



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) если у a, b и c есть общий делитель q , то для $\frac{a}{q} < a$ так же справедливы
($2a, 4a$)

и утверждения (по ОТА). Тогда можно считать, что кроме 2 и 7 прост. дел у
 a, b и c нет.

2) пусть степени вхождения двоек: $d_a, d_b, d_c \in \mathbb{N}$ для a, b, c соотв.
семерки — s_a, s_b, s_c

$$\begin{cases} d_a + d_b \geq 14 \\ d_b + d_c \geq 17 \\ d_a + d_c \geq 20 \end{cases} \Rightarrow d_a + d_b + d_c \geq \frac{14 + 17 + 20}{2} = 25,5 \Leftrightarrow d_a + d_b + d_c \geq 26$$

пример для $d_a + d_b + d_c = 26$:

$$\begin{cases} d_a = 9 \\ d_b = 6 \\ d_c = 11 \end{cases}$$

3) $s_a + s_b + s_c \geq s_a + s_c = 37$

пример для $s_a + s_b + s_c = 37$:

$$\begin{cases} s_a = 20 \\ s_b = 17 \\ s_c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_a + s_b \geq 10 \\ s_b + s_c \geq 17 \\ s_a + s_c \geq 37 \end{cases}$$

таким образом, $\min abc = 2^{d_a + d_b + d_c} \cdot 7^{s_a + s_b + s_c} = 2^{26} \cdot 7^{37}$

где $a = 2^9 \cdot 7^{20}$

$b = 2^6 \cdot 7^{17}$

$c = 2^{11} \cdot 7^{17}$

Ответ: $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab} \xrightarrow[\text{несокр.}]{\text{сокращ. на } a+b} \frac{(a+b)^2-8ab}{a+b} \xrightarrow[\text{несокр.}]{\text{сокращ. на } a+b} (=)$$

$$(\Rightarrow) a+b = \frac{8ab}{a+b} \quad (\Rightarrow) \frac{8ab}{a+b} \xrightarrow[\text{несокр.}]{\text{сокращ. на } a+b}$$

↑
несокр. *

$$* \cdot \left. \begin{matrix} (a+b):m \\ 8ab:m \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} (a+b)^2:m \\ 8ab:m \end{cases} \Rightarrow (a+b)^2-8ab:m.$$

т.е. $\begin{cases} (a, a+b) > 1 & \text{I} \\ (b, a+b) > 1 & \text{II} \\ (8, a+b) > 1 & \text{III} \end{cases}$

~~или~~ I, II невозм. т.к. в ~~этих~~ ^{этих} случаях $(a, b) > 1$, что не м. быть

$$\left\{ \begin{matrix} (8, a+b) > 1 \\ (a, a+b) = 1 \\ (b, a+b) = 1 \end{matrix} \right\} \quad m = (8, a+b) > 1 \text{ т.е. } m \leq 8.$$

Пример для $m=8$: $a=7, b=1$

$$\frac{\overbrace{7+1}^{=8}}{49-6 \cdot 7+1} = \frac{8}{8} = 1 (\text{сокращ. на } 8).$$

42
"8"

Ответ: $m=8$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\underbrace{\sqrt{2x^2 - 5x + 3}}_{t+q} - \underbrace{\sqrt{2x^2 + 2x + 1}}_t = \underbrace{2 - 7x}_q \Leftrightarrow \sqrt{t+q} - \sqrt{t} = q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2t + q - \sqrt{t(t+q)} = q^2 \quad q = q \cdot (\sqrt{t+q} + \sqrt{t}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q=0 \\ \sqrt{t+q} + \sqrt{t} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} q=0 \\ t=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow q=0 \Leftrightarrow 7x=2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{7}$$

$$/ \quad \underbrace{\sqrt{t+q}}_0 + \underbrace{\sqrt{t}}_0 = 0 \quad / \quad t \geq 0, \text{ тогда } q \geq 0, \text{ т.е. } \sqrt{t+q} + \sqrt{t} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{t+q} = -\sqrt{t} = 0 \Leftrightarrow t=q=0 /$$

