



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

① 1) Заметим, что если $\exists k \in \mathbb{N}: k \geq 1, k \neq 2, k \neq 3$
 $a: k^x, b: k^y, c: k^z$, то мы можем
 заменить числа на $\frac{a}{k}, \frac{b}{k}$ или $\frac{c}{k}$, и от этого условие не
 перестанет выполняться. То есть ~~то~~ все числа пред-
 ставим в виде $2^x \cdot 7^y$.

$$\begin{aligned} 2) \quad & a = 2^x \cdot 7^y, \quad ab = 2^{(x+k)} \cdot 7^{(y+\beta)} : 2^{14} \cdot 7^{10} \Rightarrow \begin{cases} x+k \geq 14 \\ y+\beta \geq 10 \end{cases} \\ & b = 2^x \cdot 7^\beta, \quad bc = 2^{(x+k)} \cdot 7^{(y+\beta)} : 2^{17} \cdot 7^{17} \Rightarrow \begin{cases} x+k \geq 17 \\ \beta+m \geq 17 \end{cases} \\ & c = 2^k \cdot 7^m, \quad ac = 2^{(x+k)} \cdot 7^{(y+m)} : 2^{20} \cdot 7^{37} \Rightarrow \begin{cases} x+k \geq 20 \\ y+m \geq 37 \end{cases} \end{aligned}$$

$(x, y, \alpha, \beta, k, m) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (цел., неотр.) $\leftarrow$ все степени ≥ 0 , т.к. числа $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$3) abc = 2^{(x+\alpha+k)} \cdot 7^{(m+y+\beta)}$$

4) Заметим, что условия по степеням 2 и 7 независимы,
 т.е. мы можем отдельно минимизировать каждый сомножитель
 5) $\begin{cases} x+k \geq 14 \\ \alpha+k \geq 17 \\ x+k \geq 20 \end{cases} \quad 2(x+\alpha+k) \geq 51$, т.к. все числа ~~натур.~~ целые, то
 $2(\quad) -$ четно и мин. 52.
 6) Аналогично для 7.
 $917 (x+\alpha+k) \geq \frac{51}{2} = 25,5 \Rightarrow (x+\alpha+k) = 26$

$$\begin{cases} y+\beta \geq 10 \\ \beta+m \geq 17 \\ y+m \geq 37 \end{cases} \quad 2(y+\beta+m) \geq 64 \quad m+\beta+y \geq 32$$

$$abc = 2^{x+\alpha+k} \cdot 7^{m+y+\beta} \geq 2^{26} \cdot 7^{32} \text{ по доказанному.}$$

Пример: $x=8, \alpha=6, k=12$
 для 2-х.

однако, заметим, что решая систему (2),
 мы получим, что $y-\beta \geq 20$ (вот время
 как $y+\beta \geq 10$, т.е. в примере для минимума
 $y \geq 20+\beta, \beta \leq y-20, 10 \leq y+\beta \leq 2y-20 \Rightarrow$
 $\Rightarrow y \geq 15 \Rightarrow$ но из условия $\beta \geq 0$ (степени
 неотр.) $y \geq 20$

$$\Rightarrow y \geq 20 \Rightarrow m \geq 17 \Rightarrow \beta \geq 0$$

$\beta=0, m=17, y=20$ удовлетворяет всем условиям, (при этом покажем,
 потому y не меньше 20, а сумма $\beta+m \geq 17$ по усл, при этом
 все нер-ва выполнены)

Ответ: $abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$, при $a = 2^8 \cdot 7^{20}$
 $b = 2^6 \cdot 7^0$
 $c = 2^{12} \cdot 7^{17}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик + Построение пример

$$\begin{aligned} X + \alpha &= 14 \\ \alpha + k &= 18 \\ X + k &= 20 \end{aligned}$$

