворяют
условию $2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$

Зафикси. $x_1; y_1$, НУД: $x_1 = 0$
 $y_1 = 0$

$$2x_2 + y_2 = 12 \quad y_2 = 12 - 2x_2$$

Тогда ии-во $(\cdot)(x_2; y_2)$ - прямая:



Тогда заметим, что для любой целой
точки на PO такая прямая совпадает,
т.е. $\forall (\cdot)$ целой $\in PO$ кол-во целых,
удовлетворяющих условию одинаково.

Аналогично $\forall$ целых $(\cdot) \in (1;0); (-11;24)$ кол-во целых равно
и равно кол-ву для $\forall$ целых на PO, так как параллельный
перенос. Заметим, что для точек в параллелограмме
 $OPQR$, правее $(9;0); (-3;24)$ нет точек, удовлетворяющих условию
(очевидно из картинки). Итого $\forall$ целой в параллелогра-
ме $P,O,(9;0); (-3;24)$ количество подходящих в параллео-

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5 (продолжение).

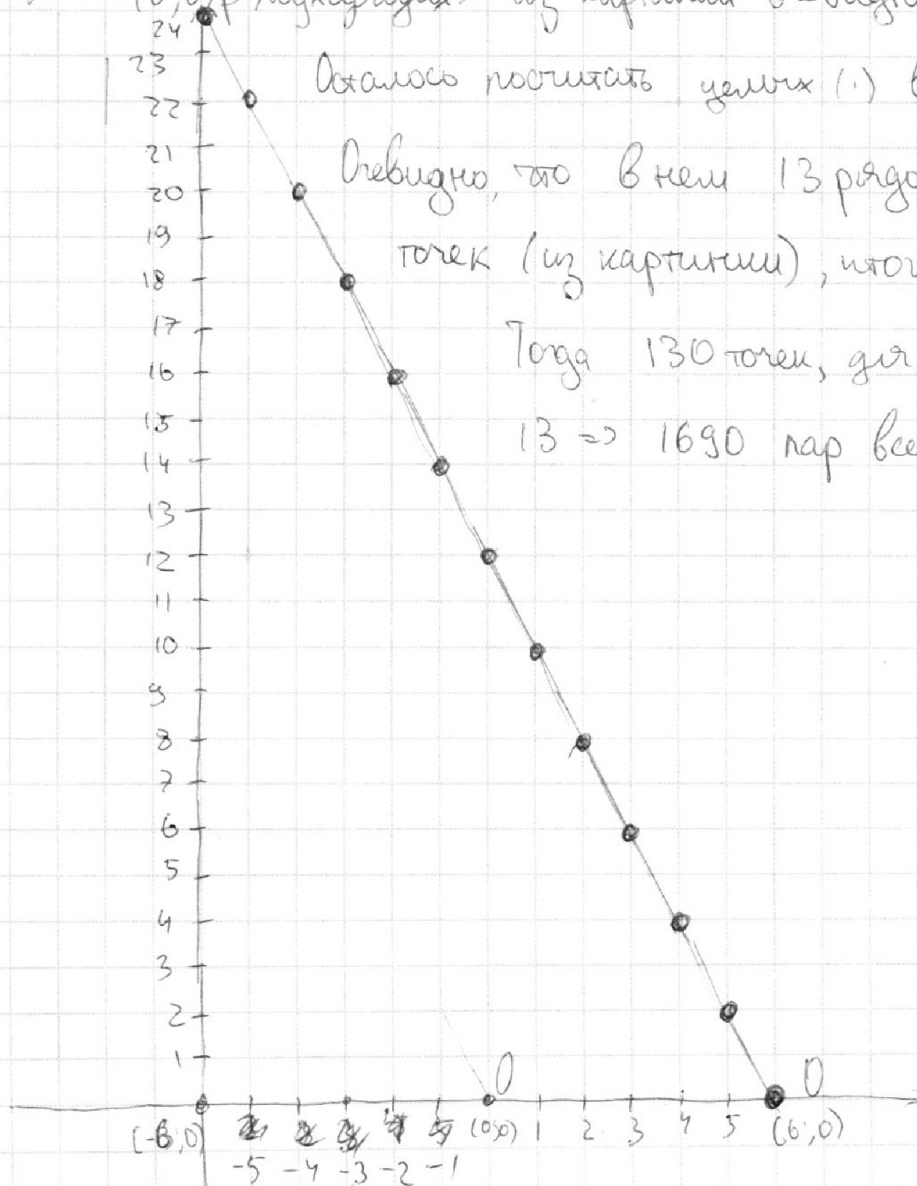
грани OPQR однонаково и подходящие есть только у
этих точек. $\Rightarrow$ достаточно посчитать кол-во подходящих
для (·) (0;0) и умножить это на кол-во целых (·) в
параллелограмме OP(9;0)(-3;24).

