



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{1} \begin{cases} a \cdot b = 2^{15} \cdot 4^{11} \cdot K_1 \\ b \cdot c = 2^{14} \cdot 4^{18} \cdot K_2 \\ a \cdot c = 2^{25} \cdot 4^{39} \cdot K_3 \end{cases} \Rightarrow a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 2^{55} \cdot 4^{68} \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot K_3; \quad a \cdot b \cdot c_{\min} = ?$$

$$\text{т.к. } a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{N} \Rightarrow K_1, K_2, K_3 \in \mathbb{N} \text{ и } a \cdot b \cdot c > 0 \Rightarrow a \cdot b \cdot c \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow a \cdot b \cdot c = \sqrt{2} \cdot 2^{24} \cdot 4^{34} \sqrt{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3} \text{ но } a \cdot b \cdot c \in \mathbb{N} \text{ тогда наименьшее}$$

натуральное значение будет достигаться при $\sqrt{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3} = \sqrt{2}$ (например $K_1=2, K_2=1, K_3=1$) и будет равно $2^{28} \cdot 4^{34}$ Ответ: $2^{28} \cdot 4^{34}$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



② $\max m$?

$$\begin{cases} a+b \equiv 0 \pmod{m} \\ a^2 - 9ab + b^2 \equiv 0 \pmod{m} \end{cases}$$

$$a^2 - 9ab + b^2 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$(a+b)^2 - 9ab \equiv 0 \pmod{m}$$

$$\text{и } a+b \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow -9ab \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9ab : m; \quad 9ab : m; \Rightarrow \begin{cases} 9ab \equiv 0 \pmod{m} \\ a+b \equiv 0 \pmod{m} \end{cases}$$

$$a+b=km; \quad b=km-a; \quad 9a(km-a)=k_1m; \quad 9akm-9a^2=k_1m;$$

$$9a^2-9akm+k_1m=0; \quad D=81k^2m^2-4 \cdot 9 \cdot k_1m=$$

$$= 9m(9k^2m-4k_1); \quad a = \frac{+9km \pm \sqrt{9m(9k^2m-4k_1)}}{18} = \frac{3km \pm \sqrt{m(9k^2m-4k_1)}}{6}$$

$$a, b \in \mathbb{N}; \quad k, k_1 \in \mathbb{N} \text{ так как } a \text{ — натуральное, то } \frac{3km \pm \sqrt{m(9k^2m-4k_1)}}{6} \text{ —}$$

тоже натуральное. так как делители не могут делить m , то

наиболее выгодный вариант достигается при $k=1$ и $k_1=1$

(изначально $a+b=km$ и $a \cdot b=k_1m$, очевидно, что при фиксированных a и b , m — наибольшее при $k_1=1$ и $k=1$) $\Rightarrow a = \frac{3m \pm \sqrt{m(9m-4)}}{6};$

Amberm. 24;

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

④ $\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x;$

$3x^2-6x+2 - 3x^2-3x-1 = 1-9x; \Rightarrow a = \sqrt{3x^2-6x+2}, b = \sqrt{3x^2+3x+1};$

$a-b = a^2-b^2; (a-b) = (a-b)(a+b);$

$\begin{cases} a=b \text{ ①} \\ a+b=1 \text{ ②} \end{cases}$

① $\sqrt{3x^2-6x+2} = \sqrt{3x^2+3x+1}; \uparrow^2$ Проверка: $\sqrt{\frac{1}{24} - \frac{2}{3} + 2} - \sqrt{\frac{1}{24} + \frac{1}{3} + 1} = 0;$
 $3x^2-6x+2 = 3x^2+3x+1;$
 $9x = 1; x = \frac{1}{9}$

$\sqrt{\frac{1}{24} + \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{1}{24} + \frac{4}{3}}$ - истина
 $\Downarrow$
 $x = \frac{1}{9}$ - не подходит

② $\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1 \uparrow^2$

$3x^2-6x+2 + 3x^2+3x+1 + 2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)} = 1;$

$-6x^2+3x-2 = 2\sqrt{(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1)} \uparrow^2$

