



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 1

$$ab: 2^{15} 7^{11}$$

$$bc: 2^{12} 7^{13}$$

$$ac: 2^{23} 7^{39}$$

$$ab = 2^{15} 7^{11} \cdot X$$

$$bc = 2^{12} 7^{13} \cdot Y$$

$$ac = 2^{23} 7^{39} \cdot Z$$

где X, Y и Z
целые
числа

$$abc: ab, abc: ac, abc: bc$$

$$\text{тогда } abc: 2^{23} \cdot 7^{39} \rightarrow (abc)^2: 2^{56} \cdot 7^{78}$$

предположим ab, bc и ac

$$ab \cdot bc \cdot ac = 2^{15} 7^{11} \cdot X \cdot 2^{12} 7^{13} \cdot Y \cdot 2^{23} 7^{39} \cdot Z$$

$$(abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot XYZ$$

$$\text{но } (abc)^2: 2^{56} \cdot 7^{78}$$

$$\text{тогда } XYZ = K \cdot 2 \cdot 7^{10}$$

$$(abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot K \cdot 2 \cdot 7^{10}$$

$$(abc)^2 = 2^{56} \cdot 7^{78} \cdot K$$

abc минимально при $K=1$

$$\text{тогда } abc = 2^{28} 7^{39}$$

проверим предположение
целые числа:

$$a = 2^{10} 7^{11}$$

$$b = 2^5$$

$$c = 2^{13} 7^{29}$$

тогда

$$ab = 2^{15} 7^{11} : 2^{15} 7^{11}$$

$$bc = 2^{12} 7^{23} : 2^{12} 7^{13}$$

$$ac = 2^{23} 7^{39} : 2^{23} 7^{39}$$

$$\text{Ответ: } 2^{28} 7^{39}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

$\frac{a}{b}$ несократима

$$\text{НОД}(a, b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(-(a^2+2ab+b^2)+9ab)} = \frac{a+b}{(-(a+b)^2+9ab)}$$

дробь максимально сокращается
на НОД числителя и знаменателя

$$\text{НОД}((a+b), \frac{-(a+b)^2+9ab}{(a+b)}) = \text{НОД}(a+b, 9ab)$$

$$\text{НОД}(ab, (a+b)) = 1$$

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots$$

$$b = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \dots$$

где p_i и q_i — простые и различные
или (т.н. $\text{НОД}(a, b) = 1$)

тогда

$$ab = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots \cdot q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \dots$$

$$a+b = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots + q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \dots$$

у ab и $a+b$ нет общих делителей
т.е. $\text{НОД}(ab, (a+b)) = 1$

тогда $\text{НОД}(a+b, 9ab)$ будет наибольшим,
если $a+b \div 9$

$$\text{НОД}(a+b, 9ab) = 9 \text{ при } a+b \div 9$$

привести пример: $a=4$ $b=5$ $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{4+5}{16-7 \cdot 20+25} = \frac{9}{41-141} = \frac{9}{-99} = \frac{-1}{11}$$

$m=9$

Ответ: при $m=9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

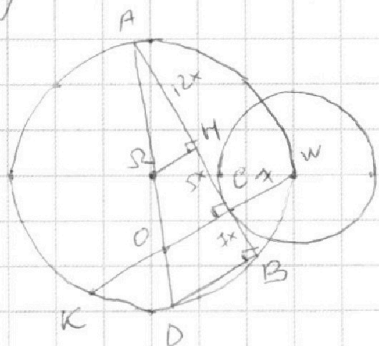
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Зарава ~ 3



$$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7} \quad AC = 17x \quad CB = 7x \quad AB = 24x$$