для (0;0) подходящих: Из картинки очевидно, что их 13.

Осталось посчитать целых (·) в OP(9;0)(-3;24),

Очевидно, что в нем 13 рядов по 10 целых
точек (из картинки), итого 130.

Тогда 130 точек, для каждой подходит
13 $\Rightarrow$ 1690 пар всего.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6.

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & (1) \end{cases}$$

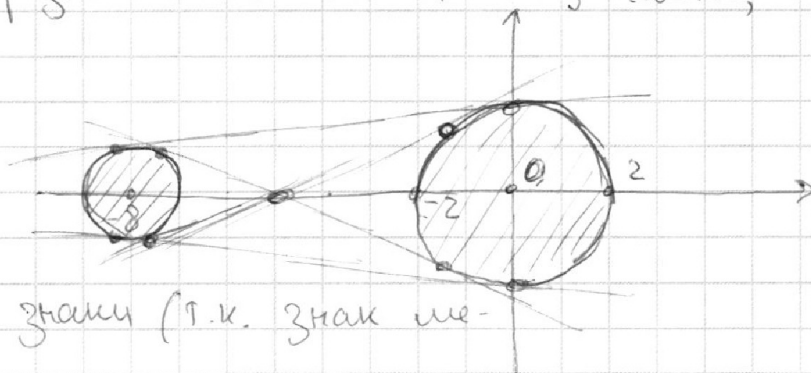
$$\begin{cases} ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

Посмотрим на (1) $(x; y)$ удовлет-
воряющие (2).

Заметим, что $x^2 + y^2 - 4 = 0$ - окр. радиуса 2 с центром в $(0; 0)$

$(x+8)^2 + y^2 - 1 = 0$ - окр. радиуса 1 с центром в $(-8; 0)$.

Окружности разбили м-во на 3 части, в каждой



одинаковые знаки (т.к. знак ме-

няется при переходе через окружность). Тогда заметим,

что выражение отриц. внутри окр. Тогда мн-во ~~не~~ (1) удовлет

(2) это 2 круга. Заметим, что (1) - прямая. Прямая имеет

2 общие точки с 2 кругами тогда и только тогда, когда

она - общая касательная. Осталось посчитать ~~2~~ общие
касательные.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

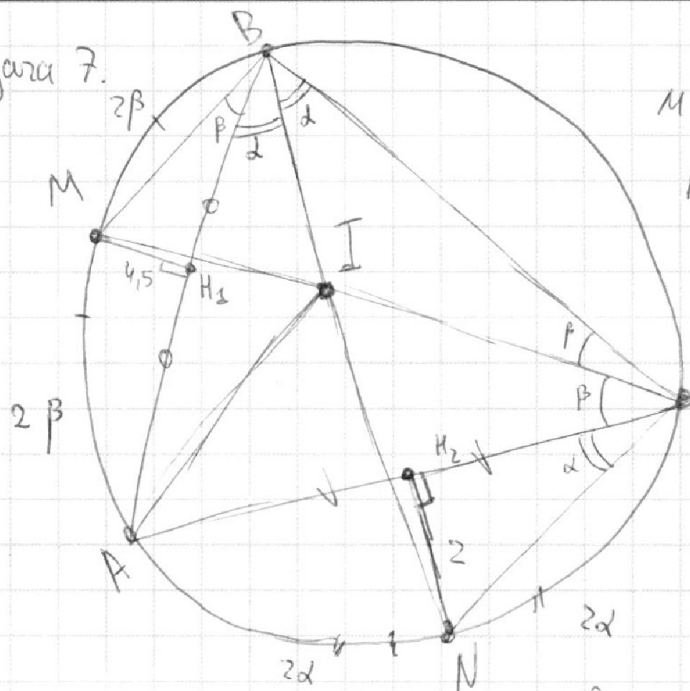
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 7.



