



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим что $abc: 7^{37}$, м.к $ac: 7^{37}$

$$\boxed{abc: 2^{26} \Rightarrow \text{м.к } ac: 2^{26} \Rightarrow \text{deg вхождения } 2 \text{ в } b \leq 5}$$

$$\text{м.к } bc: 2^{17} = \text{deg вхождения } 2 \text{ в } a \leq 8$$

$\Downarrow$
deg вхождения 2 в $ab \leq 13$

$$\Downarrow$$

$$13 \geq 14$$

$$abc: 2^{26}$$

$$\Downarrow$$

$$abc: 2^{26} \cdot 7^{37}, \text{ м.к } (2^{26}, 7^{37}) = 1$$

$$a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow abc > 0 \Rightarrow abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$$

Пример: $a = 2^9 \cdot 7^{17}$; $b = 2^6 \cdot 7^0$; $c = 2^{11} \cdot 7^{20}$

$$ab: 2^{15} \cdot 7^{10}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Сократили} \Rightarrow \frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} : m \Rightarrow (a+b)^2 : m \Rightarrow \frac{8ab}{a^2+ab+b^2} : m \Rightarrow \frac{8a^2}{8b^2} : m$$

$$\Rightarrow \frac{8a^2}{8b^2} : m$$

$\exists$ p -каждый простой делитель m

$$\text{Если } m > 2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} : p \Rightarrow \frac{a}{b} : p \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \text{сократили}$$

?! //

$$p \leq 2$$

$\Rightarrow m$ - степень двойки

$\exists k$ - deg base

$$m = 2^k$$

$$\text{Если } k \geq 4 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} : 2 \Rightarrow \frac{a}{b} : 2 \Rightarrow \frac{b}{2} : 2 \Rightarrow \frac{8b^2}{2^4} : m$$

$$k \leq 3 \Rightarrow m \leq 8$$

Пример:

$$a=1$$

$$b=7 \Rightarrow \frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{8}{8} - \text{сократили на 8}$$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3 ☐
$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2x^2 - 5x + 3} \\ b &= \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a - b = 2 - 7x \\ a^2 - b^2 = 2 - 7x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b & 2 = 7x \\ a + b = 1 \end{cases}$$

1) $2 = 7x \Rightarrow x = \frac{2}{7} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{8}{49} - \frac{10}{7} + 3} = \sqrt{85}$
 $b = \sqrt{\frac{8}{49} + \frac{4}{7} + 1} = \sqrt{85} \Rightarrow a - b = 0$
подходит

2) $a + b = 1 \Rightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$
$$4x^2 - 3x + 4 + 2\sqrt{(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 + 2x + 1)} = 1$$

$$4x^2 - 3x + 3 \leq 0$$

$$f(x) = 4x^2 - 3x + 3$$

$$f'(x) = 8x - 3$$

$$m.k.v. > 0 \Rightarrow f_{\min} = f\left(\frac{3}{8}\right) = 4 \cdot \frac{9}{64} - 3 \cdot \frac{3}{8} + 3 > 0$$

корней нет

Ответ: $\left\{\frac{2}{7}\right\}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим какие точки подходят в пару к A при фикс. A
(пока что уберём условие что точки в параллелограмме)

$$2x_2 + y_2 - 2x_1 - y_1 = 12 \Rightarrow \underbrace{2x_2 + y_2}_{\text{прямая с коэф. наклона } -2} \stackrel{\text{const}}{=} \underbrace{2x_1 + y_1}_{\text{const}} \Rightarrow \text{мн-во решений } (x_2, y_2) - \text{же}$$

Рассматривая $(x_1 + 6; y_1)$ - корень

Заметим, что стороны OP и QR имеют ^{тоже} ~~то~~
коэф. наклона $-2 \Rightarrow$ каждой точке параллело-
грамма соответствует ^{в пару} ~~одна~~ ^{одна} целые точки лежащие
на прямой $\parallel OP$ и QR (прямая и точки
могут быть вне паралл-ма) Заметим

