



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим за $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ - степени входящие
в числа a, b, c соответственно. За
 $\alpha_7, \beta_7, \gamma_7$ - степени входящие в
 a, b, c соответственно. Тогда т.к.
 $ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$ $bc : 2^{17} \cdot 7^{18}$ $ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$ и $a, b, c \neq 0$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 \geq 15 \\ \beta_2 + \gamma_2 \geq 17 \\ \alpha_2 + \gamma_2 \geq 23 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq \frac{55}{2} \text{ т.к. } \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \geq 0 \text{ и } \in \mathbb{Z}, \text{ то } \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 28$$

$$\begin{cases} \alpha_7 + \beta_7 \geq 11 \\ \beta_7 + \gamma_7 \geq 18 \\ \alpha_7 + \gamma_7 \geq 39 \end{cases} \Rightarrow \alpha_7 + \beta_7 + \gamma_7 \geq 34 \text{ т.к. } \alpha_7, \beta_7, \gamma_7 \in \mathbb{Z} \text{ и } \geq 0, \text{ то } \alpha_7 + \beta_7 + \gamma_7 \geq 39$$

$$\alpha_7 + \beta_7 + \gamma_7 \geq 39$$

Тогда $abc : 2^{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2} \cdot 7^{\alpha_7 + \beta_7 + \gamma_7}$

т.к. $\alpha_7 + \beta_7 + \gamma_7 \geq 39$ и $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 28 \Rightarrow$

$$abc : 2^{28} \cdot 7^{39}$$

и 2 и 7 взаимно просты

Тогда т.к. $a, b, c \neq 0$ ($a, b, c \in \mathbb{N}$)

$$abc \geq 2^{28} \cdot 7^{39}$$

Покажем, что $\exists a, b, c$ такие что $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$
а выполним условие:

$b = 2^5$ $a = 2^{10} \cdot 7^{11}$ $c = 2^{13} \cdot 7^{28}$ Легко видеть, что
условие выполнено и $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$ Ответ: $2^{28} \cdot 7^{39}$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Обозначим НОД чисел x и y за $a(x; y)$.

Тогда т.к. $\frac{a}{b}$ несократима и $\begin{cases} a \in \mathbb{N} \\ b \in \mathbb{N} \end{cases}$, то

$$(a; b) = 1 \quad (\text{взаимнопростота}).$$

Перепишем $\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$

Ясно, что наибольшее число на которое ~~мы~~ можно сократить дробь это $(a+b; (a+b)^2-9ab)$

$= m$. Тогда $\begin{cases} a+b \equiv m \\ (a+b)^2-9ab \equiv m \end{cases} \Rightarrow$

$$9ab \equiv m \text{ т.к. } a+b \equiv m \Rightarrow (a+b)^2 \equiv m.$$

Но $a+b$ взаимнопросто с a и b т.к. $(a; b) = 1$. Т.е. $(a+b; ab) = 1$, но

$$9ab \equiv m \Rightarrow 9 \equiv m. \text{ Тогда } 9 \geq m.$$

Приведём пример когда можно сократить на 9 (т.е. достигается $\ominus$):

$a=5$ Тогда $(a; b)=1$ - выполнено
 $b=4$ условие

несократимости $\frac{a}{b}$ и

$$\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} = \frac{9}{81-9 \cdot 20} = \frac{1}{9-20} = -\frac{1}{13} \quad \text{не сокращается}$$

Итак, 9 -то достигается $\Rightarrow$
наибольшее $m=9$.

Ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Обозначим центр ω за O .

Тогда т.к. AB касается ω

$B(-)C$, то $OC \perp AB$. и

OC - радиус $\omega \Rightarrow OC = 7$. А

Обозначим $\angle OBC = \alpha$.

Тогда $BC = 7 \cdot \operatorname{ctg} \alpha$ т.к. $\triangle OCB$ - прямоугольный

$\Rightarrow$ т.к. $\frac{AC}{BC} = \frac{17}{7}$, то $AC = 17 \operatorname{ctg} \alpha$

Поэтому $\triangle AOB$ вписан в Ω , то

$R_{\Omega} = OB = \frac{AO}{2 \sin \alpha} \Rightarrow$

$AO = 26 \sin \alpha$. Тогда т.к. $\triangle ACO$ - прямоугольный

, то по Тх Пифаг $AO^2 = AC^2 + OC^2$. Т.е.