$$MH_1 = 4,5$$

$$NH_2 = 2$$

Заметим, что B, I, N -
на одной прямой, т.к.

BN - биссектриса $\angle ABC$,
аналогично A, I, M - на
одной прямой.

$$BH_1 = \frac{MH_1}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{4,5}{\operatorname{tg} \beta}$$

$$\text{Значит } BA = 2 \cdot BH_1 = \frac{9}{\operatorname{tg} \beta}$$

$$AC = 2 \cdot CH_2 = 2 \cdot \frac{NH_2}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{4}{\operatorname{tg} \alpha}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(a, b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

$$a^2-6ab+b^2 = ((a-3b)^2 - 8b^2; a+b)$$

$$((a-b)^2 - 4ab; a+b) = m$$

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab; a+b = m$$

$$(a^2+b^2-2ab-a^2-b^2-2ab-4ab; a+b) = m$$

$$(-8ab; a+b) = m$$

$$7x^2 = 25 - y^2 \quad (8ab; a+b) = m$$

$$(a, b) = 1 \Rightarrow (a+b, a) = 1 \text{ и } (a+b, b) = 1$$

$$(a+b, ab) = 1 \Rightarrow (8ab; a+b) = m$$

$$\max = 8$$

$$(8; a+b) \leq 8$$

$$a+b$$

$$\frac{5+3}{25-6 \cdot 5+9} = \frac{34-80}{}$$

$$\frac{6+2}{36-6 \cdot 6+4} =$$

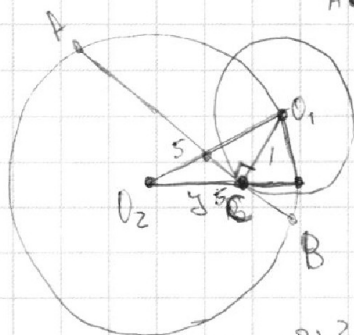
$$-36+4 = -32$$

$$R_{\omega} = 1$$

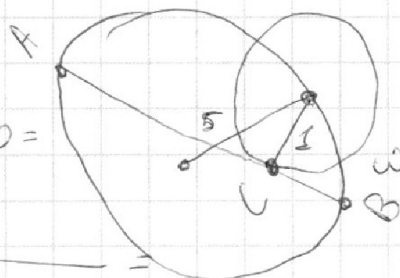
$$R_{\Omega} = 5$$

$$(d-r)(d+r) = d^2 - r^2$$

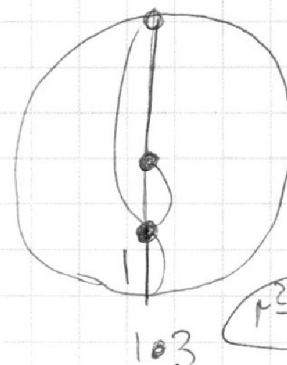
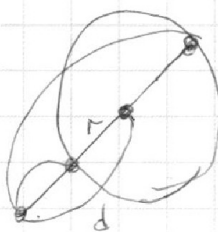
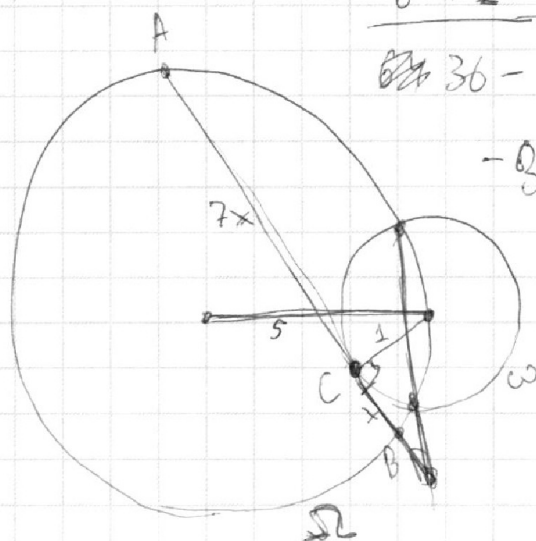
$$r^2 = d^2$$



