



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N1

$$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac: 2^{23} \cdot 7^{29}$$

$$a = 2^{a_1} \cdot 7^{a_2}$$

$$b = 2^{b_1} \cdot 7^{b_2}$$

$$c = 2^{c_1} \cdot 7^{c_2}$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 28$$

$$(abc)^2: (2^{11} \cdot 7^{18} \cdot 7^{29}) \rightarrow (abc)^2: 7^{68} \Rightarrow abc: 7^{34}, \text{ но } ac: 7^{29}$$

$$\text{Тогда } abc: 7^{39}$$

$$a_2 + b_2 + c_2 \geq 39$$

$$abc = 2^{a_1 + b_1 + c_1} \cdot 7^{a_2 + b_2 + c_2} = 2^{28} \cdot 7^{39} - \text{минимально возможное значение.}$$

$$\text{Пример: } a = 2^{10} \cdot 7^{16}$$

$$b = 2^5 \cdot 7^1$$

$$c = 2^{13} \cdot 7^{23}$$

$$\text{Ответ: } 2^{28} \cdot 7^{39}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2}$

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} = \frac{ab}{a^2+ab+b^2-ab} = \frac{ab}{(a+b)^2-ab}$$

$$(1) \frac{ab}{a+b} \notin \mathbb{Z}, \text{ } a, b - \text{взаимно простые}$$

$$a = k \cdot n, \text{ } k - \text{простое}$$

$$\begin{cases} ab : k \\ a : k \\ b : k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab : k \\ a : k \\ b : k \end{cases} - \text{и так для любого простого } k$$

Получается что ~~ab~~ ab и a+b взаимно просты, $ab \neq 1, a+b \neq 1$

$\frac{a}{b}$ - несократимая дроби $\Leftrightarrow a, b$ - взаимно просты

$$\frac{a+b}{(a+b)^2-ab} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{ab}{(a+b)^2-ab} : ab \Leftrightarrow \frac{ab}{(a+b)^2-ab} : ab \Leftrightarrow g : ab$$

Если взять за $m = ab$, то это макс. число на которое можно сократить дроби т.к. в числителе остается 1.

$$\begin{cases} g : m \\ m - \text{макс.} \end{cases} \rightarrow m = g$$

Пример: $a=4, b=5$

Ответ: 9

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

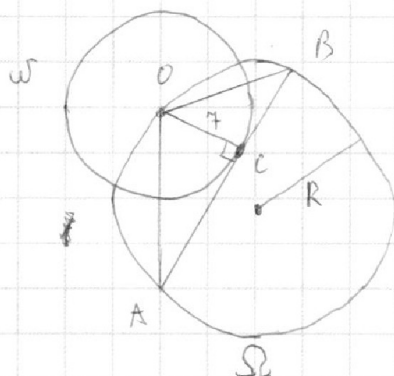
1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N3



$$OC = 2$$

$R = 13$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{17}{4}$$

$OC \perp AB$ т.к. AB - касат. W

$$\begin{cases} \frac{AC}{BC} = \frac{17}{9} \\ AC + BC = AD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AC = \frac{17}{24} AB \\ BC = \frac{9}{24} AB \end{cases}$$

ΔAOB вписан в Ω . Площадь ΔAOB $S = \frac{AO \cdot BO \cdot \sin \angle AOB}{2}$

$$AO = \sqrt{7^2 + AC^2} = \sqrt{49 + \frac{17^2}{24^2} AB^2}$$

$$BO = \sqrt{7^2 + BC^2} = \sqrt{49 + \frac{4^2}{242} AB^2}$$

$$S = \frac{OC \cdot AB}{2} = \frac{7 \cdot AB}{2}$$

$$\frac{AB \cdot AO \cdot BO}{4R} = S = \frac{4AB}{2} \hookrightarrow AO \cdot BO = 4R \hookrightarrow \sqrt{49 + \frac{13^2}{24}} AB^2 \sqrt{49 + \frac{4^2}{24}} AB^2 = 14 \cdot 13 \hookrightarrow$$

$$\hookrightarrow AB = 24$$

Ответ: 24

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4

$$\begin{aligned} \sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} &= 1-9x \Leftrightarrow (\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1})(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1}) = \\ &= (1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1}) \Leftrightarrow (3x^2-6x+2) - (3x^2+3x+1) = (1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1}) \\ \Leftrightarrow 1-9x &= (1-9x)(\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ \sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