$$26^2 \sin^2 \alpha = 49 + 289 \operatorname{ctg}^2 \alpha$$

Обозначив $t = \sin^2 \alpha$, $t \in [0, 1]$ получим

$$26^2 t = 49 + 289(1 - t)$$

$$26^2 t^2 + 240t - 289 = 0$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 1560 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$26^2 t^2 + 240t - 289 = 0$$

Используя формулу Виета, получим $a + b =$

Решая квадратное уравнение находим $t = \sin^2 \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{7}{13}$ ($t \geq 0$). Возвратим $\operatorname{ctg} \alpha$ и подставим в $AB = 24 \operatorname{ctg} \alpha$. получаем ответ.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$\begin{cases} a = 3x^2 - 6x + 2 \\ b = 3x^2 + 3x + 1 \end{cases} \text{ и } 0 \leq a, b$$

$$b = 3x^2 + 3x + 1 \text{ и } 0 \leq a, b \geq 0$$

Тогда можно переписать так:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(1 - \sqrt{a} - \sqrt{b}) = 0$$

$$\begin{cases} a \geq 0, b \geq 0 & (1) \\ a = b & (2) \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ a = b \end{cases} \Rightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$9x = 1 \quad x = \frac{1}{9}$$

Видно, что подставив $x = \frac{1}{9}$ в $3x^2 - 6x + 2$ и $3x^2 + 3x + 1$ видим, что они ≥ 0 при $x = \frac{1}{9}$ т.е. удовлетворяют ОДЗ. Т.е. $x = \frac{1}{9}$ — единственный корень (1).

(2) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$. Рассмотрим графики a и b :

Видим, что на всей ОДЗ (тогда $a \geq 0, b \geq 0$)

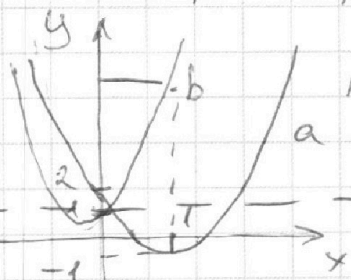
одни из a или b

$\Rightarrow 1$ т.е. $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 1$

$\Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 1$ т.е.

(2) не имеет реш.

Ответ: $\left\{ \frac{1}{9} \right\}$



* график b выполнен
приближённо,
а пересекет $y = 2$
в пересекет $y = 2$
(0; 1)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда число пар $(a_i; b_i)$ будет
равно количеству способов представить
 $a_i = 2x_2 + y_2$ ~~или~~ $y_2 \in \mathbb{Z}, y_2 \geq 0$

и $b_i = 2x_1 + y_1$ $x_1 \in \mathbb{Z}$ $x_2 \in \mathbb{Z}, x_2 \geq -13$
 $y_1 \in \mathbb{Z}, y_1 \geq 0$

~~А именно представить~~

a_i и b_i можно представить числом
способов суммы целых ($\cdot$) летит
на прямой $-2x = y$ при $0 \leq y \leq 26$

(для каждого следующего i они получают
автоматически 1 и их число не уменьшается)

Их ~~14~~. Тогда ~~бывает~~ число
пар $(a_i; b_i)$ будет равно $\frac{14 \cdot 14}{2} = 98$

Тогда общее число пар будет равно
 $98 \cdot 21 = 2058$. Ответ: 2058.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Запишем ур-е
прямой PO по $(\cdot) P$ и O
и прямой QR по $(\cdot) Q$ и R .

Получим:

$$PO: -2x = y$$

$$QR: -2x + 34 = y$$

$$PQ: y = 26$$

$$OR: y = 0$$

Если $(\cdot) (x_0; y_0)$ лежит внутри $POQR$,
то её координаты удовлетворяют:

$$\begin{cases} y_0 \geq -2x_0 \\ y_0 \leq -2x_0 + 34 \\ y_0 \leq 26 \\ y_0 \geq 0 \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} 2x_0 + y_0 \geq 0 \\ 2x_0 + y_0 \leq 34 \\ y_0 \leq 26 \\ y_0 \geq 0 \end{cases}$$