$$AC:BC=7$$



$$AC:BC=7$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^{14} 7^{10}$$

$$bc: 2^{12} 7^{17}$$

$$ac: 2^{20} 7^{37}$$

$abc \min$

$\frac{a}{b}$ - несократимо.

$$(a; b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

$$a^2 b^2 c^2: 2^{53} 7^{64}$$

$$2^{36+17} = 2^{53}$$

$$\max m: a+b: m$$

$$a^2-6ab+b^2: m$$

$$abc: 2^{26} 7^{32}$$

54

$$51 \cdot (26)$$

$$54:2=27$$

$$a^2-6ab+b^2=(a-b)^2-4ab$$

$$a_2+b_2 \geq 16$$

$$b_2+c_2 \geq 17$$

$$\Rightarrow c_2-a_2=1 \Rightarrow c_2=a_2+1$$

$$(a-b; a)=1$$

$$(a-b; b)=1$$

$$a_2+b_2 \geq 14$$

$$(a-b; ab)=1$$

$$a_2+c_2 \geq 20 \Rightarrow 2a_2+1=20$$

$$a_7+b_7=10$$

$$a_2=10$$

$$b_2=7$$

$$c_2=10$$

$$a_7+c_7=37$$

$$b_7+c_7=17$$

$$c_7-a_7=7 \Rightarrow c_7=a_7+7$$

$$2a_7+7=37$$

$$a_7=15$$

$$c_7=22$$

$$a+c=37$$

$$a \geq 10$$

$$b \geq 17$$

$$14+12$$

$$c_2=a_2+3$$

$$2a_2+3=20$$

$$a_2=9$$

$$b_2=5$$

$$c_2=12$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$O(0;0)$ $P(-12;24)$ $Q(3;24)$ $R(15;0)$ (28)

$A(x_1; y_1) \sim B(x_2; y_2) \quad x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

Пусть $x_1 = 0; 0$

$$2x_2 + y_2 = 12$$

$$2x_2 + y_2 - 12 = 0$$

$$y_2 = 12 - 2x_2$$

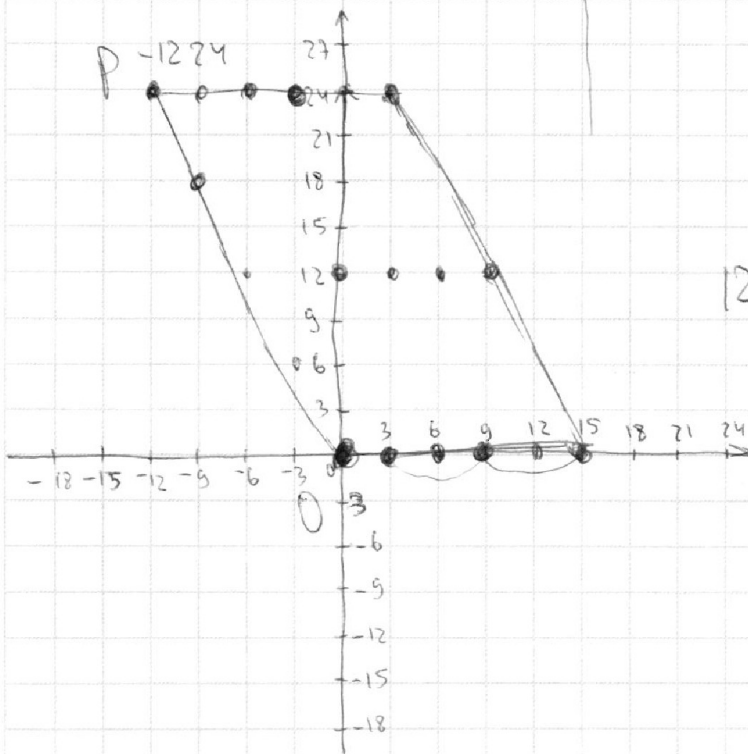
$-4; 6$

6

12

12

6





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

$$(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1) = 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 10x^3 - 10x^2 - 5x + 6x^2 +$$