ICW Pays D & K
not for promiss AD

$\angle ABD = 90^\circ$ in $\triangle ABD$, or no d
 $\angle AEC = 90^\circ$ in $\triangle AEC$; $EW = 12$
 (EK & EW given)

$$AC \cdot CB = CW \cdot KC \quad CW = r = 7$$

$$17x \cdot 7x = 7 \cdot 100$$

$$K_c = 17.2 \quad] O_c = a$$

$$K(x) = 17x^2 - a$$

онусен ΣH - нефункционален

RM LAC

т.н. Σ -г. орг. AB -топос, $\Sigma H \perp AB$
то $AH = HB = 12x$

$A \rightarrow 2H \sim_A AOC \quad A\Omega = R = 13$

$$\frac{AH}{AC} = \frac{AD}{AO} \quad AO = \frac{17x}{17x} \cdot 13 = \frac{17 \cdot 13}{12}$$

$$OD = AD - AO = 26 - \frac{17 \cdot 13}{12} = \frac{13 \cdot 2 \cdot 12 - 17 \cdot 13}{12} = \frac{13 \cdot 7}{12}$$

$$AO \cdot OD = KO \cdot OW$$

$$\frac{17.13}{12}, \frac{13.7}{12} = (17x^2 - a)(7 + a)$$

$$\frac{17.7.13^2}{122} = 17.7x^2 + 17x^2.a - 7a - a^2$$

ΔHOC - α - фен

но в Пискарево

$$OC^2 = AO^2 - AC^2$$

$$OC^2 = AO^2 - AC^2$$

$$a^2 = \left(\frac{17.13}{12}\right)^2 - (17x)^2 = \left(\frac{17.13}{12} - 17x\right) / \left(\frac{17.13}{12} + 17x\right)$$

$$= \frac{17(13+12) + 17(13+12)}{12 \cdot 12}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☒	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 3 оформлена

$$a = \frac{17}{12} \sqrt{(13-12x)(13+12x)}$$

$$\frac{17 \cdot 7 \cdot 13^2}{12^2} = 17 \cdot 7x^2 + 17x^2 \cdot \frac{17}{12} \sqrt{(13-12x)(13+12x)} - \frac{17 \cdot 7}{12} \sqrt{\dots} - \frac{17^2}{12^2} (13^2 - 144x^2)$$

$$x^2 = t$$

$$\cdot 12^2 \quad \frac{17 \cdot 7 \cdot 13^2}{12^2} = 17 \cdot 7t + 17t \cdot \frac{17}{12} \sqrt{169 - 144t} - 7 \sqrt{169 - 144t} - \frac{17^2}{12^2} (169 - 144t)$$



$$\begin{aligned} 7 \cdot 13^2 - 12^2 \cdot 7t + 17 \cdot 12t \sqrt{\dots} - 7 \cdot 12 \sqrt{\dots} - 17(169 - 144t) \\ 7(169 - 144t) = 17 \cdot 12t \sqrt{\dots} - 7 \cdot 12 \sqrt{\dots} - 17(169 - 144t) \\ 34(169 - 144t) = 12(17t \sqrt{\dots} - 7 \sqrt{\dots}) \\ 17(169 - 144t) = 6(17t \sqrt{\dots} - 7 \sqrt{\dots}) \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$a = \sqrt{3x^2 - 6x + 2}$$

$$b = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$a^2 - b^2 = -9x + 1$$

$$a - b = a^2 - b^2$$

$$a - b = (a - b)(a + b)$$

$$(a - b)(a + b - 1) = 0$$

$$1) a = b \quad 2) a + b - 1 = 0$$

$$1) \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad |^2$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$9x = 1$$

$$x = 1/9$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$D = 9 - 12 < 0$$

$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} > 0$$

$$\text{нфн } x$$

$$\text{нфн } x = 1/9 \quad 3x^2 + 3x + 1 > 0 //$$

$$2) \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 1 = 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad |^2$$

$$x \in [-1; 0] \quad 3x^2 - 6x + 2 = 1 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

