



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-13; 26)$, $Q(3; 26)$ и $R(16; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $a_1 = 2^{q_1} \cdot 7^{q_2}$; $b_1 = 2^{b_1} \cdot 7^{b_2}$; $c_1 = 2^{c_1} \cdot 7^{c_2} \Rightarrow$ варианты 11

$a_1 b_1 = 2^{q_1+b_1} \cdot 7^{q_2+b_2} : 2^{15} \cdot 7^{11}$

$a_2 b_2 c_2 = 2^{q_1+c_1} \cdot 7^{q_2+c_2} : 2^{23} \cdot 7^{39} \Rightarrow$

$b_1 c_1 = 2^{b_1+c_1} \cdot 7^{b_2+c_2} : 2^{17} \cdot 7^{18}$

$$\begin{cases} a_1 + b_1 \geq 15 \\ a_2 + b_2 \geq 11 \\ a_1 + c_1 \geq 14 \\ b_2 + c_2 \geq 18 \\ a_1 + c_1 \geq 23 \\ a_2 + c_2 \geq 39 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 15 + 17 + 23 = 55 \\ 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 11 + 18 + 39 = 68 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 \geq \frac{55}{2} = 28 \\ a_2 + b_2 + c_2 \geq \frac{68}{2} = 34 \end{cases}$$

Если я смогу привести пример на то, что $a b c = 2^{28} \cdot 7^{39}$, то
(т.к. $a c ; 7^{39}$)

я приведу конкретные числа

$a b c = 2^{28} \cdot 7^{39} \Rightarrow \begin{cases} a = 2^{11} \cdot 7^{11} \\ b = 2^5 \\ c = 2^{12} \cdot 7^{28} \end{cases}$ (я попеременно беру по a, b, c и $a b c$)

Такой пример не подходит, берю
 $2^{17} \cdot 2^{12} = 2^{29}$ Тогда, следующее по
мощности "мало" $2^{25} \cdot 7^{39}$

К тому я привел пример

Ответ: $2^{23} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

$$\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} - \frac{a+b}{(a+b)^2-3ab} \cdot \text{Пусть по условию } \begin{cases} a+b:m \\ (a+b)^2-3ab:m \end{cases}$$

$$\text{Если } (a+b):m, \text{ то } (a+b)^2:m \Rightarrow 3ab:m \Rightarrow$$

Если $a:m$, то, т.к. a и b — взаимно простые,
то $b \nmid m$, но $(a+b):m$ — противоречие

~~$a \nmid m$, $b \nmid m \Rightarrow 3a$ имеет делителя m
и только если $3:m$, a, b~~

$$\begin{cases} 3a:m \\ 3b:m \\ a:m \\ b:m \\ 3:m \\ a+b:m \\ 3ab:m \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \text{— делитель } m \\ \text{из условия} \end{matrix}$$

Если $a+b:m$, то и при этом a и b взаимно простые,
то $3a \nmid m$, $3b \nmid m$ и $ab \nmid m \Rightarrow$ только $3:m$.

Максимальное число, на которое делится 3 — это 3

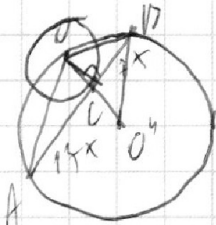
Пример: $a=2, b=4 = \frac{3}{3 \cdot 2 \cdot 4}$

Ответ: $m=3$

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3



3 Центр окружности $\Omega - O$

Положим $OC = r = 7 \Rightarrow OB^2 = 49 + 4x^2 \quad (AB = 24x)$

$AO^2 = 14^2 x^2 + 49$

3 Центр окружности $\Omega' - O'$

Положим $\cos \angle OAB = \frac{1}{2} \angle O'O'B$; $\cos \angle OAB = \frac{14x}{\sqrt{14^2 x^2 + 49}} \Rightarrow$