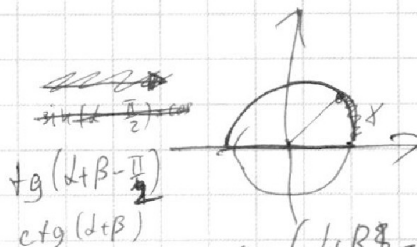
$$\begin{aligned} K - \alpha &= 6 & k &= 12 \\ K + \alpha &= 18 & \alpha &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 + 6 &= 14 \\ 12 + 6 &= 18 \\ 12 + 8 &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y + \beta &= 10 \\ \beta + m &= 17 \\ y + m &= 37 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m - \beta &= 2 \\ y - \beta &= 20 \\ y + \beta &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 15 \\ x &= -5 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta - 90) &= \\ &= \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin(\alpha) \end{aligned}$$

$$\frac{4X}{5} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{4X}{5} = \frac{1 - x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$4X \cdot \left(\frac{4}{5} + \sqrt{25 - 4x^2} \right) = \frac{7X}{\sqrt{49x^2 + 1}} \cdot \sqrt{16x^2 + \frac{16}{5}}$$

$$\frac{7X}{5} = \tan \alpha \quad \frac{X}{5} = \tan \beta \Rightarrow \tan \alpha = 7 \tan \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{7 \tan \beta}{1 - 7 \tan^2 \beta}$$

$$\frac{4X}{h} = \frac{1 - 7x^2}{7X}$$

$$\frac{28x^2}{h} = 1 - 7x^2$$

$$h = \frac{28x^2}{1 - 7x^2} \quad 1 - 7x^2 \geq 0 \quad x^2 \leq \frac{1}{7}$$

$$\frac{(28x^2)^2}{(1 - 7x^2)^2} + 16x^2 = 25$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{7 \tan \beta - \tan \beta}{1 + 7 \tan^2 \beta} = \frac{6 \tan \beta}{1 + 7 \tan^2 \beta}$$

$$(28t)^2 + 16t(1 - 7t)^2 = 25(1 - 7t)^2$$

$$28 \cdot \frac{1}{16}$$

$$28 \cdot \frac{1}{16}$$

$$28 \cdot \frac{1}{16}$$

$$28^2 t^2 + 16t + 49 \cdot 16 t^3 - 2 \cdot 16 t \cdot 7t^2$$

$$28 \cdot \frac{1}{16}$$

$$1 - \frac{7t}{16} (35t)^2$$

$$7 \cdot 63 = 49 \cdot 9$$

$$(25 - 16t)(49t^2 + 1 - 14t) =$$

$$= (28t)^2$$

$$(28t)^2 = 200$$

$$\frac{28 \cdot 16}{9 \cdot 16}$$

$$\frac{28}{9} + 16 \cdot 49 t^3 - 451 t^2 - 224 t^2 + 366 t - 25 = 0$$

$$1 - \frac{7t}{16}$$

$$\frac{4X}{h} = \frac{7X}{1 - 7x^2}$$

$$\frac{7}{4} h = 1 - 7x^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2

$$1) \frac{a+b}{a^2-bab+b^2}$$

$$2) \exists m: m\text{-макс и } \begin{cases} (a+b) \equiv_m 0 \\ (a^2-bab+b^2) \equiv_m 0 \end{cases}$$

$$3) a \equiv_m -b \Rightarrow a^2 - bab + b^2 \equiv_m (-b)^2 - b(-b)b + b^2 \equiv_m 8b^2 \equiv_m 0.$$

4) Имеем 3 условия $\begin{cases} 8b^2 \equiv_m 0 \\ a \equiv_m -b \\ \text{НОД}(a,b)=1 \end{cases}$ $\exists m=8 \cdot k$, где $k \geq 1$, тогда $\text{т.е. } 8b^2 \equiv_m 0$, то b^2 кратно k .
(т.е. $b^2 = k \cdot x$)

$(x, k, x, m) \in \mathbb{N}$.