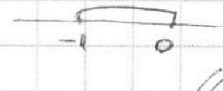
$$2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 9x \quad |^2$$

$$1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0$$

$$3x^2 + 3x + 1 \leq 1$$

$$3x^2 + 3x \leq 0$$

$$x(x+1) \leq 0$$



$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$12x^2 + 12x + 4 = 81x^2$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$D = 12^2 + 4 \cdot 4 \cdot 69 =$$

$$= 4^2 \cdot 3^2 + 4^2 \cdot 69 = 4^2 \cdot 78 =$$

$$= (4\sqrt{78})^2$$

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69}$$

$$x = \frac{12 \pm 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69}$$

$$\frac{6 \pm 2\sqrt{78}}{69} < 0$$

$$H0 \quad \frac{12 - 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} < 0$$

$$12 < 4\sqrt{78}$$

$$6 < 2\sqrt{78}$$

$$36 < 4 \cdot 78$$

$$x > 0$$

не подходит

$$(или же \quad 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} < 0$$

$$\text{и } \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 40 \text{ не имеет})$$

$$\frac{12 - 4\sqrt{78}}{2 \cdot 69} < 0$$

$$\text{не подходит} //$$

Ответ: $1/9$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



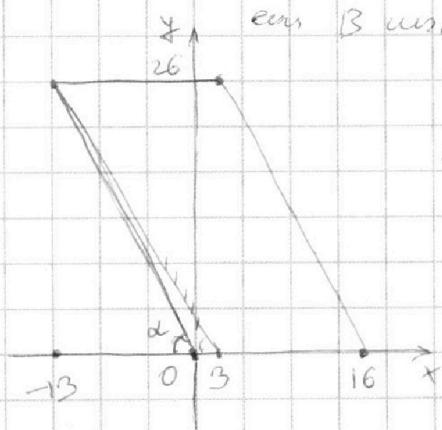
Задача 5

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 14$$

$x_2 - x_1$ расст. по x между A и B
если B правее, то $x_2 - x_1 > 0$
если B левее, то $x_2 - x_1 < 0$

$y_2 - y_1$ расст. по y от A до B
если B выше, то $y_2 - y_1 > 0$
если B ниже, то $y_2 - y_1 < 0$



~~или~~

по оси x увелич. на 13
значит в 14 строках увелич. слева
(минимальное значение)

В каждой строке по 16 точек
в остальных строках — 15 точек

значит ~~увелич.~~, когда $y_2 - y_1 = 0$
и $2(x_2 - x_1) = 14$

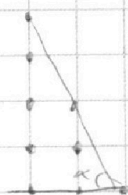
$$x_2 - x_1 = 7 \quad x_2 \text{ правее } x_1 \text{ на } 7 \quad 14$$

в 17 строках с равным числом: 9 всего: $17 \cdot 9$

в ост. строках: 8 всего: $13 \cdot 8$

y может отличаться на любое число (иначе $x_2 - x_1$ не целое)

углы n -угол:



$$\tan \alpha = 2 \quad (\tan \alpha = \frac{26}{13} = 2)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 5 оформление

Вс. g_2 В точке А на 2

$$y_2 - y_1 = 2$$

$$\text{то } x(t_2 - t_1) = 12$$

$$(t_2 - t_1) = 6$$

В пункт А

такой же ток (но) 10 но у правых правых
точки у букв все n-мкс

тоже 9 минут

а минут 2 строки вертима (иначе В все
н-мкс)

итого: 9. ~~10~~ 13

В результат: 8.12 (тоже минут 2 строки вертима
н-мкс)

Вс. В точке А на 4

$$(t_2 - t_1) = 5$$

В пункт А ток ток 11 но у букв правых В а
и минут 4 строки н-мкс

итого: 9. ~~10~~ 12

у результат: 8.11

Вс. В точке А на 6

$$t_2 - t_1 = 4$$

свое: 9.11

результ: 8.10

...

Вс. В точке А на 14

свое: 9.7

результ: 8.6

итого: 9. (7+14) + 8. (13+...+6)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 16

$$\begin{cases} a + y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

окр. $y(0;0)$ $R=1$

$$x^2 + (y - 12)^2 - 16 = 0$$

окр. $y(0;12)$ $R=4$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \leq 0 & \text{внутри окр.} \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 \geq 0 & \text{вне окр.} \\ x^2 + y^2 - 1 \geq 0 & \text{вне окр.} \\ x^2 + (y - 12)^2 - 16 \leq 0 & \text{внутри окр.} \end{cases}$$