Заметим что ~~прямая~~ PQ и OR имеют ~~этот~~ ^{этот} коэф. наклона 0

Отсюда замечаем что если $A(x_1; y_1)$ и $B(x+6; y_1) \in OPQR$
то все ^{целые} точки прямой $\parallel QR$, то ~~он~~ ^{он} с $xy \leq 24$ падает
в пару к A , а если условие не выполнено, то все точки на прямой
через B вне $OPQR \Rightarrow y_A$ тем пар. целые точки

Также если $A', A, B' \in OPQR$, то (A, B) - пара, то если
 $A'A \parallel QR$, то (A', B) - пара, а если нет то нет. $\Rightarrow$ всего
пар в $(24+1)$ раз больше чем для ~~пар~~ ^{пар} точек ~~на~~ ^{на} OR

пар для точек на $OR = (15+1-6) \cdot (24+1) = 250 \Rightarrow$ всего 20 пар
625

Ответ: 625

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что мы нашли ~~свой~~ ^{параграф} параграф
пару a и b записали

$$ax - y + 10b = 0 \Rightarrow ax + 10b = y \Rightarrow \text{прямая}$$

проходящая через $(0; 10b)$ и ~~скажем~~ ^{назовем} ℓ ~~каждой~~ ^{каждой} a и b

$(x+8)^2 + y^2 - 1$ - окружность с центром в $(-8; 0)$
радиуса 1 ^{назовем} ω_1

$x^2 + y^2 - 4$ - окружность с центром в $(0; 0)$ ^{радиуса 2}
^{назовем} ω_2

$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \Leftrightarrow$ ^{знак} количество точек
на ℓ и лежащих ^{равно} в ω_1 и ω_2 или на ω_1 или ω_2
равно 2. Заметим что если прямая проходит ^{через} ω_1 или ω_2 то таких точек ∞ (т.к. ω_1 и ω_2 пересекаются) $\Rightarrow \ell$ -
касательная, т.к. 2 точки то ℓ - ~~общая~~ ^{общая} касательная
 ω_1, ω_2 . Найдем уравнения ~~всех~~ ^(м.е.а) касательных
Найдем ~~уравнение~~ ^{уравнения} ~~каждой~~ ^{каждой} касательных (существование
для каждого найдем ~~а~~ ^а очев., т.к. у ~~каждой~~ ^{каждой} прямой
есть уравнение)

Всего 4 варианта ~~каждой~~ ^{каждой}: если внешняя, то $\pm \frac{\sqrt{63}}{63} = \pm \frac{\sqrt{7}}{21}$
если внутренняя, то $\pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$

~~СРВ~~

$\Rightarrow$ это все
подходящие a

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\sqrt{7}}{21}; -\frac{\sqrt{7}}{21}; \frac{3\sqrt{55}}{55}; -\frac{3\sqrt{55}}{55} \right\}$$



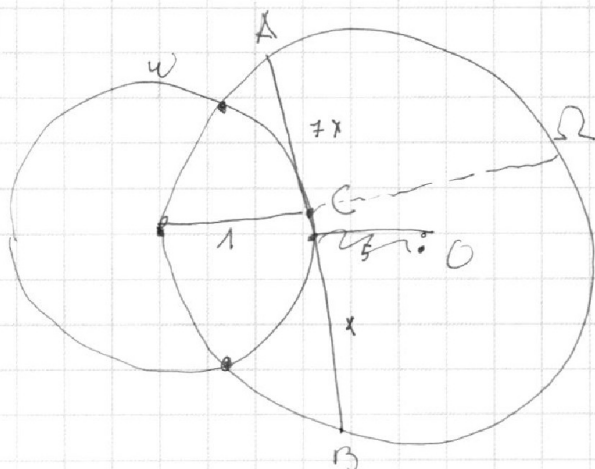
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

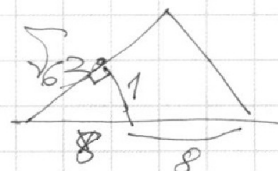
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$4x^2$$