$(6x^2-3x+2)^2 = 4(3x^2-6x+2)(3x^2+3x+1) \text{ и } -6x^2+3x-2 \geq 0$

~~$36x^4 + 9x^2 + 4 - 2 \cdot 6x^2 \cdot 3x - 2 \cdot 3x^2 \cdot 2 + 6x^2 \cdot 2 \cdot 2 = 36x^4 + 36x^3 + 12x^2 - 42x^3 - 42x^2 - 24x + 24x^2 + 24x + 24 \cdot 8$~~
 ~~$9x^2 + 4 - 12x = 12x^2 - 42x^3 - 42x^2 + 8$~~
 ~~$42x^3 + 69x^2 - 12x - 4 = 0$~~

$-6x^2+3x-2: D=9-4 \cdot 2 \cdot 6=9-48=-...; \text{ корни虚数} \Rightarrow$

$\Rightarrow -6x^2+3x-2 < 0 \text{ всегда} \Rightarrow \text{ этот случай не даст решений.}$

Ответ: $\frac{1}{9};$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

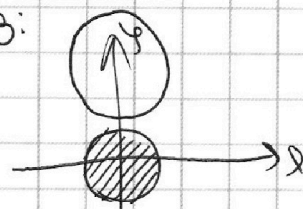
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\textcircled{6} \begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

I) или $\begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 & \text{— окружность с ц. } (0;0), R=1 \\ x^2+(y-12)^2 \geq 16 & \text{— окружность с ц. } (0;12), R=4 \\ ax+y-8b=0 & \text{— прямая} \end{cases}$

Эскиз:



$\begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ ax+y-8b=0 \end{cases}$ либо 0 реш, либо бесконечность реш, либо 1 реш.

$0 = ax+y-8b - \cos \varphi \cdot x^2+y^2=1;$

$\hookrightarrow ax+y-8b=0$ — касательная к дуге окружности.

$\nearrow y = -ax+8b; \quad -ax+8b = \sqrt{1-x^2}$

II) или аналогично:

$\begin{cases} x^2+(y-12)^2 \geq 16 \\ ax+y-8b=0 \end{cases}$
 $ax+y-8b=0$ — кас. к $x^2+(y-12)^2=16;$

1) $64b^2+a^2x^2-2ax \cdot 8b=1-x^2;$

$(a^2+1)x^2+64b^2-16abx-1=0;$

$D=256a^2b^2-4(64b^2-1)(a^2+1);$

1 реш $\Rightarrow D=0;$

$256a^2b^2=256a^2b^2+256b^2-a^2-1$

$256b^2=a^2+1$

2) $-ax+8b = \sqrt{16-x^2}+12;$

$64b^2+a^2x^2-2ax \cdot 8b = (-ax+8b-12)^2 = 16-x^2; \quad a^2x^2+64b^2+144-$

$-2ax \cdot 8b - 2 \cdot 12 \cdot 8b + 2ax \cdot 12 = 16-x^2; \quad a^2x^2+64b^2+144-16abx-192b+24ax$
 $=16-x^2; \quad D=0; \quad \textcircled{*} \rightarrow$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a+b=km; a^2+b^2+2ab=k^2m^2; a^2+b^2=k^2m^2-2ab;$$

$$a^2-2ab+b^2=k_1m$$

$$k^2m^2-2ab-2ab=k_1m;$$

$$(a+b)^2-4ab=k_1m$$

$$k^2m^2-4ab=k_1m;$$

$$(km)^2-4ab=k_1m;$$

$$km^2-k_1m-4ab=0;$$

$$D=k_1^2+4 \cdot 4ab \cdot k$$

$$m = \frac{k_1 \pm \sqrt{k_1^2 + 36abk}}{2k}$$

$$m = \frac{k_1 + \sqrt{k_1^2 + 36k_2}}{2k_3}$$

$$\left(\frac{k_1 + (k_1^2 + 36k_2)^{\frac{1}{2}}}{2k_3} \right) \cdot k_3 =$$

$$mk_3 = k_1 + \sqrt{k_1^2 + 36k_2}$$

$$(mk_3 - k_1)^2 = k_1^2 + 36k_2$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 4\left(\frac{a}{b}\right) + 1$$

$$a \neq b \quad g - g = -g \cdot \frac{1}{b}$$

$$m = \gcd(a+b, a^2 - ab + b^2)$$

$$\gcd \left(\frac{a+b}{m} \right)$$

$$x^2 + (y^2 - 12)^2 - 16 \geq 0$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 16 \\ \hline 12 \\ 192 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