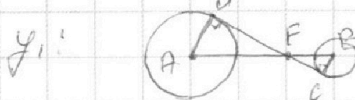
$$\text{т.е. } (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0$$

или точка находится внутри одного
окружности и вне другого окр.
двух/обеих (противоп. окр. тоже
подходит)

значит ровно два решения, если
прямая $y = -ax + 3b$ касается
двух окружностей

всего 4 касательных
из них 2 по л. симметрии
относительно Oy

используем y_1 и y_2



$$AD = 4, BC = 1$$

$$AB = 12$$

$$|FB| = x$$

$$\triangle ADF \sim \triangle FBC$$

$$\frac{AD}{BC} = \frac{AF}{FB} \quad \frac{4}{1} = \frac{12-x}{x}$$

$$4x = 12 - x$$

$$x = \frac{12}{5} \quad FB = \frac{12}{5}$$

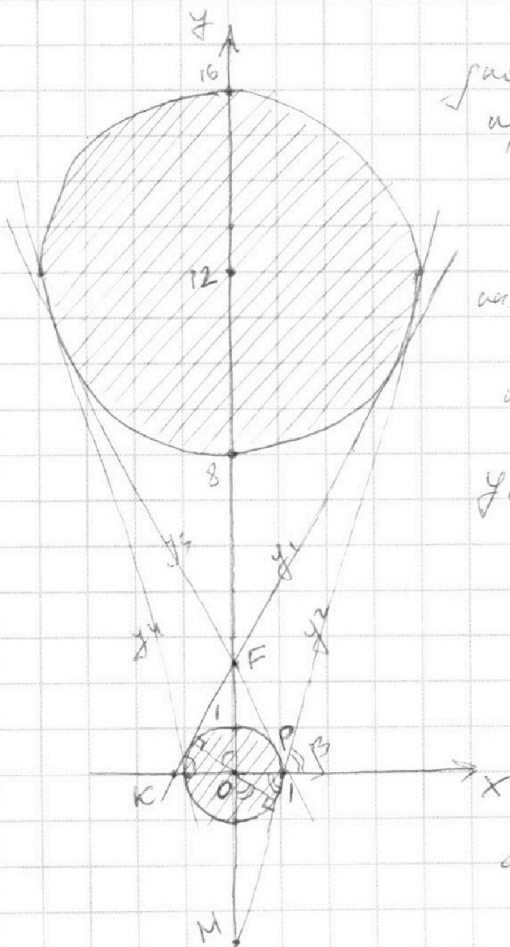
$$\triangle FBC - \text{прямоу.}$$

$$BC = 1, FB = \frac{12}{5}$$

$$\cos \angle BFC = \frac{FC}{FB} = \frac{13}{5}$$

$$\angle FBC = \angle FCO = \frac{13}{5}$$

$$\angle FBC = \angle FCO \quad (\text{на графике}) \quad \angle FCO = \frac{13}{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

задача 6 продолжение
тогда

$$y_1 = k_1 x + b_1$$

$$k_1 = \frac{13}{5} \quad b_1 = \frac{12}{5}$$

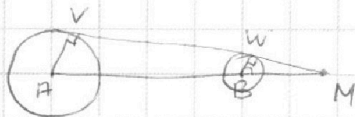
$$k_1 = -a$$

$$b_1 = 8b$$

$$a = -\frac{13}{5}$$

$$b = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$$

y_2 :



$$AV = 4, BW = 1, AB = 12$$

$$ABM = x$$

$$\triangle MBW \sim \triangle MVA$$

$$\frac{MB}{MA} = \frac{WB}{VA}$$

$$\frac{x}{x+12} = \frac{1}{4}$$

$$4x = x + 12$$

$$x = 4 \quad BM = 4$$

$$\triangle MBW \text{ - тупой } WB = 1, BM = 4$$

$$\cos \angle MBW = \frac{WB^2 + BM^2 - WM^2}{2 \cdot WB \cdot BM}$$

$$WM = \sqrt{15}$$

$$\cos \angle MBW = \frac{1^2 + 4^2 - 15}{2 \cdot 1 \cdot 4} = \frac{WM}{BM} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