Тогда $a \equiv_m -b \Leftrightarrow a^2 \equiv_m b^2 \quad a^2 \equiv_m k \cdot x$

a^2 тоже кратно k . $\begin{matrix} k \neq 1 \\ a^2 \div k \\ b^2 \div k \end{matrix}$, но тогда $\text{НОД}(a,b)$ не равен единице.

~~то~~ это противоречит условию. $\Rightarrow$ предполож. неверно и $m \neq 8k$, где $k \geq 1 \Rightarrow m \neq 8$. т.е. $m \leq 8$

Пример для $m=8$:

$b=1, a=7$. $\frac{8}{49-42+1} = \frac{8}{8} = 1 \quad m=8. \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{7} \text{ - несократимо}$

Ответ: $m=8$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(4) $\exists a, b \in \mathbb{R} : 2 - 5x = a \Rightarrow$ ур-е можно записать в виде.
 ~~$2x^2 + 2x + 1 = b$~~

$$\sqrt{b+a} - \sqrt{b} = a.$$

(х) видно, что при $a=0$ ур-е верно. ($\sqrt{b} - \sqrt{b} = 0$). Домножим на сопряженное к левой части.

~~$$b+a+b-2\sqrt{b^2+ab}=a^2$$~~

~~$$2-\sqrt{(b^2+ab)}=a-a^2+2b$$~~

Заметим, что под корнем у нас

слева $\sqrt{\quad}$, т.е. не более двух общих корней.

решение 1: $a=0$

~~$$\text{реш-е 2: } a=1 \Rightarrow \sqrt{2-5x+3} - \sqrt{2-5x+1} = 2-4x$$~~

~~$$b^2+ab = (2x^2+2x+1)(2x^2-5x+3)$$~~

~~$$a-a^2+2b = 2-5x-4x^2-4+14x+2x^2+2x+1 = -4x^2+9x-1$$~~

$$\begin{aligned} & \cdot (\sqrt{b+a} + \sqrt{b}) \cdot (-\sqrt{b+a} - \sqrt{b}) = a \cdot (\sqrt{b+a} + \sqrt{b}) \quad \text{преобр равенство, т.к. } \sqrt{a+b} + \sqrt{b} > 0 \\ & ((\sqrt{b+a})^2 - (\sqrt{b})^2) = a \cdot (\sqrt{b+a} + \sqrt{b}) \end{aligned}$$

$$a=0 \quad a = a(\sqrt{b+a} + \sqrt{b})$$

$$\Rightarrow \sqrt{b} + \sqrt{a+b} = 1$$

~~$$\sqrt{b} = 1 - \sqrt{a+b}$$~~

~~$$b = 1 - a - b$$~~

$$\sqrt{b} = 1 - \sqrt{a+b}$$

$$b = a+b+1 - 2\sqrt{a+b}$$

~~$$a+1 = 2\sqrt{a+b}$$~~

~~$$a^2+2a+1 = 4a+4b$$~~

~~$$(3-5x)^2 = 4(2x^2-5x+3)$$~~

~~$$49x^2 - 42x + 9 - 8x^2 + 20x - 12 = 0$$~~

~~$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$~~

~~$$D = 121 + 3 \cdot 41 = 121 + 123 = 244 = 4 \cdot 61$$~~

~~$$x = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$$~~

$b > 0$ и при $\forall x$

$$b+a = 2x^2-5x+3 = (2x-3)(x-1) > 0 \Rightarrow x < 1 \vee x > \frac{3}{2}$$

$$\frac{11+2\sqrt{61}}{41} \approx 1$$

$$\frac{2\sqrt{61}}{41} \approx 0.30$$

$$\sqrt{61} \approx 7.81$$

$$\frac{11+2\sqrt{61}}{41} \approx \frac{3}{2}$$

$$22+4\sqrt{61} \approx 123$$

$$\sqrt{61} \approx 7.81$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(4) ~~8.~~ ^{итак. 3 решения.}
 $a=0 \Rightarrow 2-7x=0 \quad x=\frac{2}{7}$

$$x = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41} > \text{занято, это}$$