При $x = \frac{1}{9}$ $\begin{cases} 3x^2-6x+2 \geq 0 \\ 3x^2+3x+1 \geq 0 \end{cases}$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^2-6x+2} \leq 1 \\ \sqrt{3x^2+3x+1} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-6x+2 \leq 1 \\ 3x^2+3x+1 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-6x+1 \leq 0 \\ 3x^2+3x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - \frac{3-\sqrt{6}}{3})(x - \frac{3+\sqrt{6}}{3}) \leq 0 \\ x(x+1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [\frac{3-\sqrt{6}}{3}, \frac{3+\sqrt{6}}{3}] \\ x \in [-1, 0] \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1 \Rightarrow x \in \emptyset$$

Ответ: $\{\frac{1}{9}\}$

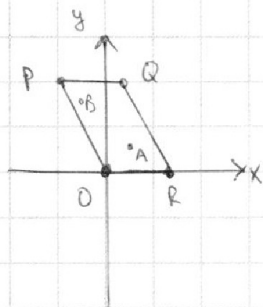
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$O(0,0)$
 $P(-13, 26)$
 $Q(3, 26)$
 $R(16, 0)$
 $A(x_1, y_1)$
 $B(x_2, y_2)$

$$A, B \in \text{PQRQ} \Rightarrow 0 \leq y_1, y_2 \leq 26$$

$$PO: y = -2x$$

$$QR: y = -2x + 32$$

$$A, B \in \text{PQRQ} \Rightarrow \begin{cases} y_2 \leq -2x_2 + 32 \\ y_1 \leq -2x_1 + 32 \\ y_1 \geq -2x_1 \\ y_2 \geq -2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_2 \leq y_2 \leq -2x_2 + 32 \\ -2x_1 \leq y_1 \leq -2x_1 + 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y_2 + 2x_2 \leq 32 \\ 0 \leq y_1 + 2x_1 \leq 32 \end{cases}$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14 \Leftrightarrow 2x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + y_1$$

$$0 \leq y_2 + 2x_2 \leq 32 \Leftrightarrow 0 \leq y_1 + 2x_1 + 14 \leq 32 \Leftrightarrow -14 \leq y_1 + 2x_1 \leq 18$$

$$0 \leq y_1 + 2x_1 \leq 32 \Leftrightarrow 0 \leq y_2 + 2x_2 - 14 \leq 32 \Leftrightarrow 14 \leq y_2 + 2x_2 \leq 46$$

$$\begin{cases} 0 \leq y_1 + 2x_1 \leq 32 \\ -14 \leq y_1 + 2x_1 \leq 18 \\ 0 \leq y_2 + 2x_2 \leq 32 \\ 14 \leq y_2 + 2x_2 \leq 46 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y_1 + 2x_1 \leq 18 \\ 14 \leq y_2 + 2x_2 \leq 32 \end{cases}$$

Необходимо найти кол-во способов выбрать $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ такие, что:

$$\begin{cases} 0 \leq y_1 + 2x_1 \leq 18 \\ 14 \leq y_2 + 2x_2 \leq 32 \\ 0 \leq y_1, y_2 \leq 26 \\ 2x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + y_1 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

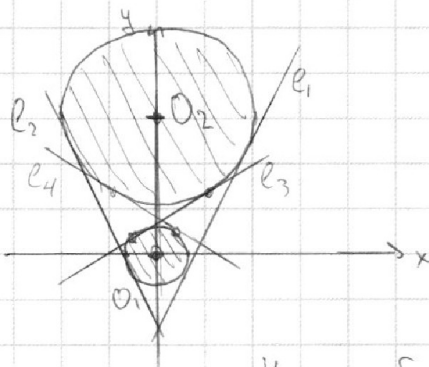
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax+by-b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

Отметим на координатной плоскости множество точек, которое задается неравенством:



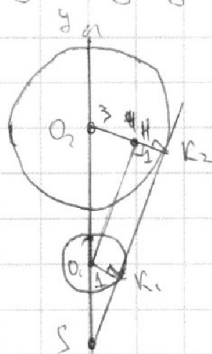
Это множество представляет собой два круга с центрами $O_1(0,0)$, $O_2(0,12)$ и радиусами 1; 4 соответственно. Если $A(x,y)$ попадает в множество, то $(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0$.
М-множество

$ax+by-b=0 \Leftrightarrow y=-\frac{a}{b}x+b$ — прямая l .
Если $A(x,y) \in M$, то для x,y выполняется система из 2-х уравнений.