Ответ: $x = \frac{2}{7}$



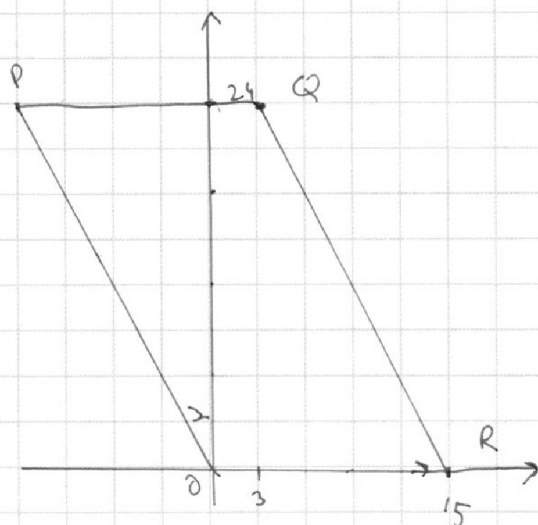
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



таких точек достаточно много.

~~таких~~

$\{x_2, y_2\}$ имеют вид

$x_1 + a, y_1 + b$, где $a, b \in \mathbb{Z}$

$$2a + b = 12.$$

$$|a| \leq 27$$

$$|b| \leq 24.$$

$\forall (x_0, y_0); x \exists y$

тогда (x, y) такая, что

$$\exists a, b: x = x_0 + a$$

$$y = y_0 + b$$

$$2a + b = 12, a, b \in \mathbb{Z}$$



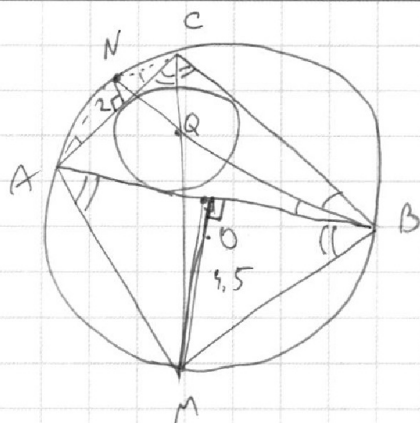
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$AQ = ?$

MC - диаметр, т.е. проходит через Q.
аналогично BN
перп. к M проходит через сев. AB, т.е.
прох. через O



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

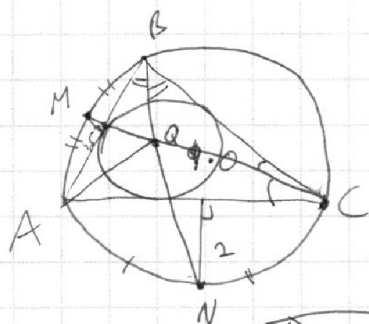
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

черновик

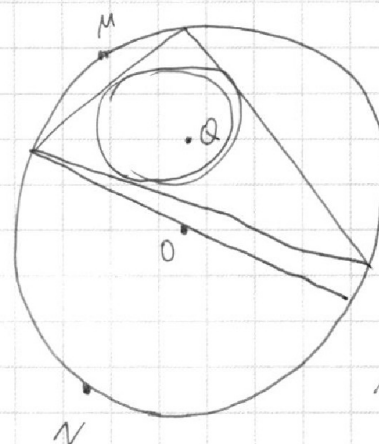
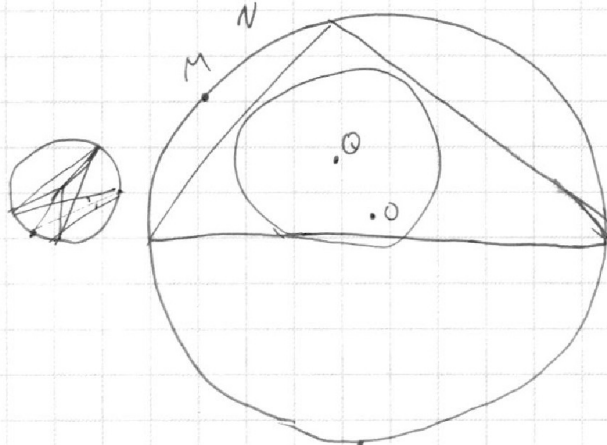
6.