из
графика

$$\angle MOW = \angle OPM = \angle \beta$$

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{тогда } y_2 = k_2 x + b_2$$

$$k_2 = \sqrt{15}$$

$$b_2 = -4$$

$$k_2 = -a$$

$$b_2 = 8b$$

$$a = -\sqrt{15}$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

и соответственно y_3 и y_4

симметричные им ($k_3 = -k_1$, $k_4 = -k_2$)

$$y_3 = \frac{13}{5}x + \frac{3}{10} \quad a = \frac{13}{5}$$

$$y_4 = \sqrt{15}x - \frac{1}{2} \quad a = \sqrt{15}$$

Ответ: при $a = \frac{13}{5}$, $a = -\frac{13}{5}$, $a = \sqrt{15}$, $a = -\sqrt{15}$



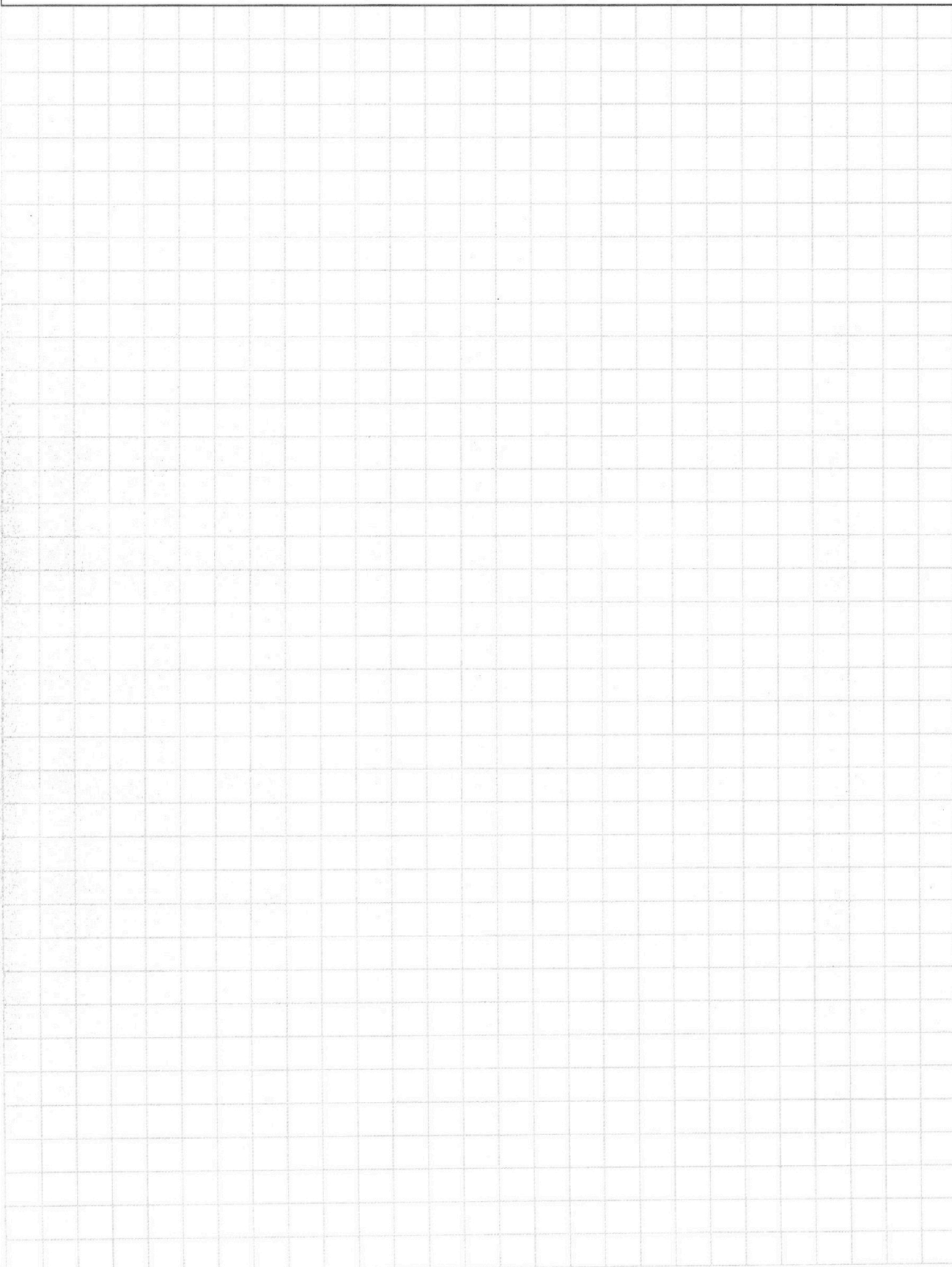
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №1