Нам нужно, чтобы система имела лишь 2 решения. $\Leftrightarrow l$ пересекает M только в двух точках.

Все такие прямые отмечены на рисунке.

Найдем $\tan$ угла наклона l_1 .



K_1, K_2 — соотв. точки касания. $O_1H \perp O_2K_2$

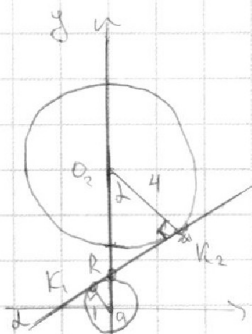
O_1, K_1, K_2, H — прямоугольник $\Rightarrow HK_2=1 \Rightarrow O_2H=3$

$$O_1H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2H^2} = \sqrt{12^2 - 3^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\tan \angle O_2O_1H = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \tan \angle O_2O_1H = \sqrt{5}$$

$O_1H \parallel K_1K_2 \Rightarrow O_1H, K_1K_2$ имеют одинаковый угол наклона к оси абсцисс. $\tan \angle = \tan \angle O_2O_1H = \sqrt{5}$

Тангенс угла наклона прямой равен коэф. стоящему при x .
 $a_1 = \sqrt{5}$. В силу симметрии l_2 имеет коэф. $a_2 = -\sqrt{5}$



Найдем $\tan$ для l_3 . $\triangle K_1O_1R \sim \triangle K_2O_2R$

$$\frac{O_2R}{O_1R} = \frac{O_2K_2}{O_1K_1} \Leftrightarrow \frac{O_2R}{O_1R} = \frac{4}{1}$$

$$\begin{cases} O_1R + O_2R = 12 \\ O_2R = 4O_1R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} O_1R = \frac{12}{5} \\ O_2R = \frac{48}{5} \end{cases}$$

$$RK_2 = \sqrt{\left(\frac{48}{5}\right)^2 - 4^2} = \sqrt{\frac{2304}{25} - 16} = \frac{4}{5}\sqrt{119}$$

$$\tan \angle = \tan \angle RO_2K_2 = \frac{RK_2}{O_2K_2} = \frac{\frac{4}{5}\sqrt{119}}{4} = \frac{\sqrt{119}}{5} = a_3$$

Коэф. в уравнении l_4 $a_4 = -a_3 = -\frac{\sqrt{119}}{5}$ в силу симметрии

Получили 4 знач. параметра a , для каждого из которых можно найти подходящее b . Для $a = \pm\sqrt{5}$, $b = -0.5$, для $a = \pm\frac{\sqrt{119}}{5}$, $b = 0.1$

Ответ: $\{\pm\sqrt{5}; \pm\frac{\sqrt{119}}{5}\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} ab &: 2^{14} \cdot 4 \\ bc &: 2^{14} \cdot 4 \cdot 8 \\ ac &: 2^{22} \cdot 3 \cdot 7 \end{aligned}$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-9x \Leftrightarrow \frac{3x^2-6x+2-3x^2-3x-1}{\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1}} = 1-9x \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-6}}{3} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}-6}{3} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1$$



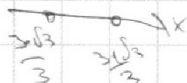
$$3x^2+3x+1$$

$$\frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$



$$3 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4} + 3 + 2$$



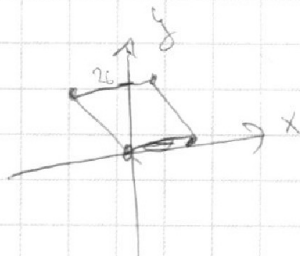
$$\frac{6}{6}$$

$$3x^2+3x+1 \geq 1 \Leftrightarrow 3x^2+3x \geq 0 \Leftrightarrow x(x+1) \geq 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-3}}{3} = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{3}$$