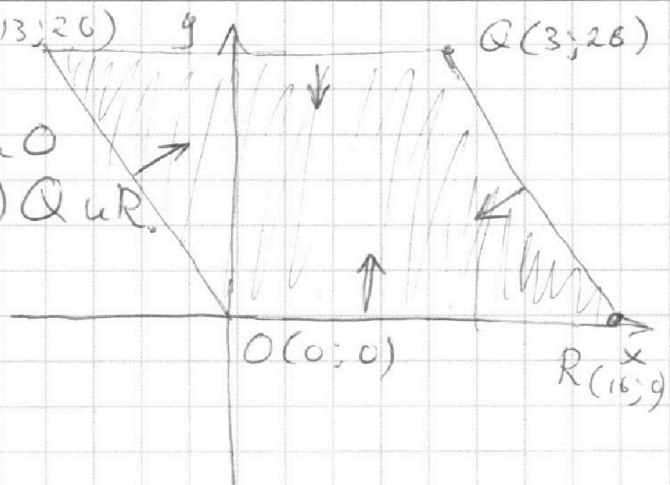
Тогда если A и B - целочисленная пара $(\cdot)$, то

$$\begin{cases} 2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 14 \\ 34 \geq 2x_2 + y_2 \geq 0 \\ 34 \geq 2x_1 + y_1 \geq 0 \end{cases}$$

$a = 2x_1 + y_1$, $b = 2x_2 + y_2$ Тогда

нам подойдут пары для которых $(a; b)$:

$(0; 14), (4; 15) \dots (20; 34)$ и $\times 21$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$$

~~Рассмотрим~~ Рассмотрим окружности

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ и } x^2 + (y - 12)^2 = 16$$

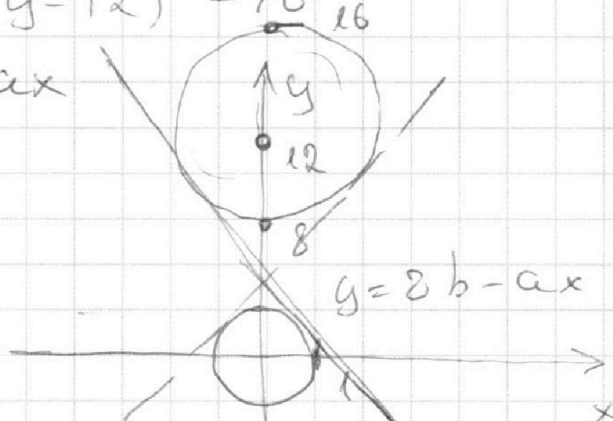
и прямую $y = 8b - ax$

Система будет иметь
ровно 2 решения для
каждого b если
прямая $y = 8b - ax$

будет касательной к каждой из окружностей.

~~Будет~~

И т.к. прямая $y = 8b - ax$ ~~не~~ отнимается
только допустимы случаи она //
касательным на рисунке.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Центр внешней окружности Ω
 CO — точка пересечения
 биссектрис. Тогда
 BI и CI и AI —
 биссектрисы $\triangle ABC$.
 Т.к. $(-)$ N и M —
 середины дуг
 дуги против
 вершин B и C , то
 они также лежат на
 соответствующих биссектрисах. Т.к. Тогда
 ABN и ACN вписаны в Ω и AN — биссектриса по
 лемме о Трискубе $AN = IN = NC$ и $BM = MI =$
 MA . Обозначим $\beta = \frac{1}{2} \angle ABC$ и $\alpha = \frac{1}{2} \angle BCA$
 Тогда т.к. $ABCN$ вписаны в Ω , то
 $\angle ACN = \beta = \angle CAN$ (ради $\triangle ANC$). Аналогично
 $\angle AMB = \alpha = \angle MAB$.
 $CN = \frac{5}{\sin \beta}$ (т.к. $\triangle CHN$ — прямоугольный) $\Rightarrow$
 $AN = NI = NC = \frac{5}{\sin \beta}$. Аналогично
 $BM = MI = MA = \frac{2.5}{\sin \alpha}$. Тогда, если
 $x = AI$, то из прямоугольного $\triangle ANI$
 $x = 2 \sin \alpha \cdot \frac{5}{\sin \beta}$. А из $\triangle AMI$ $x = 2 \sin \beta \cdot \frac{2.5}{\sin \alpha}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда $10 \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = 5 \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \Rightarrow \sin^2 \gamma = \frac{1}{2} \sin^2 \beta$
 $\Rightarrow \sin \gamma = \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}}$ ~~не подходит~~

~~Решение~~ Тогда $AN = \frac{5}{\sin \beta \cos \gamma} = \frac{5}{\sin \beta \cdot \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sin^2 \beta}$