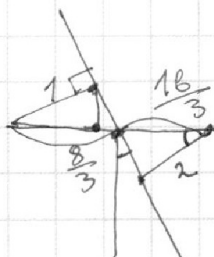
$$\frac{x+8}{x} = \frac{2}{1}$$

$$x=8$$

$$15+14+20=52 \quad 26$$

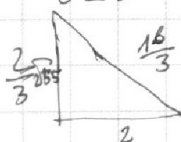
6
11
9

$$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1$$
$$4x^2-3x+4 + 2\sqrt{\quad} = 1$$



$$250$$

$$25$$



$$2/$$

$$4x^2-3x+9$$

$$x^2-3x \quad 0,75x+0,75$$
$$2x \quad 0,75x$$

$$\frac{1}{2563}$$

$$4$$

$$64 \quad \frac{256}{9}$$

$$\frac{36}{\sqrt{55}}$$

$$\frac{220}{9} = 24.55$$



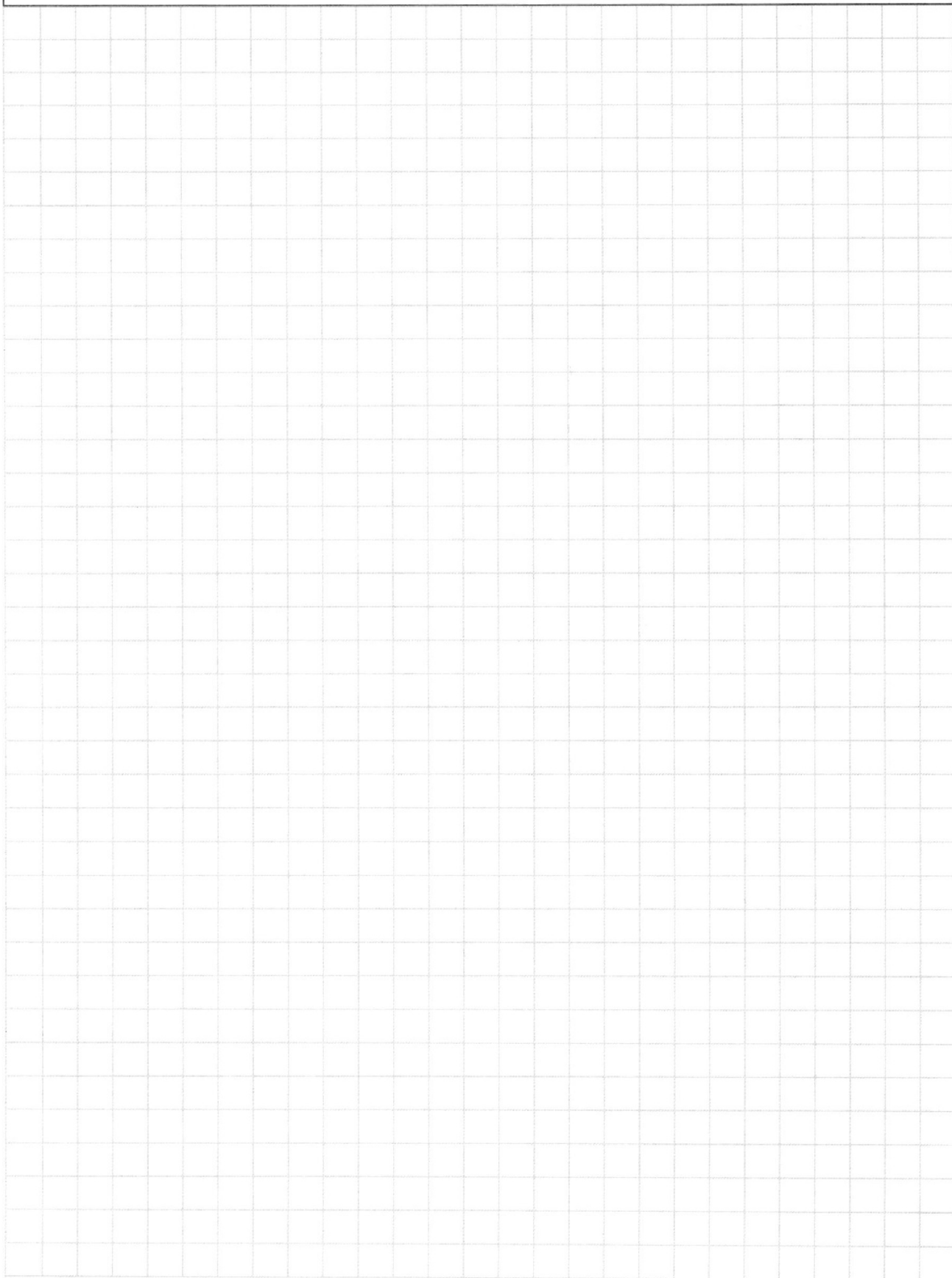
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