①

$$\begin{cases} a \cdot b = 2^{15} \cdot 4^{11} \cdot K_1 \\ b \cdot c = 2^{14} \cdot 4^{18} \cdot K_2 \\ a \cdot c = 2^{23} \cdot 4^{39} \cdot K_3 \end{cases} \quad \begin{cases} a \cdot b = 2^{15} \cdot 4^{11} \cdot K_1 \\ \frac{a}{b} = 2^6 \cdot 2^{21} \cdot \frac{K_3}{K_2} \\ a \cdot c = 2^{23} \cdot 4^{39} \cdot K_3 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 = 2^{21} \cdot 4^{32} \cdot \frac{K_1 K_3}{K_2} \\ \dots \end{cases}$$
$$\begin{cases} a = 2^{10} \cdot 4^{16} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{K_1 \cdot K_3}{K_2} \\ b = \frac{2^{15} \cdot 4^{11} \cdot K_1 \cdot K_2}{2^{10} \cdot 4^{16} \cdot \sqrt{2} \cdot K_3 \cdot K_1} \\ c = \frac{2^{23} \cdot 4^{39} \cdot K_3 \cdot K_2}{2^{10} \cdot 4^{16} \cdot \sqrt{2} \cdot K_1 \cdot K_3} \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2^{10} \cdot 4^{16} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{K_1 \cdot K_3}{K_2} \\ b = \frac{2^5}{4^5} \end{cases}$$



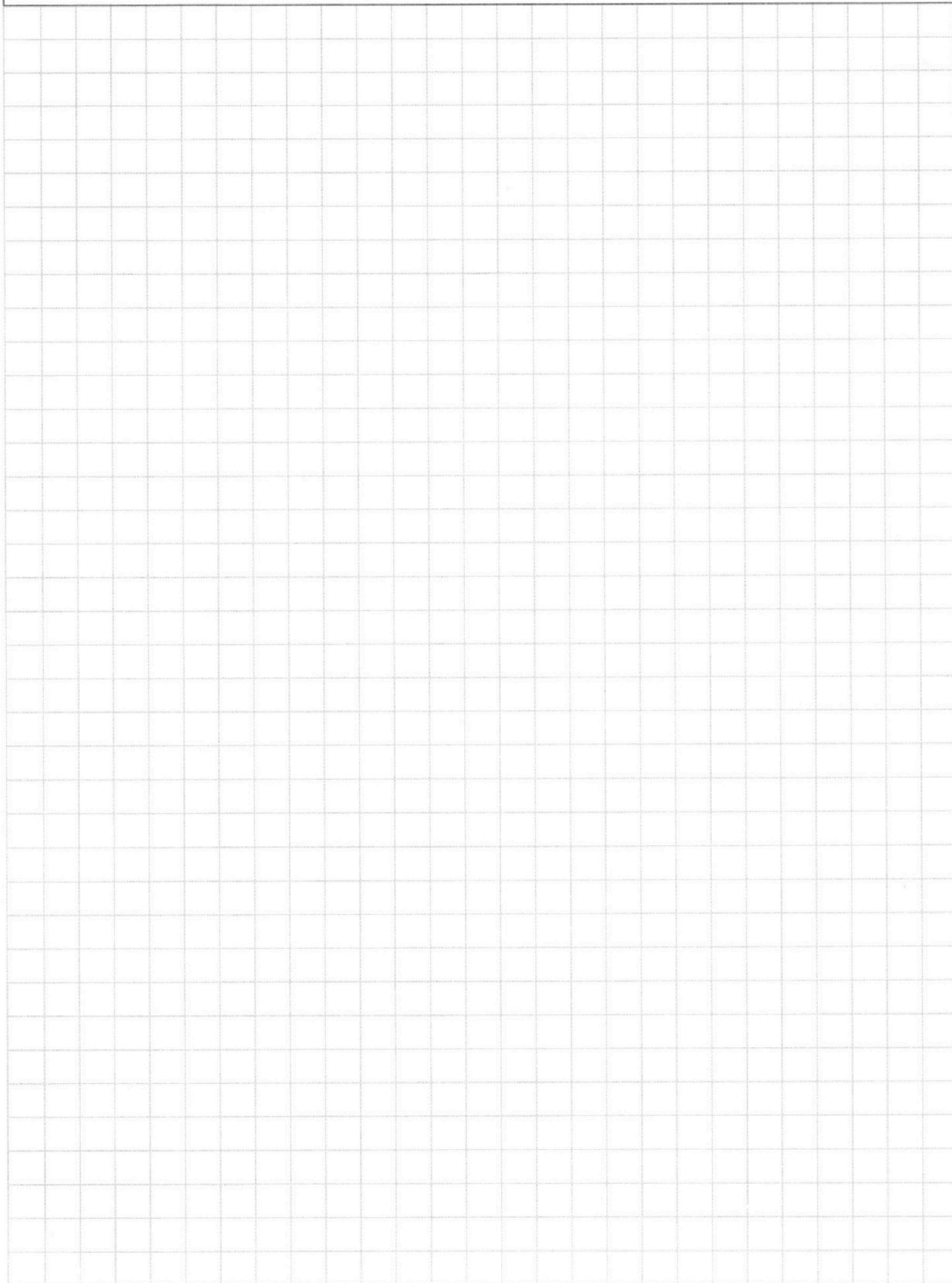
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