~~$AM = \frac{5}{\sin \gamma} \Rightarrow AN = \frac{AM}{\sqrt{2}}$~~

Тогда $x = 10 \frac{\sin \gamma}{\sqrt{2} \sin \gamma} = \frac{10}{\sqrt{2}} \Rightarrow AE = \frac{10}{\sqrt{2}}$

Ответ: $\frac{10}{\sqrt{2}}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

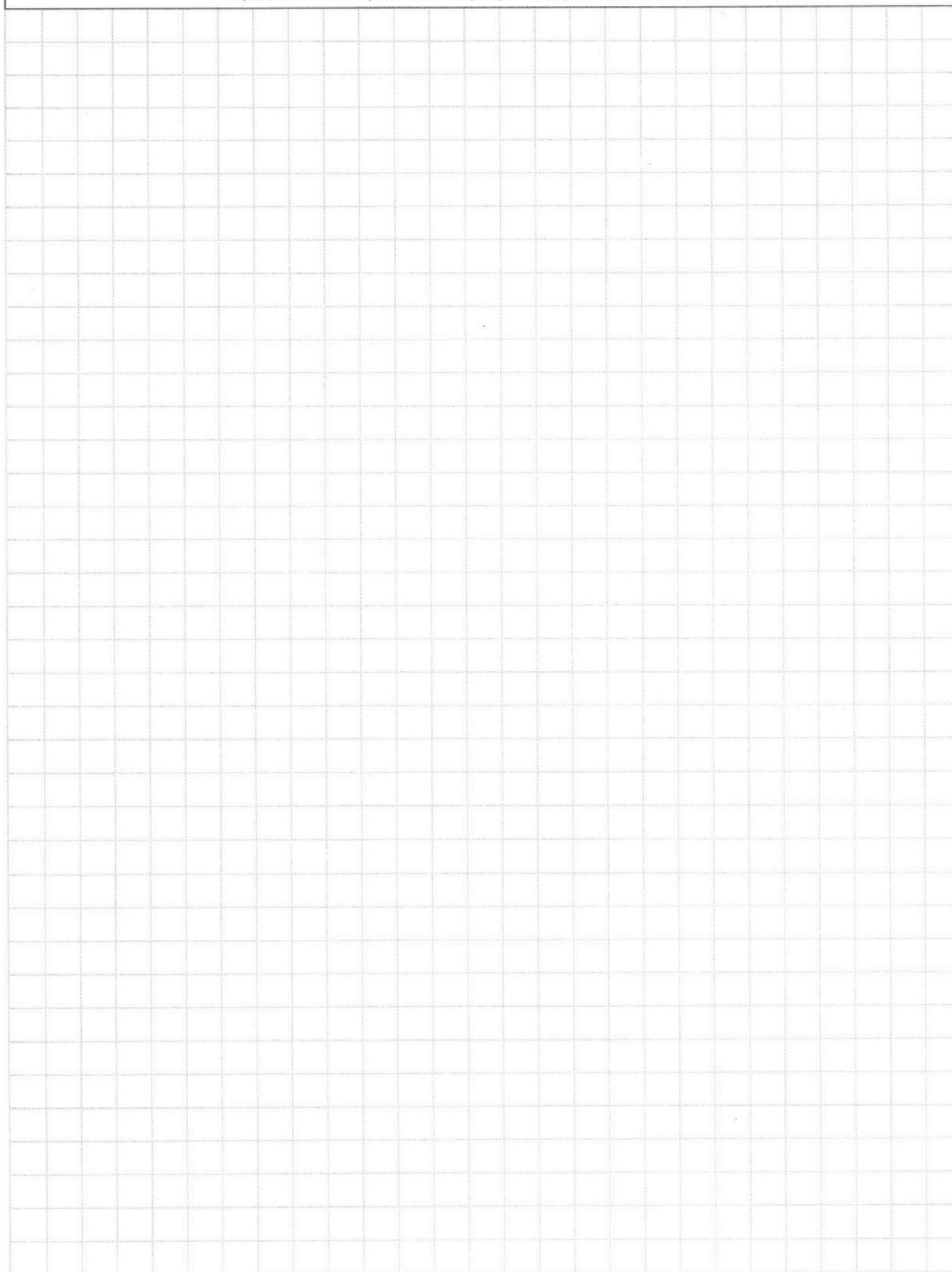
5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