~~ax-y нол~~

$AQ = ?$

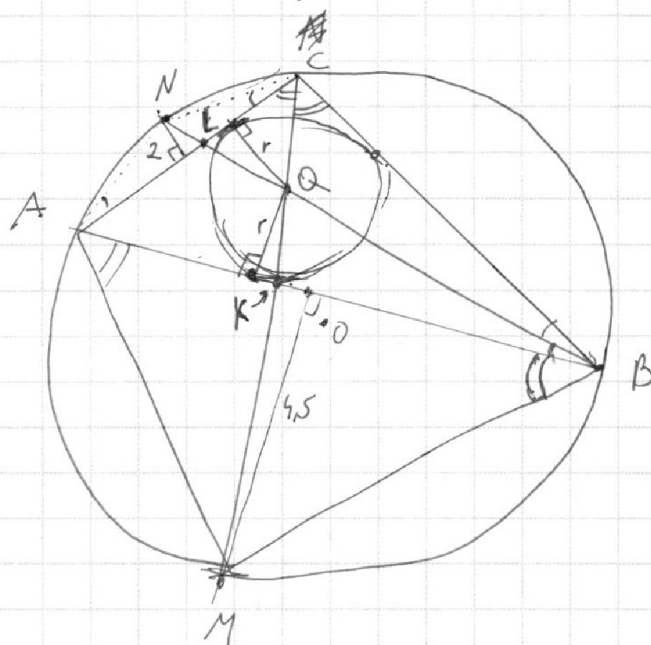


MC - диаметр, значит содержит Q.
(необяз. соед. O)



$AQ = ?$

$$\frac{2}{LQ} \cdot \frac{2}{r} = \frac{LN}{LQ}$$



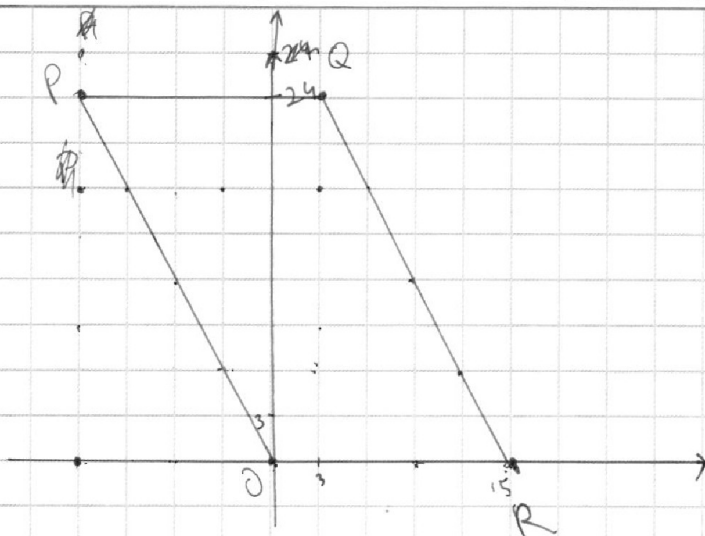
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x_0, y_0 \quad 12, 39 - \checkmark$$