$$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{13}$$

$$ac: 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot X$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{13} \cdot Y$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot Z$$

где X, Y, Z
целые
числа

перемножим ab, bc и ac

$$ab \cdot bc \cdot ac = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot X \cdot 2^{17} \cdot 7^{13} \cdot Y \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot Z$$

$$(abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot XYZ$$

полный
квадрат

тогда $2^{55} \cdot 7^{68} \cdot XYZ$ тоже
должно быть полным
квадратом

до минимального полного квадрата
не хватает 2 тогда X или Y или Z
равно 2 ($X+Y+Z=2$)

$$(abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{68} \cdot 2$$

$$(abc)^2 = 2^{56} \cdot 7^{68}$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$$

проверим ответ

таким a, b и c :

$$a = 2^{10} \cdot 7^{11}$$

$$b = 2^5 \cdot 7^{13}$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$тогда ab = 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{29}$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

~~167-174-181-188-195-202-209-216-223-230-237-244-251-258-265-272-279-286-293-300-307-314-321-328-335-342-349-356-363-370-377-384-391-398-405-412-419-426-433-440-447-454-461-468-475-482-489-496-503-510-517-524-531-538-545-552-559-566-573-580-587-594-601-608-615-622-629-636-643-650-657-664-671-678-685-692-700-707-714-721-728-735-742-749-756-763-770-777-784-791-798-805-812-819-826-833-840-847-854-861-868-875-882-889-896-903-910-917-924-931-938-945-952-959-966-973-980-987-994-1001~~

$$a = 2^{10} \cdot 7^{11}$$

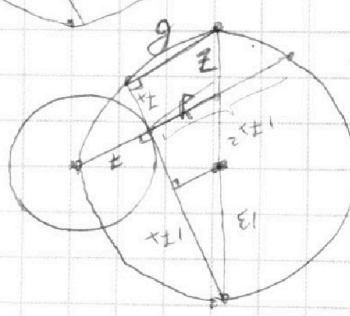
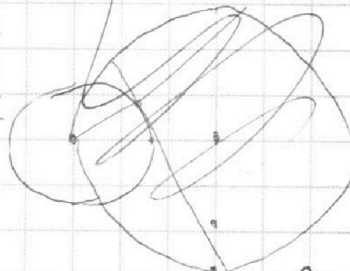
$$b = 2^5 \cdot 7^{13}$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$X = 2$$

$$Y = 1$$

$$Z = 1$$



$$a = 2^{10} \cdot 7^{11}$$

$$b = 2^5 \cdot 7^{13}$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^{11}$$

$$b = 2^5 \cdot 7^{13}$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{10} \cdot 7^{11}$$

$$b = 2^5 \cdot 7^{13}$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{29}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

$$\begin{cases} ax+by-36=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

опр. 1 (0,0)

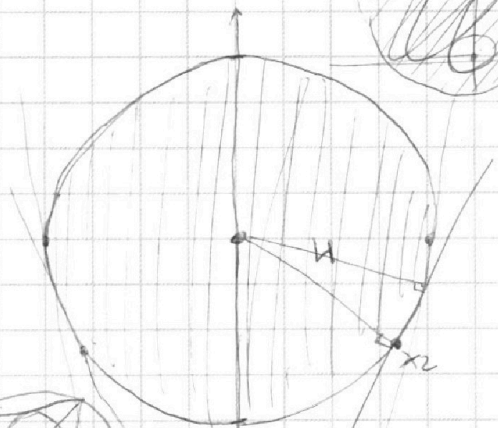
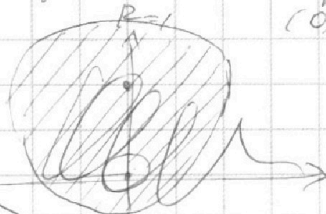
опр. 2