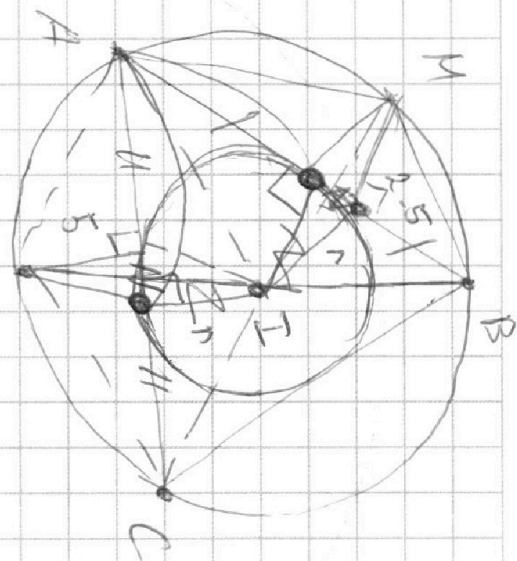
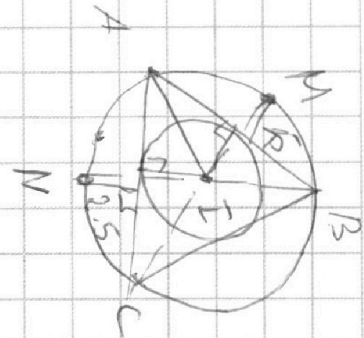
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} x \\ \hline 676 \\ 289 \\ \hline 2.5 \cos \varphi \\ \hline 2.5 \\ \hline \sin \varphi \end{array} \quad x = \sqrt{\left(\frac{2.5}{\sin \varphi}\right)^2 - 2 \cos \varphi \left(\frac{2.5}{\sin \varphi}\right)}$$

$$ax + y = 8$$

два корня y для каждого x равно

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-1)^2 - 16) \leq 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ x^2 + (y-1)^2 - 16 \leq 0 \end{cases}$$

$$y \leq 1 \rightarrow x^2 + (y-1)^2 - 16 > 0 \text{ для всех } x$$

$$|y| \leq 4 \rightarrow$$

$$\sqrt{4} \leq y \leq 8$$

$$y = 8 - ax$$

$$[-\infty; 1] \cup [4; 8]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x \quad x_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$4 \mid 3(x^2 - 2x + 1) - 1 = 3(x-1)^2 - 1$$

$$3(x^2 - 2x + 1)$$

$$D = 36 - 24 = 12$$

$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{12}}{6} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$a = 3x^2 - 6x + 2 \neq 0$$

$$b = 3x^2 + 3x + 1 \neq 0 \quad \frac{1}{2} x_0 = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b \quad y_0 = -\frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 1$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = 1 - \frac{3}{4}$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1) = 0$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \quad \text{или} \quad a + b + 2\sqrt{ab} = 1$$

$$6x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{(3x^2 - 6x + 2)(3x^2 + 3x + 1)}$$

$$6x^2 - 3x + 3 + 2\sqrt{9x^4 - 18x^3}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$9x = 1$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$D = 240^2 + 289 \cdot 26^2 \cdot 4$$

$$D = 120^2 + 289 \cdot 26^2 = 120^2 + 289 \cdot 676$$

$$+ 195364$$

$$14400$$

$$209764$$

$$26^2 =$$

$$\frac{120}{13} = -\frac{289}{26}$$

$$2058$$

$$\begin{array}{r} 98 \\ \times 21 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24061 \\ \times 289 \\ \hline 2058 \\ 676 \\ 195364 \end{array}$$

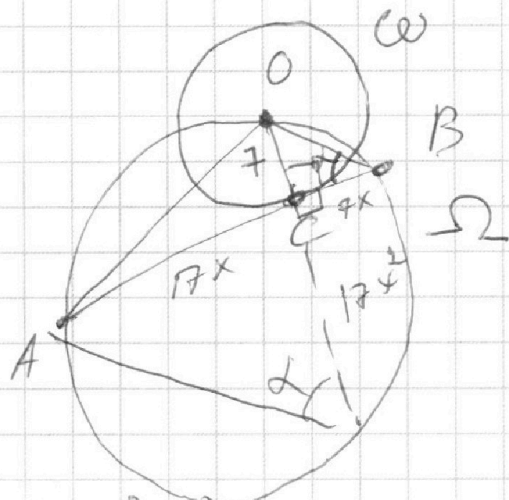
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{7x} = \frac{1}{x}$$