$\cos \angle O'O'B = 2 \cdot \cos^2 \angle OAB - 1 = \frac{2 \cdot 14^2 x^2}{14^2 x^2 + 49} - 1 = \frac{14^2 x^2 - 49}{14^2 x^2 + 49}$

$OB^2 = 49x^2 + 49$

По т. косинусов $OB^2 = 49x^2 + 49 = 2 \cdot 165 - 2 \cdot 165 \cdot \frac{14^2 x^2 - 49}{14^2 x^2 + 49} \Rightarrow$

$14^2 x^2 + 14^2 x^2 + 49x^2 + 49 = 2 \cdot 165 - 2 \cdot 165 \cdot \frac{14^2 x^2 - 49}{14^2 x^2 + 49} \Rightarrow$

$14^2 x^4 + 14^2 x^2 + 49x^2 + 49 - 4 \cdot 165 = 0 \Rightarrow$

$14^2 x^4 + x^2(14^2 + 49) + 49 - 4 \cdot 165 = 0$

Знаем $x^2 = t \Rightarrow 14^2 t^2 + (14^2 + 49)t + 49 - 4 \cdot 165 = 0$

$D = 14^4 + 49^2 + 2 \cdot 49 \cdot 14^2 - 4 \cdot 14^2 \cdot 49 + 16 \cdot 14^2 \cdot 165 = (14^2 - 49)^2 + 16 \cdot 14^2 \cdot 165 =$

$= 10^2 \cdot 24^2 + 16 \cdot 14^2 \cdot 165 =$

$t = \frac{-14^2 - 49 \pm \sqrt{10^2 \cdot 24^2 + 16 \cdot 14^2 \cdot 165}}{2 \cdot 14^2} = t^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{\sqrt{10^2 \cdot 24^2 + 16 \cdot 14^2 \cdot 165} - 14^2 - 49}{2 \cdot 14^2}} \Rightarrow$

$t = \frac{-14^2 - 49 - \sqrt{10^2 \cdot 24^2 + 16 \cdot 14^2 \cdot 165}}{2 \cdot 14^2}$ — не подходит $AB = 24x$

Ответ: $AB = \frac{24}{14} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{10^2 \cdot 24^2 + 16 \cdot 14^2 \cdot 165} - 14^2 - 49}{2}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-5x$$

$$f(x) = 3x^2-6x+2; g(x) = 3x^2+3x+1$$

$$x_0 = 2$$

$$x'_0 = -\frac{1}{2}$$

$$f(x_0) = 12 - 12 + 2 = 2 > 0; g(x'_0) = 3 \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1 = -\frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4} > 0$$

$$3 \sqrt{3x^2-6x+2} = a; \sqrt{3x^2+3x+1} = b. \text{ Тогда}$$

$$a-b = a^2-b^2 \Rightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^2-6x+2} = \sqrt{3x^2+3x+1} \\ \sqrt{3x^2-6x+2} \end{cases}$$

Задача №4

$$\sqrt{3x^2-6x+2} - \sqrt{3x^2+3x+1} = 1-5x$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} = a; \sqrt{3x^2+3x+1} = b \Rightarrow a-b = a^2-b^2 \Rightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2-6x+2} = \sqrt{3x^2+3x+1} \\ \sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-6x+2 = 3x^2+3x+1 \\ 3x^2-6x+2 \geq 0 \\ 3x^2+3x+1 \geq 0 \end{cases}$$

$$3x^2-6x+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+\frac{1}{3} \\ x=1-\frac{1}{3} \end{cases} \text{ Тогда максимум } 3x^2+3x+1 =$$

$$D=36-12=24$$

$$3(1+\frac{1}{3})^2+3(1+\frac{1}{3})+1 > 1 \Leftrightarrow$$

$$3(1-\frac{1}{3})^2+3(1-\frac{1}{3})+1 > 1 \Leftrightarrow$$

$$= 8-3\sqrt{3} > 1$$

$$\text{при } x \in (-\infty; 1-\frac{1}{3}] \cup [1+\frac{1}{3}; +\infty)$$

$$\begin{cases} 3x^2-6x+2 = 3x^2+3x+1 \\ 3x^2+3x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{3x^2-6x+2} + \sqrt{3x^2+3x+1} > 1 \Rightarrow$$