и ограничения ($b > 0$ т.н. $\sqrt{\quad}$ существуют)
 ~~$a+b > 0$~~

$$b > 0 \text{ при } \forall x, \quad a+b > 0 \text{ при } \begin{cases} x < 1 \\ x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} < \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} \quad \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} < 1$$

$$2\sqrt{61} < 41 - 11 = 30$$

$\Rightarrow$ оба числа корни.

$$\sqrt{61} < 15 = \sqrt{225}$$

Ответ: $x = \frac{2}{7}$ (тоже подходит)

$$x = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6) $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$

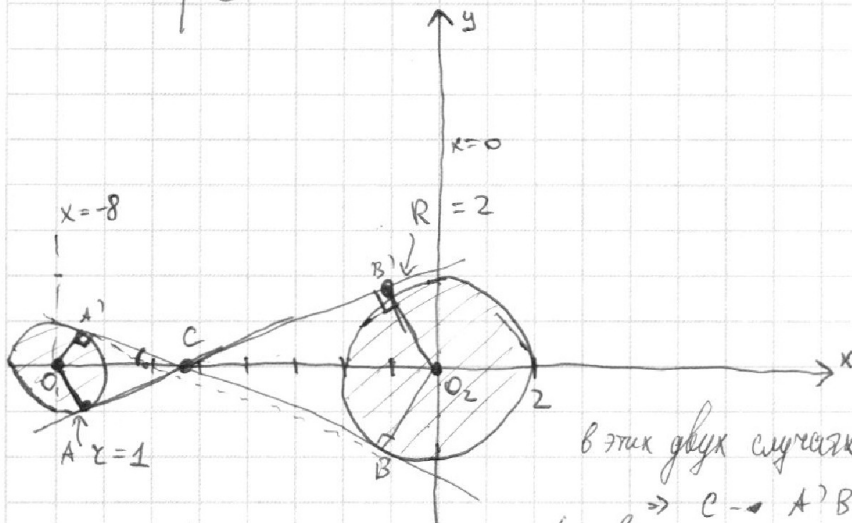
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \geq 0 \\ (x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

это окр-ти. Нанерти и отметим соотв области.

если такие а есть, то прямая

$$y = ax + b$$

общая
- это касательная этих окр-тей.



в этих двух случаях Δ -ки. $\triangle CA'O_1$ равны.

$$\rightarrow C \rightarrow A'B \cap AB' = C, C_x = 0.$$

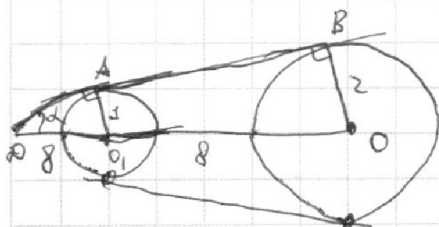
$$\triangle OA'C \sim \triangle O_2BC, k = \frac{1}{2} \quad \frac{O_1C}{CO_2} = \frac{O_1A'}{O_2B'} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{O_1C}{8 - O_1C} = \frac{1}{2} \quad O_1C = \frac{8}{3}$$

Тогда для пр-й $A'B$ ур-е имеет вид $y = ax + k$, где

$$a = \tan \angle A'CO_2 = -\tan \angle A'CO_1 = -\frac{O_1A'}{A'C} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{64}{9} - 1}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{55}{9}}} =$$

$= -\frac{3}{\sqrt{55}}$ (или также пойдет противоположная $a = \frac{3}{\sqrt{55}}$, т.к. они задают две общие внутр. касательные (AB'))



$$\triangle ABO_1 \sim \triangle O_2BO, \Rightarrow \frac{AO_1}{O_1B} = \frac{O_2O_1}{O_2B} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AO_1 = \sqrt{64 - 1} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}.$$