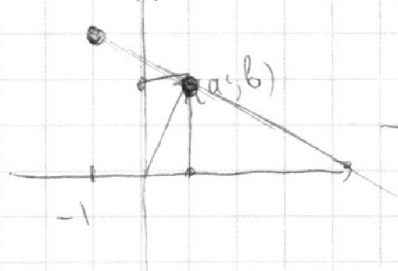
$$+ 6x + 3 = 4x^4 - 8x^3 - 2x^2 + x + 3$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} + 7x = 2 + \sqrt{2x^2+2x+1}$$

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$$(x+8)^2 + y^2 = 1$$

$$ax + by + c$$



$$\begin{array}{r} 3,5 \\ 3,5 \\ \hline 7 \\ 10,5 \\ \hline 17,5 \end{array}$$

$$12,25$$

$$24,5 - 5 \cdot 3,5 + 3 =$$

$$= 2 + 3 = 10$$

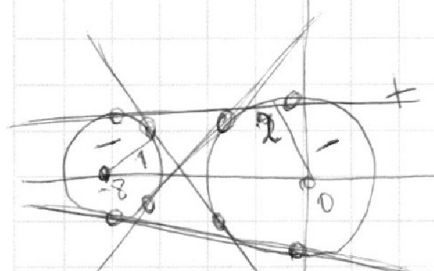
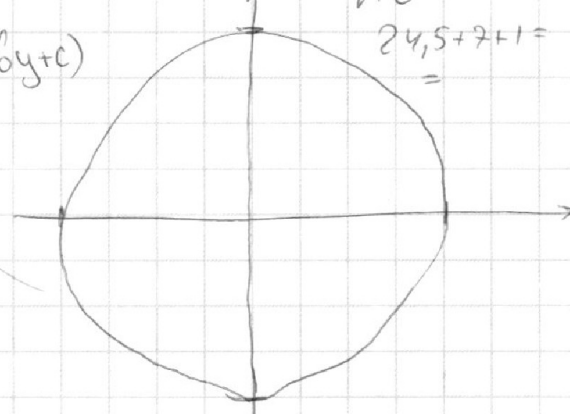
$$17,5$$

$$1 + 2 \cdot 2 - 1$$

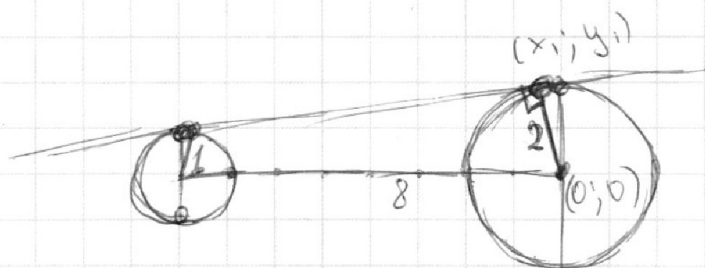
$$\sqrt{10}$$

$$24,5 + 7 + 1 =$$

$$x + 2y + 1 = 0$$



$$x_1^2 + y_1^2 = 4$$



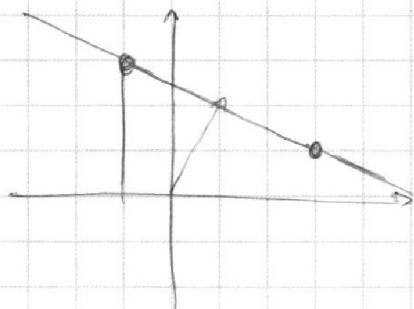
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



(1; 2)

13

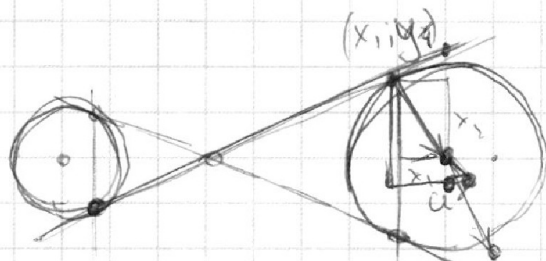
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-3}{-2}$$

$$x+1 = -2y+6$$

$$x+2y-5=0$$

$ax-y+10b=0$ - общая
касательная.