(0,12) R=4

$$\begin{aligned} (x^2+y^2-1) &\geq 0 \\ (x^2+(y-12)^2-16) &\leq 0 \end{aligned}$$

или
наоборот

вне круга
внутри другого



2 точки в пересечении

и прямых

2 симметричные

$$y = kx + b$$

~~опр. 1~~

x_1

$$y_1 = kx_1 + b$$

$$y_1^2 + x_1^2 - 1 = 0$$

$$y_2 = kx_2 + b$$

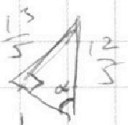
$$x_2^2 + (y_2 - 12)^2 - 16 = 0$$

$$\frac{1}{4} = \frac{x}{12-x}$$

$$4x = 12 - x$$

$$5x = 12$$

$$x = \frac{12}{5} = 2,4$$



$$\tan \alpha = \frac{13}{5}$$

$$y = \frac{13}{5}x + \frac{12}{5}$$

$$y = -\frac{13}{5}x + \frac{12}{5}$$

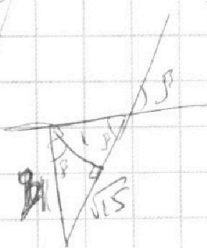
$$\frac{1}{4} = \frac{x}{x+12}$$

$$4x = x + 12$$

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

$$b = -4$$



33
18

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

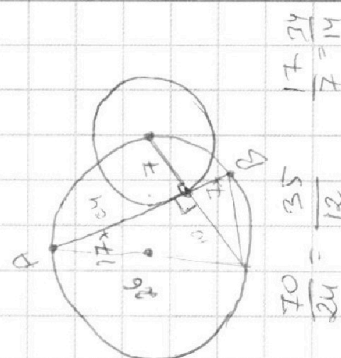
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} y_2 &= -2x_2 + b_2 \\ y_1 &= -2x_1 + b_1 \\ y_2 - y_1 &= -2x_2 + 2x_1 + b_2 - b_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 &= 14 \\ (2x_2 + y_2) - (2x_1 + y_1) &= 14 \\ 2x_2 + y_2 &= 2x_1 + y_1 + 14 \end{aligned}$$

$$\theta_2 - \theta_1 = 14$$



$$(u) \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

ops

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0 \quad 36 - 3 \cdot 4 \cdot 2 = 12$$
$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0$$
$$D = 9 - 12 < 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = a$$
$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} = b$$
$$\dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} y_2 - y_1 \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$
$$\dots \dots \dots 2x_2 - 2x_1 = 2(x_2 - x_1)$$

$$a^2 - b^2 = -9 + 1$$

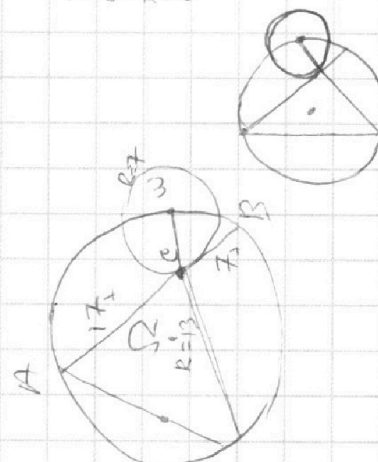
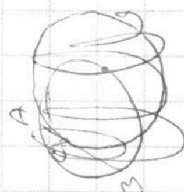
$$a-b = a^2 - b^2$$

$$a-b = (a-b)/(a+b)$$

$$(a-b)(a+b-1) = 0$$

$$\begin{array}{rcl} a & = & b \\ 1) & & 2) \end{array} \quad \begin{array}{rcl} a + b - 1 & = & 0 \end{array}$$

$$1) \quad 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$
$$9x - 1$$
$$+ = 1/9$$