AB имеет ур-е прямой $y = ax + k$, $a = \tan \angle BAO_2 = \frac{1}{3\sqrt{7}}$

также подходит $a = -\frac{1}{3\sqrt{7}}$, он задает противоположно внешн. кас-ю

$A'B'$. других a нет, т.к. общие кас-к окр-тей всего 4. Ответ: $\pm \frac{\sqrt{7}}{31}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ответ: $\pm \frac{\sqrt{21}}{21}$
 $\pm \frac{3\sqrt{55}}{55}$

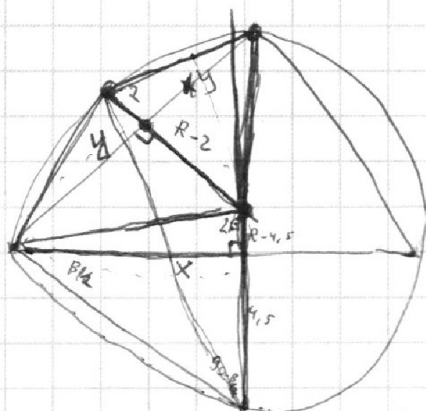
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

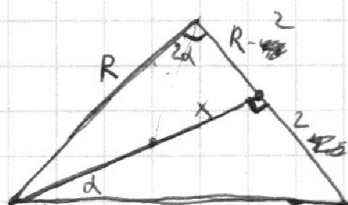
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$X^2 = \frac{81}{4} - 9R$$



$$\tan \alpha = \frac{2}{X}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{4/X}{1 - \frac{16}{X^2}} = \frac{X}{R-2}$$

$$\frac{4/X \cdot X^2}{X^2 - 16} = \frac{4X}{4R-8}$$

$$\frac{4X}{X^2 - 16} = \frac{4X}{4 - X^2 - 8}$$

$$a + X(r+r) = b$$

$$\tan \beta = \frac{2}{X}$$

$$\tan \beta = \frac{2}{X}$$

$$\tan 2\beta = \frac{2 \cdot \frac{2}{X}}{1 - \frac{81}{4X^2}} = \frac{X}{R-2}$$

$$\frac{36}{4 - \frac{81}{X^2}} = \frac{2X}{R-2}$$

$$(9R-81)(36) = 2X \left(4 - \frac{81}{X^2} \right)$$

$$(9R-81) \cdot 4 = 2X \left(4 - \frac{81}{X^2} \right)$$

$$\left(\frac{81}{4} - X^2 - 81 \right) \cdot 2 = \left(4X - \frac{81}{X} \right)$$