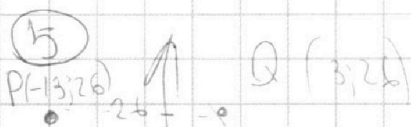
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ 58 \\ \hline 84 \end{array}$$

$$2\Delta x + \Delta y = 14$$

$$\begin{array}{r} 58 \\ 14 \\ \hline 72 \end{array}$$

$$\Delta y = 14 - 58 = -44$$

$$\Delta y \leq 26$$

$$58$$

$$14 - \Delta y \leq 58$$

$$\Delta x \leq 29$$

$$\Delta y \leq \Delta y \geq -44$$

$$2\Delta x \leq 58$$

$$-\Delta y \leq 44$$

$$2\Delta x + \Delta y \leq 84$$

$$14 - 2\Delta x \leq 26$$

$$4 - \Delta x \leq 13$$

$$\Delta x \geq -6$$

$$x_2 - x_1 \geq -6$$

$$x_1 - x_2 \leq 6$$

$$x_1 - x_2 \leq 6; 2(x_1 - x_2) \leq 12$$

$$14 - y_1 - y_2 \leq 12; y_1 - y_2 \leq -2; y_2 - y_1 \geq 2$$

$$-26 \leq 14 - 2(x_2 - x_1) \leq 26$$

$$-20 \leq x_1 - x_2 \leq 20$$

$$-40 \leq -2(x_2 - x_1) \leq 12$$

$$-26 \leq y_1 - y_2 \leq 26$$

$$-40 \leq 2(x_1 - x_2) \leq 12$$

$$-20 \leq x_1 - x_2 \leq 6$$

$$-20 \leq \frac{(y_2 - y_1 - 14)}{2} \leq 6; -40 \leq y_2 - y_1 - 14 \leq 12$$

$$\begin{cases} \Delta y \leq 26 \\ \Delta x \leq 29 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 26 \leq 14 - 2\Delta x \leq 26 \\ 29 \leq \Delta x \leq 29 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -20 \leq -\Delta x \leq 6 \\ -29 \leq \Delta x \leq 29 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 \leq \Delta x \leq 20 \\ -29 \leq \Delta x \leq 29 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 26 \leq y_2 - y_1 \leq 26 \\ -29 \leq \Delta x \leq 29 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 26 \leq \Delta y \leq 26 \\ 6 \leq \Delta x \leq 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\Delta x + \Delta y = 14 \\ \Delta x = \frac{14 - \Delta y}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 6 \leq \frac{14 - \Delta y}{2} \leq 20; 12 \leq 14 - \Delta y \leq 40; -28 \leq \Delta y \leq 2$$