$$x = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$AO = 2R \sin \alpha = 26 \sin \alpha$$

$$OB = 7 / \sin \alpha$$

$$26^2 \sin^2 \alpha = 49 + 17^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha$$

$$26^2 \sin^2 \alpha = 49 + 289 \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$x = \sin^2 \alpha$$

$$26^2 + 2 - 289 \left(\frac{1-t}{t^2} \right) - 49 = 0$$

$$26^2 t^4 - 289(1-t^2) - 49 + 2 = 0$$

$$26^2 t^4 - 289 + 289 t^2 - 49 t^2 = 0$$

$$26^2 t^4 + 240 t^2 - 289 = 0$$

$$k = t^2$$

$$26^2 k^2 + 240 k - 289 = 0$$

$$0 = 16k + d$$

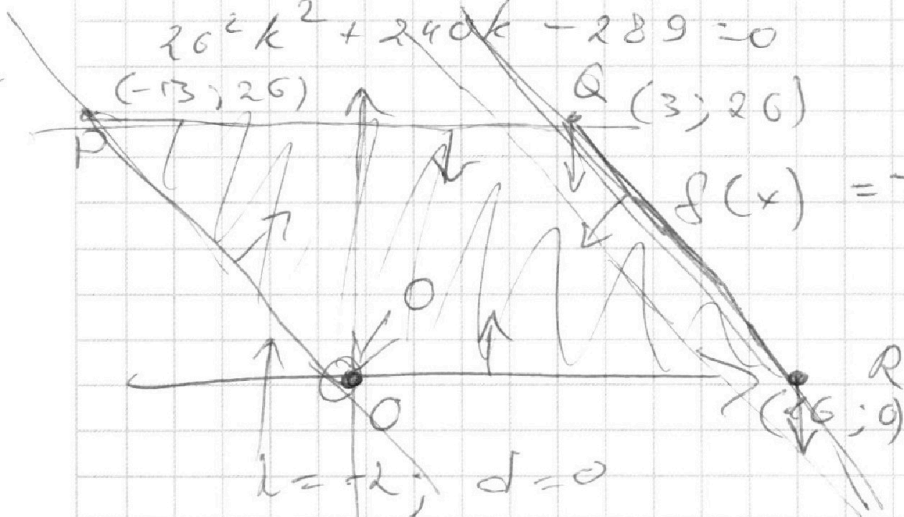
$$26 = 3k + d$$

$$d = -16k$$

$$26 = -13k$$

$$k = -2$$

$$d = 34$$



$$g(x) = -2x$$

$$y_0 \leq -2x_0 + 34$$

$$y_0 \geq -2x_0$$

$$y_0 \leq 3 \quad y_0 \geq 0$$

$$\begin{cases} y_0 \leq f(x_0) \\ y_0 \geq g(x_0) \end{cases}$$

$$y_0 \leq 26$$

$$y_0 \geq 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}, bc : 2^{17} \cdot 7^{18}, ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$$

12 входит в a в степени α_2
 в b в степени β_2

7 - α_7, β_7, f_7

$$\alpha_2 + \beta_2 \geq 15$$

$$\alpha_7 + \beta_7 \geq 11$$

$$\beta_2 + f_2 \geq 17$$

$$\beta_2 + \alpha_2 \geq 23$$

$$\alpha_7 + f_7 \geq 18$$

$$\alpha_7 + f_7 \geq 39$$

$$\text{Тогда } \alpha_2 + \beta_2 + f_2 \geq \frac{55}{2}$$

$$\text{т.к. } \alpha_2, \beta_2, f_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha_2, \beta_2, f_2 \geq 0$$

$$\text{то } \alpha_2 + \beta_2 + f_2 \geq 28$$

Аналогично

$$\alpha_7 + \beta_7 + f_7 \geq \frac{68}{2} = 34$$

Тогда $abc \geq 2^{28} \cdot 7^{34}$

Пример

$$\text{Дан } \alpha_2 + \beta_2 + f_2 = 28$$

$$\alpha_2 + \beta_2 = 15$$

$$f_2 = 13$$

$$\alpha_2 + f_2 = 23$$

$$\beta_2 = 5$$

$$\alpha_2 = 10$$

$$\alpha_7 + \beta_7 + f_7 = 34$$

$$\alpha_7 + \beta_7 = 11$$

$$f_7 = 23$$

$$13 + f_7$$

$$\alpha_7 + 13 + f_7 \geq 39$$

$$\alpha_7 = 11$$

$$f_7 = 28$$

$$\beta_7 = 0$$

$$b = 2^5$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^{11}$$

$$c = 2^{23} \cdot 7^{28}$$

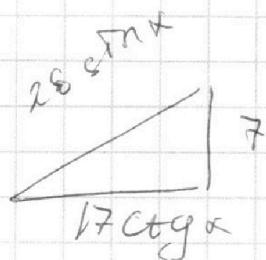
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AB = \frac{AD}{\sin x} \quad AD = 26 \sin x$$