$$(81 - 4X^2 - 324) = \left(8X - \frac{162}{X} \right)$$

$$X^2 = 4 - 4R$$

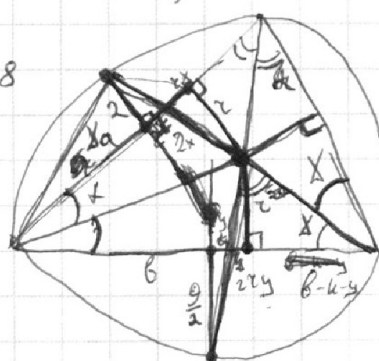
$$4X^2 - 243 = 8X - \frac{162}{X}$$

$$4X^3 - 8X^2 - 243X + 162 = 0$$

$$4 \cdot 8 - 8 \cdot 4 = 0$$

$$4 \cdot 216 - 8 \cdot 36 - 243 \cdot 6 = 0$$

$$-243$$



$$a + 2X + rX = b + 9y + 2ry$$

$$(a + 2X + rX)^2 + r^2$$

$$\frac{a}{2} = \frac{b - 9y - 2ry}{r}$$

$$\left(\frac{ar}{2} \right)^2 + r^2 = d$$

$$\frac{ar}{2} = 2a + 2X + 2rX$$

$$= \frac{a + 2X + rX}{r}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

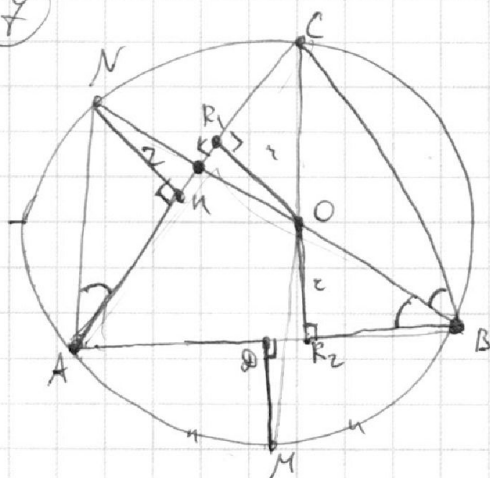
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



7



1) BN - диаметр, т.к. $\angle NC = \angle NA$
 CM - диаметр

2) $BN \perp CM = O$
 AO - высота P - Q (то $\perp$ к диаметру - центр сферы) $\Rightarrow$ $AO \perp$ плоскости

$\angle NAC = \angle OBA$ (на $\angle NC$)

3) $OR_1 \perp AC$ $OR_1 = OR_2 = r$
 $OR_2 \perp AB$

4) $AR_1 = AR_2$ (отрезки кас-х)

5) $\Rightarrow$ а т.к. $\angle NA = \angle NC$, то $\angle OBA = \angle NAC$

6) $\triangle ANH \sim \triangle OR_2B$ $\frac{NH}{AH} = \frac{OR_2}{BR_2}$

$$\frac{2}{AH} = \frac{r}{R_2B}$$

, аналогично: $\frac{9}{2AD} = \frac{r}{R_1C}$

$$\Rightarrow \frac{2R_2B}{AH} = \frac{9 \cdot R_1C}{2AD} = 2r$$

(найти надо)

7) $M \in \perp$, NH - сер-при, т.к. M, N - середины дуг.

8) $\frac{9}{2} \supset BN \cap AC = K$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



②

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a^2}{b^2}-6\frac{a}{b}+1} \quad \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab} = \frac{b+1}{b^2-6b+1}$$

$$b^2-6b+1 = k(b+1) \quad 1400-31$$

$$b^2 - (6+k)b + (1-k) = 0$$

$$b^2 - 6ab + a^2 = m(a+b)k$$

$$b^2 - b(6a+k) + (a^2 - ak) = 0$$

$$D = 36a^2 + k^2 - 12ak - 4a^2 + 4ak = 32a^2 - 8ak + k^2$$

$$(4a^2 - k)(8a + k)$$

$$\frac{1+1}{1+1-6} = \frac{1+b}{b^2-6b+1}$$

$$\frac{1+7}{49-42+1} = 1$$

$$\frac{1+7}{49-42+1} = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} =$$