$$-2 \leq -\Delta y \leq 26; 26 \leq \Delta y \leq 2$$

~~20x~~

$$-26 \leq 14 - 2\Delta x \leq 2; -40 \leq -2\Delta x \leq -12; 12 \leq 2\Delta x \leq 40; 6 \leq \Delta x \leq 20$$

$$\begin{cases} 6 \leq \Delta x \leq 20 \\ -2 \leq \Delta y \leq 26 \end{cases}$$

$$2\Delta x + \Delta y = 14$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) $a \cdot b = 2^{15} \cdot 4^{11} \cdot K_1$ $a \cdot b = 2^{15} \cdot 4^{11} \cdot K_1$ $a \cdot b = 2^{15} \cdot 4^{11} \cdot K_1$
 $b \cdot c = 2^{17} \cdot 4^{18} \cdot K_2$ $\frac{b}{a} = \frac{1}{2^{26} \cdot 4^{21}} \cdot K_4$ $\frac{a}{b} = 2^{26} \cdot 4^{21} \cdot K_4$
 $a \cdot c = 2^{23} \cdot 4^{39} \cdot K_3$
 $a^2 = 2^{21} \cdot 4^{32} \cdot K_5$ $a = 4^6 \cdot 2^{10} \sqrt{2} \cdot K_5$

14) $D_1 = 36 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ $1 - 9x$
 $D_2 =$
 $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 1 - 9x$ $3x^2 - 6x + 2 - 3x^2 - 3x - 1 =$
 $a^2 - b^2 = 1 - 9x$ $= -9x + 1 = 1 - 9x$
 $a^2 - b^2 = a - b; (a-b)(a+b) = (a-b)$
 $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a-b}$ $\begin{cases} a=b \\ a+b=1 \end{cases}$ $\begin{array}{r} 105 \ 15 \\ \times 21 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 14 \\ \times 24 \\ \hline 56 \\ \times 28 \\ \hline 396 \end{array}$ $\begin{array}{r} 289 \\ \times 26 \\ \hline 315 \end{array}$

2) m -max? $\gcd(a, b) = 1; \gcd(a+b, a^2 - 4ab + b^2) =$
 $b^2(a+b) = 0 \pmod{m};$
 $(a^2 - 4ab + b^2) = 0 \pmod{m}$
 $(a-b)^2(a+b) - 9ab \pmod{m}$
 $\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 4\left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 0 \pmod{m};$
 $\frac{a}{b}$ $\begin{array}{r} 14 \\ \times 12 \\ \hline 112 \\ \times 119 \\ \hline 289 \end{array}$
 $-9ab \pmod{m};$
 $\frac{m_{\max} = 9ab}{9ab \pmod{m}}$ $\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ \times 48 \\ \hline 546 \end{array}$ $\begin{array}{r} 49 \\ \times 26 \\ \hline 23 \\ \times 289 \\ \hline 23 \\ \times 312 \end{array}$
 $-\frac{9a}{b} \pmod{m}$

2) $AB = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$
 $O, A = \sqrt{(4x)^2 + 4^2} = \sqrt{16x^2 + 16}$
 $(14x)^2 = y \cdot (y+14)$
 $(4x)^2 = (y+4)^2 - 49$
 $(y+4)^2 - 49 = y^2 + 14y$ $\frac{26}{26}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☒	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~6~~ ~~5~~

6)
$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0; \end{cases}$$

I cu)
$$\begin{cases} (x-0)^2+(y-12)^2 \leq 16 \quad (1) \\ x^2+y^2 \leq 1 \quad (2) \\ ax+y-8b=0 \end{cases} \quad \text{эскиз:}$$

(1) и (2) - не пересекаются $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ нет решений

II cu)
$$\begin{cases} (x-0)^2+(y-12)^2 \geq 16 \\ x^2+y^2 \geq 1 \\ ax+y-8b=0 \end{cases}$$

$y=8b-ax$; $y=-ax+8b$; -наклон.
прямая