$$\begin{aligned} 2) \quad & \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 \\ & \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad | \cdot 2 \\ & 3x^2 - 6x + 2 = 1 + 3x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{\dots} \\ & 2\sqrt{\dots} = 9x \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ 4(3x^2 + 3x + 1) = 21x^2 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3x + 1 &< 1 \\ 3x^2 + 3x &< 0 \\ x(x+1) \end{aligned}$$

$$-\frac{3}{6} - \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow 12x^2 + 12x + 4 = 81x^2 \\ & 69x^2 - 12x - 4 = 0 \\ & D = 12^2 + 4 \cdot 69 = \\ & = 4^2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 69 = \\ & = 4^2 (9 + 69) = 4^2 \cdot 78 = \end{aligned}$$

$$x = \frac{+12}{2.69}$$

$$x = \frac{-6 + 2\sqrt{73}}{69}$$

~~$12 + \sqrt{73} \pi$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① $ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$
 $bc : 2^{17} \cdot 7^{13}$
 $ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$

$a = 2^{0.15} \cdot 7^{0.11} / 2^{0.22} \cdot 7^{0.39}$
 $b = 2^{0.15} \cdot 7^{0.11} / 2^{0.17} \cdot 7^{0.18}$
 $c = 2^{0.17} \cdot 7^{0.18} / 2^{0.23} \cdot 7^{0.39}$

$ab = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot x$
 $bc = 2^{17} \cdot 7^{13} \cdot y$
 $ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \cdot z$

$(abc)^2 = 2^{15+17+23} \cdot 7^{11+13+39} \cdot xyz$
 $(abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{63} \cdot xyz$

$a = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot 2$
 $b = 2^{17} \cdot 7^{13}$
 $c = 2^{23} \cdot 7^{39}$

$a = 2^{10}$
 $b = 2^5$
 $c = 2^{13}$

по условию две стороны

$(abc)^2 = 2^{55} \cdot 7^{63} \cdot K$
 $abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$

$K = \frac{xyz}{2}$ $K=1$
 $xyz=2$
 $x=2$ или $y=2$ или $z=2$

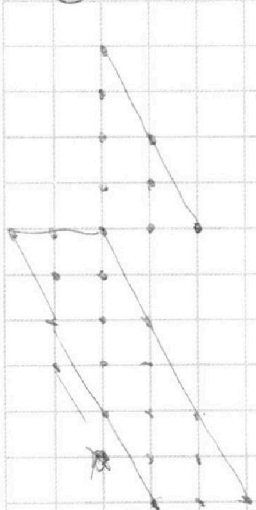
примеч:

$a = 2^{15} \cdot 7^{11}$
 $b = 2^{17} \cdot 7^{13}$
 $c = 2^{23} \cdot 7^{39}$

$a = 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot 2$
 $b = 2^{17} \cdot 7^{13}$
 $c = 2^{23} \cdot 7^{39}$

$ab : 2^{15} \cdot 7^{11}$
 $bc : 2^{17} \cdot 7^{13}$
 $ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$

② $\text{НОД}(a, b) = 1$



$a^2 - 7ab + b^2 = 1$
 $\text{НОД}(a+b, -(a+b)^2 + 9ab) = \text{НОД}(a+b, 9ab)$
 $a+b : 9$
 $\max$
 $a=5$
 $b=4$

$a = a \% b$
 $\frac{(a+b)^2 - 9ab}{(a+b)^2 - 9ab} = \frac{1}{1}$
 $\text{НОД}(a+b, -(a+b)^2 + 9ab) = \text{НОД}(a+b, 9ab)$
 $3^2 - 7$
 $\text{НОД}(a+b, 9ab)$

$a = n_1 x + n_2 y$
 $b = k_1 x + k_2 y$
 $n_1 x + n_2 y = k_1 x + k_2 y$
 $n_1 x + n_2 y = k_1 x + k_2 y$

пре и к
 $ab > a+b$ (a+b > a+b)

а) $\frac{5+4}{25-7 \cdot 20+16} = \frac{5+4}{41-140} = \frac{9}{-99}$

б) 9