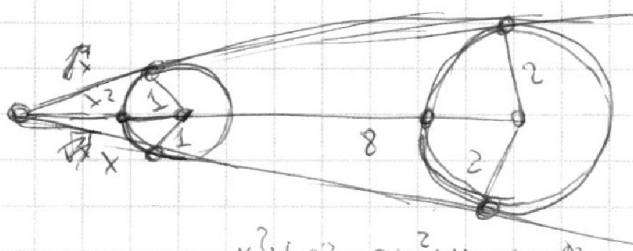
$$(-x_1; -x_2)$$

$$-x_1x - y_1y + c = 0$$

$$-x_1x - y_1y + c = 0$$

$$x_1x + y_1y + c = 0$$

$$\begin{cases} x_1x + y_1y + c = 0 \\ x_1^2 + y_1^2 = 2 \end{cases}$$



$$x^2+6+2 \quad 2x^2+12 = (x+3)^2$$

(-1)

$$x_1x + y_1y + c = (x+3)^2 + y^2 - 1 \quad (a, -1) - \text{нормаль}$$

$$ax - y + 10b = x^2 + y^2 - 4$$

$$ax - y + 10b = (x+3)^2 + y^2 - 1 = x^2 + 6x + 6 + y^2 - 1$$

$$ax - x^2 + 10b + 4 = y^2 + y$$

$$ax - x^2 + (a-16)x - x^2 + 10b - 63 = y^2 + y$$

$$(a-16)x - x^2 + 10b - 63 = ax - x^2 + 10b + 4$$

$$-16x = 69$$

$$x = -\frac{69}{16}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

$$\begin{aligned} & \frac{2x^2-5x+3 - (2x^2+2x+1)}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} = 2-7x \\ & \frac{-7x+2}{\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1}} = 2-7x \end{aligned}$$

$$D = 4 - 12 \leq 0$$

$$-\frac{2}{4} \quad -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + 1 + 1 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{5 \pm 1}{4} = 1$$

$$2x^2+1$$

$$18 \quad x \in (1; 1,5)$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} + 7x = 2 + \sqrt{2x^2+2x+1}$$

$$2x^2-5x+3+49x^2+2 \cdot 7x \cdot \sqrt{2x^2-5x+3} = 4 + 2x^2+2x+1 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2x^2+2x+1}$$