$$a \equiv -b$$

$$8b^2 \equiv 0$$

$$a \equiv -b$$

$$8a^2 \equiv 0$$

$$a^2 - 6ab + b^2 \equiv b^2 + 6b^2 + b^2 =$$

$$= 8b^2 \equiv 0$$

$$9 \neq 2 \quad b = a = 9$$

$$389 = 350 + 39$$

$$340 + 49$$

$$\frac{9+9}{81-6 \cdot 81+81} = \frac{18}{81 \cdot (-4)}$$

41

$$8b^2 \equiv 0$$

$$a \equiv -b$$

$$b^2 - 6(m-b)b + (m-b)^2 = m \cdot k$$

$$8b^2 - 6mb - 2bm + m^2 - mk = 0$$

$$8b^2 - 8bm + (m^2 - mk) = 0$$

$$D = 64m^2 - 32(m^2 - mk) = 32m^2 + 32mk$$

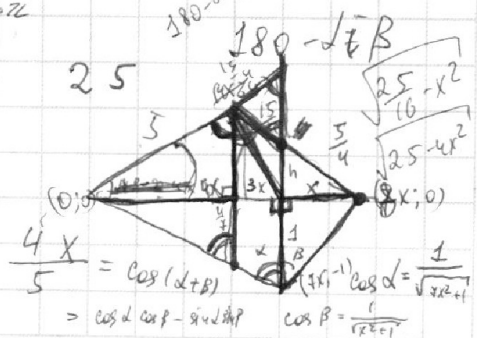
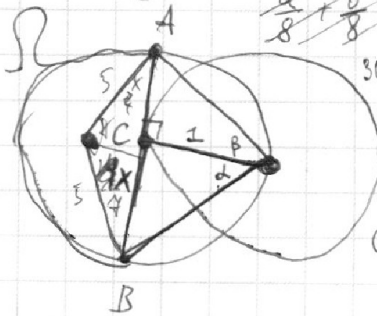
$$= 32m^2 + 32mk$$

$$m^2 + mk = 2 \times 2$$

$$8b^2 \equiv 0$$

$$b \equiv 3 \quad a \equiv -b \equiv 3k$$

$$a = 24 + 3k$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

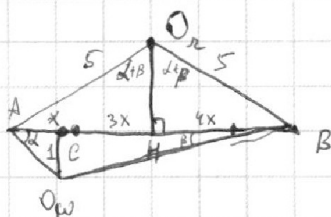
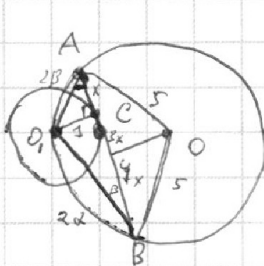
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☒	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3



1) Соединим OA, OB .
 $OA = OB = R_{\Omega} = 5$

2) $OH \perp AB$ (построим)

3) $OC \perp AB$ (радиус $\perp$ т.-кр. касательн.)

4) $\angle AC = x \Rightarrow CB = 4x \Rightarrow AH = HB = 4x = \frac{AB}{2} \Rightarrow CH = 3x$

5) $\angle O_{\omega} AC = \alpha, \angle O_{\omega} BC = \beta \Rightarrow \angle A O_{\omega} = 2\alpha \Rightarrow \angle AB = 2\alpha + 2\beta$
 $\angle B O_{\omega} = 2\beta$

$\Rightarrow \angle A O_{\omega} B = 2\alpha + 2\beta$, а т.к. $O_{\omega} H$ - высота в $\triangle A O_{\omega} B$, то $\angle A O_{\omega} H = \angle B O_{\omega} H = \alpha + \beta$

6) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}x, \operatorname{ctg} \beta = \frac{4}{3}x$

$$\operatorname{ctg} \angle A O_{\omega} H = \frac{\sqrt{25 - 16x^2}}{4x} = \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = \frac{\frac{3}{4}x \cdot \frac{4}{3}x - 1}{\frac{3}{4}x + \frac{4}{3}x} = \frac{7x^2 - 1}{8x}$$

$$= \frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha} = \frac{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} - 1}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = \frac{7x^2 - 1}{8x}$$

$$\frac{\sqrt{25 - 16x^2}}{4x} = \frac{7x^2 - 1}{8x} \quad \sqrt{100 - 64x^2} = 7x^2 - 1 \quad t = x^2, t > 0, \text{ т.к. } \frac{1}{x}, \Rightarrow x \neq 0$$

$$100 - 64t = 49t^2 + 1 - 14t$$

$$49t^2 + 50t - 99 = 0$$

$$t_1 = 1 \quad (49 + 50 - 99 = 0)$$

$$\frac{D}{4} = 25^2 - 4 \cdot 49 \cdot 99 = 625 + 490 \cdot 2 \cdot 49 = 625 + 980 \cdot 49 >$$