$$x_0 + a, y_0 + b$$

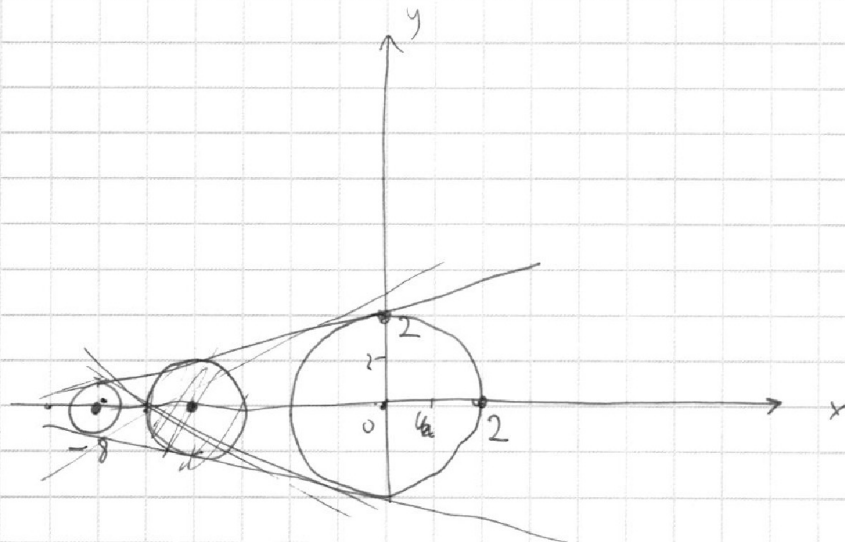
$$|a| \leq 27$$

$$|b| \leq 24$$

$$2a + b = 12$$

$$x_0, y_0$$

$$x_1 \rightarrow a \rightarrow b$$



А - прямая
Б - быт при одного
по структуре 2-х
группы.
если 2 точки
прям. 1 кругу,
то

А - прямая
Б - 2 круга
(не пересекающиеся)

если 2 ~~точки~~ прям-я $\in$ 1 кругу, то найдется такая точка,

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

ког. как те лежат в кругу и $\in$ той же прямой

тогда 1 прям-я $\rightarrow$ в кругу
2 $\rightarrow$ в 0-м.

т.е. касательная



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Чер

$$y = ax + 10b$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + a^2 x^2 + 20abx + 100b^2 = 4 \end{cases}$$

tg α. $8 - \frac{8}{3} + \frac{29-8}{3} = \frac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



черновик

ми

$$ab : 2^{14} 7^{10}$$

$$bc : 2^{17} 7^{17}$$

$$ac : 2^{20} 7^{37}$$

2) сеп. вложения двойки: $d_a, d_b, d_c \in \mathbb{N}$
7 : s_a, s_b, s_c

$$d_a + d_b \geq 14$$

$$d_b + d_c \geq 17$$

$$d_a + d_c \geq 20$$

$$s_a + s_b \geq 10$$

$$s_b + s_c \geq 17$$

$$s_a + s_c \geq 37$$

1) если a есть n раз делитель q , тогда $\frac{a}{q}$ тоже
составительного ОТА.

тогда можно считать, что $a, b, c : 2^x$ и 7^y и только,
группировка дел. на 2.

$$d_a + d_b + d_c \geq ?$$

$$s_a + s_b + s_c \geq ?$$

$$3) d_a + d_b + d_c \geq \frac{14 + 17 + 20}{2} = \frac{51}{2} = 25,5$$

$$s_a + s_b + s_c \geq \frac{10 + 17 + 37}{2} = \frac{64}{2} = 32$$

с. бх 7 вавс

$$abc : 2^{26} 7^{32}$$

$$d_a + d_b + d_c \geq 26$$

с. бх 2 вавс

пример:

$$d_a = x$$

$$d_b = 14 - x$$

$$d_c = 17 - (14 - x) = 3 + x$$

$$d_a + d_b = 24$$

$$x + 3 + x = 24$$

$$2x = 21$$

$$x, 15 - x, 2 + x$$

$$2x + 2 = 20$$

$$d_a = x = 9$$

$$d_b = 15 - x = 6$$

$$d_c = 20 - 9 = 11$$

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ y + z = 17 \\ x + z = 37 \end{cases}$$