$$51x^2-5x+3+14x\sqrt{2x^2-5x+3} = 2x^2+2x+5+4\sqrt{2x^2+2x+1}$$



$$2x^2+2x+1 = \sqrt{(x+1)^2+x^2}$$

$$2x^2-5x+3 = (x-a)^2 + (x-b)^2$$

$$\sqrt{3}$$

$$2$$

$$2$$

$$8+4+1$$

$$2-2+1$$

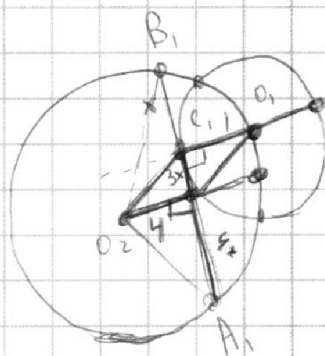
$$2(a+b)=5$$

$$a^2+b^2=3$$

$$1$$

$$2-5+3$$

$$2+2+1$$



$$-1 \quad 2x^2$$

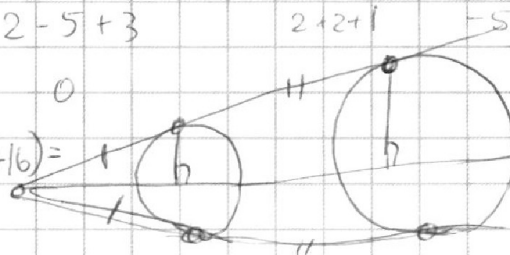
$$7x^2 = 5^2 - (9x^2+16) =$$

$$2-2+1$$

$$2+5+3 = 10$$

$$7x^2 = 25 - 16 - 9x^2$$

$$16x^2 = 9$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
□

1

2
□

2

3
□

3

4
☐

4

5

☐

5

6
□

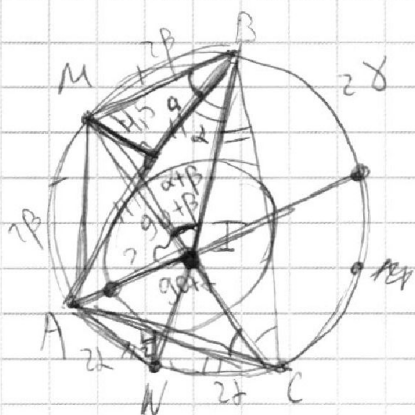
f

7

5



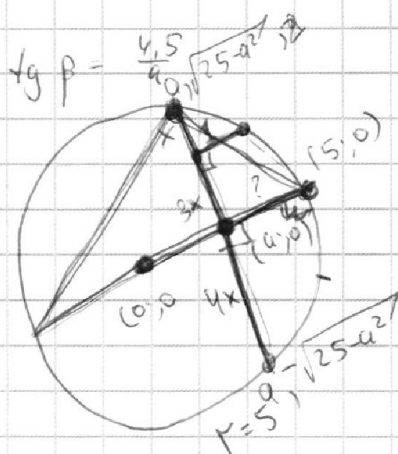
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a = \frac{4,5}{\operatorname{tg} \beta}$$

$$AB = \frac{g}{\tan \beta}$$

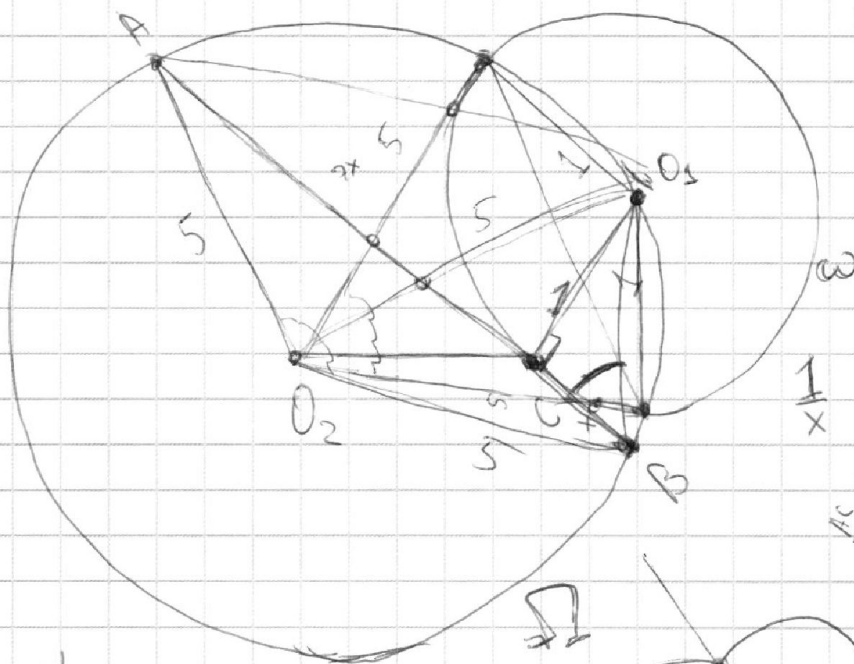
$$AC = \frac{4}{\tan \alpha}$$



$$AB = ? \quad x^2 + y^2 = 25$$

$$5^2 \quad a^2 + y^2 = 25$$

$$y = \pm \sqrt{25 - a^2}$$



$$\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{7x}$$

$$A_C = 2$$