$$= 1556 = 4 \cdot 389$$

$$t = \frac{-25 \pm 2\sqrt{389}}{49} \quad (+, \text{ т.к. } 170$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{-25 + 2\sqrt{389}}{49}} \Rightarrow AB = 8x = \frac{8}{7} \sqrt{-25 + 2\sqrt{389}}$$

$$\frac{D}{4} = 625 + 4900 - 49 = 5000 + 600 - 100 - 49 + 25 = 5476 =$$

$$= 4 \cdot 1369 = 4 \cdot 37^2$$

$$t_2 = \left(\frac{-99}{49} \right) \div 1 < 0 \Rightarrow \text{не корни}$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow AB = 8x = 8$$

Order: 8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

④ ~~$t = 2 - 7x$~~

~~$\sqrt{(2x-3)(x-1)} - \sqrt{(2x+1)(x+1)} = 2 - 7x$~~

~~$a = 2x - 3$~~

~~$b = x$~~

~~$\sqrt{(a-2)(x-1)} - \sqrt{(a+2)(x+1)} = 2 - 7x$~~

~~$\sqrt{ax - 2x - a + 2} - \sqrt{ax + 2x + a + 2} = 2 - 7x$~~

~~$t = ax + 2$~~

~~$k = 2x + a$~~

~~$k = 2x + 2x - 1 = 4x - 1$~~

~~$2 - 7x = \frac{1}{4} - \frac{7x}{4} = \frac{1 - 7x}{4}$~~

~~$\sqrt{t-k} - \sqrt{t+k} = \frac{1-7k}{4}$~~

~~$t-k - t-k - 2\sqrt{t^2-k^2} = \frac{49k^2 - 14k + 1}{4}$~~

~~$-32k - 32\sqrt{t^2-k^2} = 49k^2 - 14k + 1$~~

~~$49k^2 + 18k + 1 = -32\sqrt{t^2-k^2}$~~

~~$81 - 49 = 32$~~

~~$t = \frac{-9 \pm 4\sqrt{2}}{49}$~~

$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} - 7x + 2 = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$

$a = 2 - 7x$

$b = 2x^2 + 2x + 1$

$\sqrt{b+a} - \sqrt{b} = a. (1)$

$\begin{cases} b \geq 0 \\ b \geq a \end{cases}$

~~$\sqrt{b+a} = a + \sqrt{b} \Rightarrow (b+a) = a^2 + 2a\sqrt{b} + b \Rightarrow a^2 = -2a\sqrt{b}$~~

~~$b+a - 2\sqrt{b^2+ab} = a^2$~~

$D = 4 - 8$

~~$a^2 + a = -2\sqrt{b^2+ab}$~~

$a^2 = 49x^2 - 14x + 4$

$24\frac{1}{2} - 4$

если Эйлера, то либо оба 0, либо $a^2 + a < 0 \Rightarrow (-1; 0)$

~~$a = 0 \Rightarrow -2\sqrt{b^2} = -2|b| = -2b$~~

$a^2 = 49x^2 + 48x + 24 +$

$49 \cdot 14 = 20,5$

~~$\Rightarrow x = \frac{1}{7}, a = -1 - 2\sqrt{b^2+b}$~~

$x^2 + x + \frac{1}{2} - 63x - 20,5$

$2 - 7x = -1$

$b(\frac{3}{4}) = \frac{2 \cdot 9}{49} + \frac{2 \cdot 21}{49} = \frac{18 + 42}{49} = \frac{60}{49}$

$+18 - 18$

$3(a-a^2) = 2\sqrt{b^2+ab}$

$24,5b - 9a - 38,5$

$a^4 - 2a^3 + a^2 = 4b^2 + 4ab$

$-24,5b + 38,5$

$10a$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