$$x + y = 10$$

$$y + z = 17$$

$$17 - z + 37 - z = 10$$

$$44 = 2z$$

$$z = 22$$

$$x = \dots$$

$$y = \dots$$

$$x + y = 10$$

$$x + 10 - x = 17$$

$$17 - x$$

$$x + y = 15$$

$$y + z = 17$$

$$x + z = 20$$

$$15 - x + 20 - x = 17$$

$$\begin{cases} x = 9 \\ y = 6 \\ z = 11 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☒	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2.

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-8ab}$$

нескор.

$$(2t+q-q)^2 = t(t+q)$$

$$(7x^2-16)^2 = 25-16x^2$$

$$\frac{(a+b)^2-8ab}{a+b}$$

нескор. (=)

$$49t^2-14 \cdot 16t+16^2=25-16t$$

$$q = q \cdot (\sqrt{t+q} + \sqrt{t})$$

$$(\Rightarrow) a+b - \left(\frac{8ab}{a+b} \right) - a-b = (a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})$$

~~16 \cdot 16 = 256~~

$$49t^2 - 13 \cdot 16t = 25 - 256 = -231$$

$$49t^2 - 13 \cdot 16t + 231 = 0$$

$$t = \frac{13 \cdot 16 \pm \sqrt{(13 \cdot 16)^2 - 4 \cdot 49 \cdot 231}}{2 \cdot 49}$$

нескор.

$$\begin{aligned} (a+b):m &\Rightarrow (a+b)^2:m \\ 8ab:m & \\ \Rightarrow (a+b)^2-8ab:m \end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{t-7x+2}{q}} - \sqrt{t} = \frac{2-7x}{q}$$

т.е. либо $(a, a+b) > 1$ А

$(b, a+b) > 1$ Б

$(8, a+b) > 1$ В

$$\frac{8}{49+1-6 \cdot 7} = \frac{8}{50-42} = \frac{8}{8} = 1$$

$$\sqrt{t+q} - \sqrt{t} = q$$

$$2t+q-\sqrt{t(t+q)} = q^2$$

$$4t^2 = t(q+t)$$

$$3t = tq$$

$$t=0$$

$$[3t=q] (=)$$

$[A \wedge B] (=) \emptyset$, т.к. ни одно $a, b > 1$.

$$m = (8, a+b) > 1 \quad // m \leq 8 //$$

$a+b : 2$ или 4 или 8 .

тогда например $a=7$

$$a=7, b=1$$

$$b=1, a+b=8$$

работает.

$$\frac{81-8 \cdot 8}{64} = \frac{9}{16}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☒	☐	☒	☐	☒

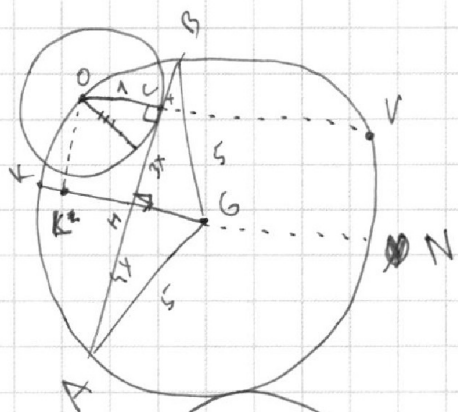
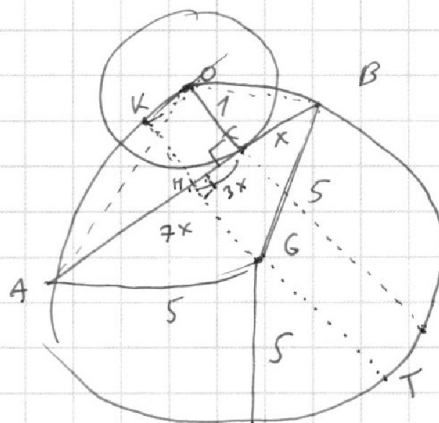
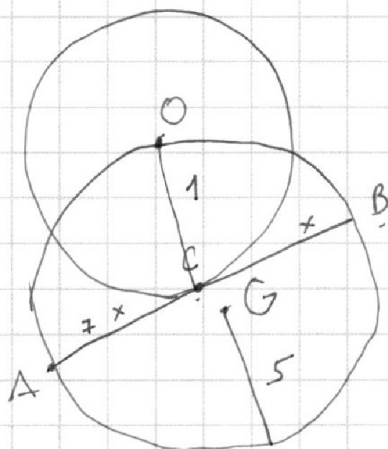
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$OC \cdot CV = AC \cdot CB$$