$$26^2 \sin^2 x = 49 + 289 \operatorname{ctg}^2 x$$

$$26^2 \sin^2 x = 49 + 289 \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$26^2 \sin^2 x = 49 + 289 \cdot \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x}$$

$$26^2 \sin^4 x = 49 \sin^2 x + 289(1 - \sin^2 x)$$

$$2x = \sin^2 x \geq 0$$

$$7x = \frac{7 \operatorname{ctg} x}{1} \quad x = \operatorname{ctg} x$$

$$26^2 x^2 - 49x - 289 + 289x = 0$$

$$26^2 x^2 + 240x - 289 = 0$$

$$120^2 + 26^2 \cdot 29$$

~~Решение~~

$$\begin{array}{r} 240 \\ \times 240 \\ \hline 000 \\ 960 \\ 480 \\ \hline 57600 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 156 \\ \hline 676 \\ \times 29 \\ \hline 6084 \\ 1352 \\ \hline 19604 \end{array}$$

$$\frac{2}{4} =$$

$$\begin{array}{r} 120 \\ \times 120 \\ \hline 000 \\ 240 \\ 120 \\ \hline 14400 \\ + 19604 \\ \hline 34004 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 91 \\ \times 91 \\ \hline 91 \\ 819 \\ \hline 8281 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34004 \overline{) 2} \\ \underline{2} \\ 14 \\ \underline{14} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 17002 \overline{) 2} \\ \underline{2} \\ 18501 \end{array}$$

$$80 - 80 = 6400$$

$$90 - 90 = 8100$$

$$97 \cdot 97$$

$$\begin{array}{r} 97 \\ \times 97 \\ \hline 679 \\ 873 \\ \hline 9409 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$26x^2 - 240x - 289 = 0$$

$$17x = 7 \cdot \text{сгуд} \frac{240}{20} \frac{289}{26} \quad (1)$$

$$x = \text{сгуд} \quad a + b = \frac{240}{26}$$

$$ab = \frac{289}{26}$$

$$26a + 26b = 240$$

$$26ab = 289$$

$$a = \frac{240 - 26b}{26}$$

$$(240 - 26b)b = 289$$

$$26b^2 - 240b + 289 = 0$$

$$13b^2 - 120b + 120 = 0$$

$$D = 14400 - 6240 = 8160$$

$$D = 5 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 2 - 55$$

$$\sqrt{D} = 8 \cdot 5 \sqrt{11} = 40\sqrt{11}$$

$$b = \frac{120 \pm 40\sqrt{11}}{2 - 26} =$$

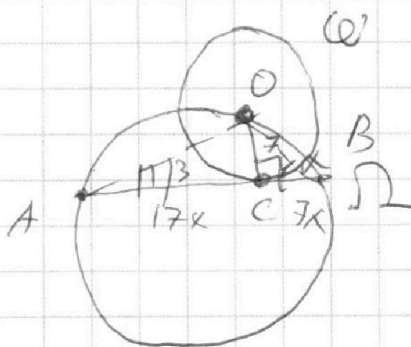
$$= \frac{30 + 10\sqrt{11}}{13} =$$

$$= \frac{10}{13} (3 + \sqrt{11})$$

$$a = \frac{240 - 26(3 + \sqrt{11})}{26}$$

$$= \frac{120 - 10(3 + \sqrt{11})}{13} = \frac{10}{13} (12 - 3 - \sqrt{11}) =$$

$$= \frac{10}{13} (9 - \sqrt{11})$$



$$S_{ABO} = \frac{7 \cdot 24x}{a} = 7 \cdot 12x = 84x$$

$$\frac{\sin x \cdot OB \cdot AB}{2} = S_{ABO}$$

$$\sin x = \frac{AO}{26}$$

$$\frac{AO \cdot OB \cdot AB}{48}$$