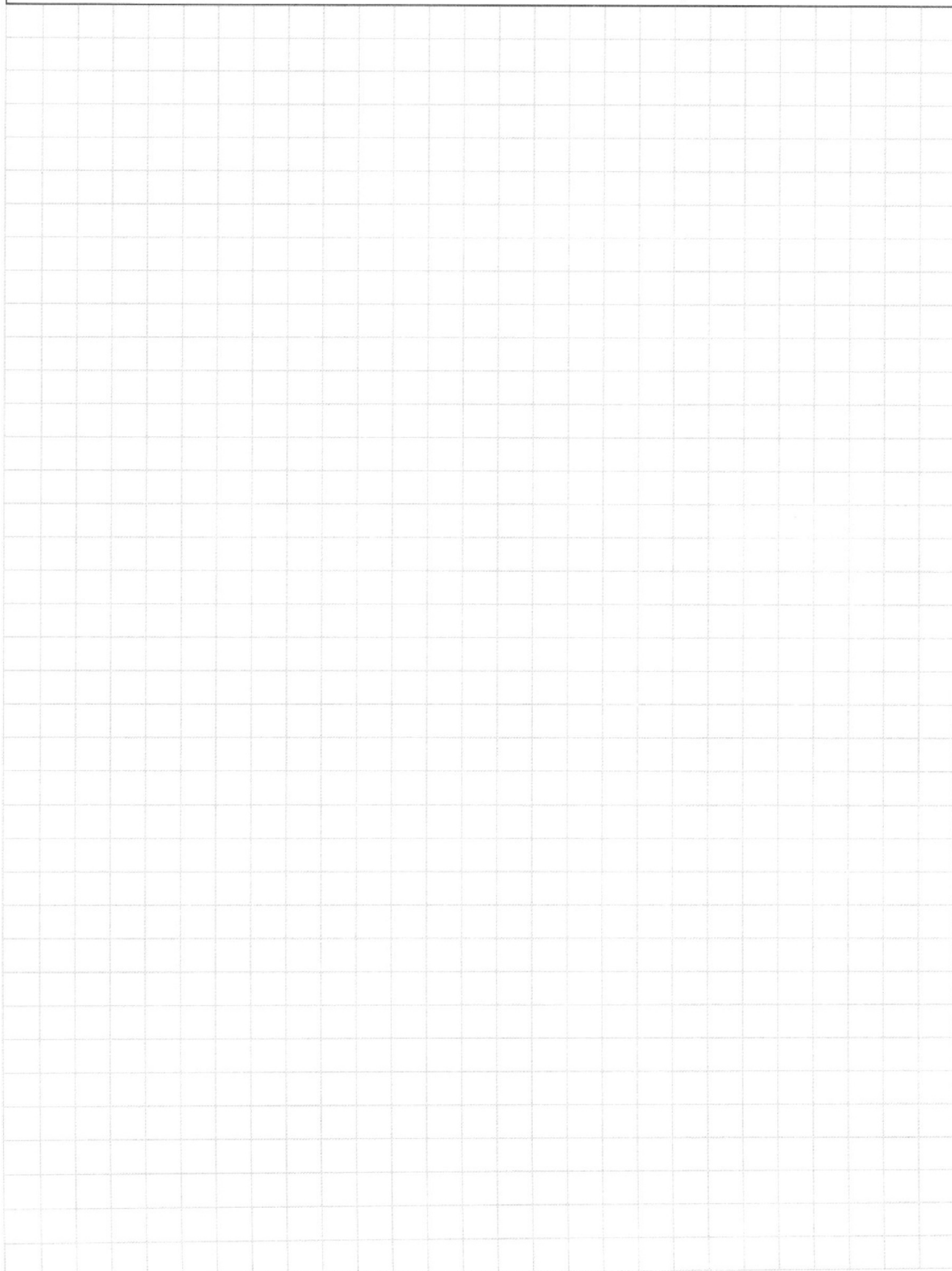
5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