$$8x = ?$$

$$\begin{aligned} & \cancel{OC \cdot CV} \cdot 1 \cdot (16 + \sqrt{25 - 16x^2}) = \\ & = 7x \cdot x \end{aligned}$$



$$AO = \sqrt{1 + 49x^2} \quad OB = \sqrt{1 + x^2}$$

$$GBF \quad BM \perp AN \quad BH = AN = 4x$$

$$GM = \sqrt{25 - 16x^2}$$

$$MK = 5 - \sqrt{25 - 16x^2}$$

$$\tan \angle = \frac{3x}{MK - OC} = \frac{3x}{4 - \sqrt{25 - 16x^2}}$$

~~GA~~

$$KI \cdot IT = AI \cdot IB = 16x^2$$

$$(5 - \sqrt{25 - 16x^2}) (\sqrt{25 - 16x^2} + 5)$$

$$KI = 5 - \sqrt{25 - 16x^2}$$

$$KL = KI - 1 = 4 - \sqrt{25 - 16x^2}$$

$$OV = 25 - 2 \cdot KL = 25 - 8 + \sqrt{25 - 16x^2} = 17 + \sqrt{25 - 16x^2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1

$$12s_b + s_a + s_c \geq 37 + 12s_b$$

$$s_a + s_c \geq 37$$

$$s_a + s_b + s_c \text{ min.}$$

$$s_a + s_b + s_c + s_c \geq 37 + 2s_b$$

$$10 + 17 \geq 10$$

$$s_a = 15$$

$$s_c = 22$$

$$s_b = -5$$

$$\underbrace{s_a + s_c}_{\substack{\vee \\ 37}} + \underbrace{s_b}_{\substack{\vee \\ 0}} \geq 37$$

$$\begin{cases} s_a = 20 \\ s_c = 17 \\ s_b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_a + s_c \geq 15 \\ s_b + s_c \geq 17 \end{cases}$$

$$s_a + s_c = 37$$

$$(37 - s_a) + s_b \geq 17$$

$$(37 - s_c) + s_b \geq 10$$

$$\begin{cases} s_a - s_b \leq 20 \\ s_c - s_b \leq 17 \end{cases}$$

$$37 + 2s_b \geq 37$$

$$2^9 \cdot 7^{20}$$

$$2^6 \cdot 7^{17}$$

$$2^{11} \cdot 7^1$$

Ответ:

$$abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☒	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



15.

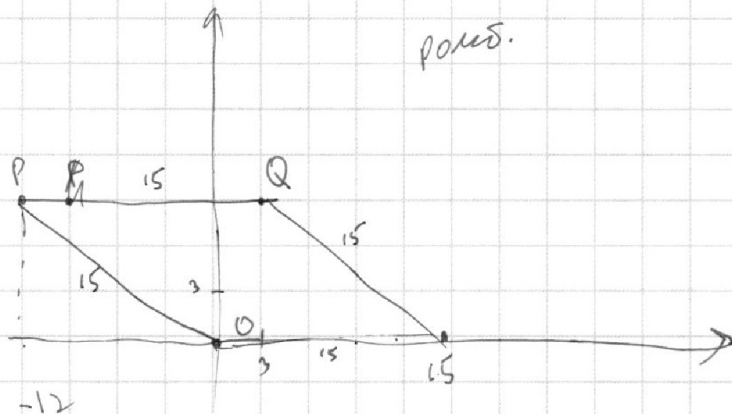
$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