$$x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

$$3x^2-6x+2 \geq 1 \Leftrightarrow 3x^2-6x+1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - \frac{3+\sqrt{6}}{3})(x - \frac{3-\sqrt{6}}{3}) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, \frac{3-\sqrt{6}}{3}] \cup [\frac{3+\sqrt{6}}{3}, +\infty)$$



$$0 \leq y \leq 26$$

$$y = 2x$$

$$-2x \leq y \leq -2x + 32$$

$$26 = -130 + 160$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2$$



$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14 \Leftrightarrow 2x_2 + y_2 = 14 + 2x_1 + y_1$$

$$0 \leq y_1 \leq 26$$

$$0 \leq y_2 \leq 26$$

$$-2x \leq y_1 \leq -2x_1 + 32$$

$$-2x_2 \leq y_2 \leq -2x_2 + 32$$

$$0 \leq y_1 + 2x_1 \leq 32$$

$$0 \leq y_2 + 2x_2 \leq 32$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y_1 + 2x_1 \leq 32 \\ -14 \leq y_2 + 2x_2 \leq 18 \end{cases}$$

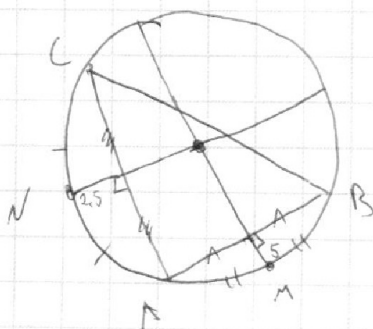
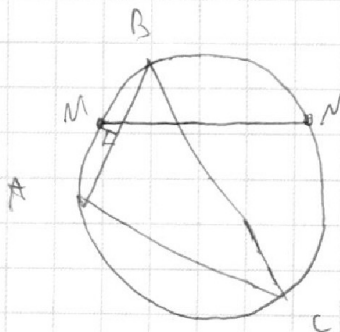
$$0 \leq y_1 + 2x_1 \leq 18$$

$$14 \leq y_2 + 2x_2 \leq 32$$

$$0 \leq y_1 \leq 26$$

$$0 \leq y_2 \leq 26$$

$$2x_2 + y_2 = 2x_1 + y_1 + 14$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

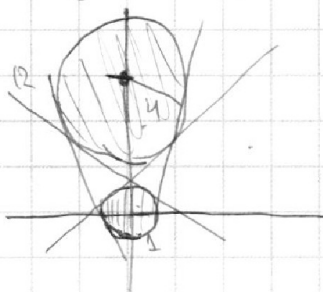
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

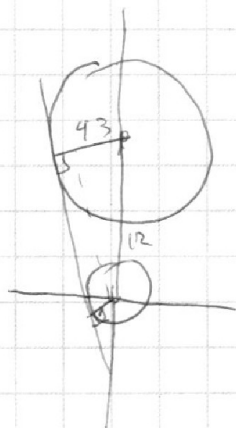
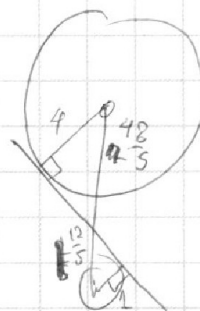
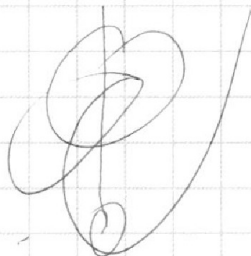
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ax+ay-8b=0$$
$$(x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0$$



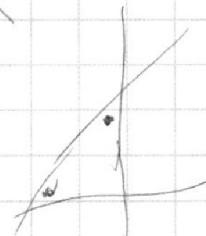
$$y = -ax + 8b$$



$$144 - 9 = 135 = 9 \cdot 15$$

$$\frac{30}{15} = 2$$
$$\tan \beta = \frac{\sqrt{5}}{15}$$

$$\frac{\sin(1-\beta)}{\cos(1-\beta)} = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \cot \beta = \sqrt{5}$$



$$68.28 = 4.40 \cdot 15.7$$

$$\frac{14}{11.5}$$

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2 - ab} = \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2 - ab} = \frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$$

ab



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