ка обогреть

$$2x_2 + y_2 = 12 + (2x_1 + y_1)$$

$$\frac{2(x_2 - x_1)}{y_1 - y_2 + 12} = 1$$

ромб.



$2x_2 \rightarrow$

$$2x_2 - 2x_0 + y - y_0 = 12$$

$$2x + y = 12 + 2x_0 + y_0 =$$

$$= 2(x_0 + 4) + (y_0 + 4)$$

$$2(x+a) + (y+b)$$

мож. x_2, y_2 заменить как $x_1 + a, y_1 + b$,

где $a, b \in \mathbb{Z}$ и $a + b = 12$

при этом $x_1, y_1, 0 \leq y_1, y_2 \leq 9$

$$-12 \leq x_1, x_2 \leq 15$$

$$2(x+1) + y$$

$$2x + (y+12)$$

$$2(x+1) + (y+10)$$

$$2(x+2) + (y+8)$$

$$2(x+3) + (y+6)$$

$$2(x+4) + (y+4)$$

$$2(x+5) + (y+2)$$

$$2(x+6) + y$$

$$a, b \in \mathbb{Z}, a + b = 12.$$

$$a \neq 0, b \neq 6$$

$$a \neq 12, b \neq 0$$

$$a \neq 9, b \neq 3$$

$$a \neq 6, b \neq 6$$

$$a \neq 3, b \neq 9$$

$$a \neq 0, b \neq 12$$

$$-9 \leq b \leq 9$$

$$-27 \leq a \leq 27$$

$$\begin{array}{l} y \xrightarrow{+12-2a} y+12-2a \\ x \xrightarrow{+a} x+a \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

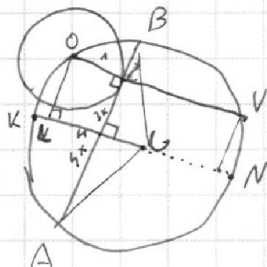
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1, 2, 3, 4.

3



$$OV = d - 2 \cdot \underbrace{(KN - 1)}_{KL} = 28 - 2 \cdot (4 - \sqrt{25 - 16x^2})$$

$$OV = 2 + 2\sqrt{25 - 16x^2}$$

$$(t-1)(49t+99)$$

$$OC \cdot CV = AC \cdot CB = 7x^2$$

$$1 \cdot (1 + 2\sqrt{25 - 16x^2}) = 7x^2$$

$$OV - OC = OV - 1$$

$$t = x^2$$

$$7x^2 + 1 = 2 \cdot \sqrt{25 - 16x^2} \Leftrightarrow (7t+1)^2 = 4 \cdot (25 - 16t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 49t^2 + 14t + 1 = 100 - 64t \Leftrightarrow 49t^2 + 78t - 99 = 0$$

$$t = \frac{-78 \pm \sqrt{78^2 + 4 \cdot 99 \cdot 49}}{98} \quad (t \geq 0)$$

$$x = \sqrt{\frac{-78 + \sqrt{78^2 + 19904}}{98}}$$

Геомер

$$\begin{array}{r} 56 \\ 78 \\ \times 78 \\ \hline 624 \\ 546 \\ \hline 6084 \end{array}$$

$$\frac{78}{49} \quad \frac{99}{49}$$

$$4 \cdot 99 = 36 \cdot 11 = 396$$

$$\begin{array}{r} 396 \\ 49 \\ \hline 3564 \\ 1584 \\ \hline 19404 \end{array}$$

$$25 \ 488$$