$$D=9-12 < 0$$

$$\begin{cases} 3x=1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$$

Ответ: $\{\frac{1}{3}\}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

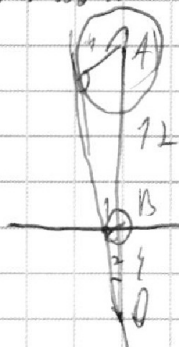
7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5 - программисты

Анализ



$$\frac{OB}{OA} = \frac{1}{4}, AB = 12 \Rightarrow AB \Rightarrow OB \Rightarrow OB = 4$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha) = -\operatorname{ctg}(\beta) = a = \frac{\sqrt{4^2 - 1}}{1} = \sqrt{15} \Rightarrow \text{Вывод}$$

Умножим на $-\sqrt{15}$ мы получим:

$$\text{Ответ: } \left\{ \pm \sqrt{15}; \pm \frac{\sqrt{4^2 - 1}}{5} \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Можно и 18 б

$$\begin{cases} x+y-86=0 \\ (x^2+y^2-1) \cdot (x^2+y^2-16) \leq 0 \end{cases}$$

$$(x^2+y^2-1) \cdot (x^2+y^2-16) \leq 0$$

Если рассмотреть график второго

неравенства, то получим такую картинку,

где либо не виден первый круг, либо второй

Соответственно, если предположить, что будет касаться один из

окружностей, а другая имеет свой 2 общие точки, то тогда

будет бесконечно много пересечений $\Rightarrow$ решений. Тогда, получим ^{из}

наш рисунок только 4 случая с касательными.

1 случай:

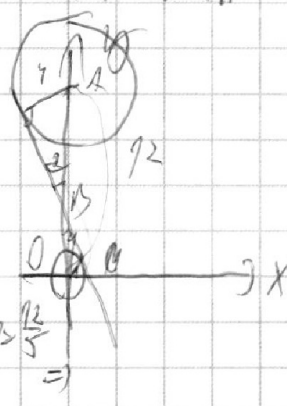
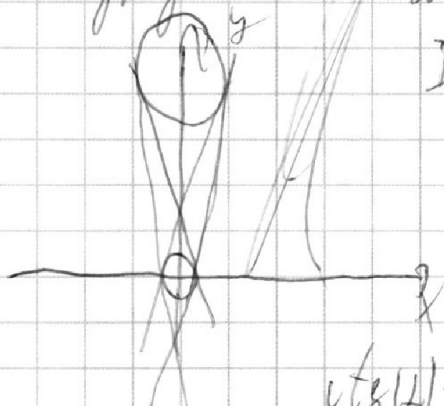
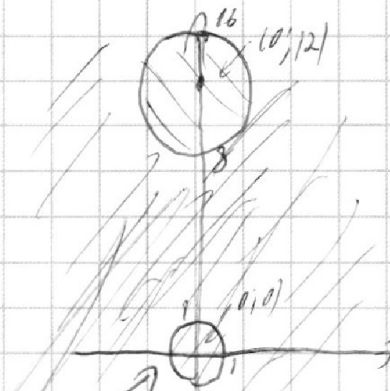
$$\frac{AB}{BO} = \frac{4}{1} = 4$$

$$AB = \frac{1}{5} \cdot 4; BO = \frac{12}{5}$$

$$\text{ctg}(12) = \text{ctg}(4) = \frac{4}{1} = 4$$

$$= \frac{\sqrt{12^2-5^2}}{5} = \frac{\sqrt{119}}{5}$$

$$-a = \frac{\sqrt{119}}{5} \text{ не подходит.}$$



Важно отметить

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

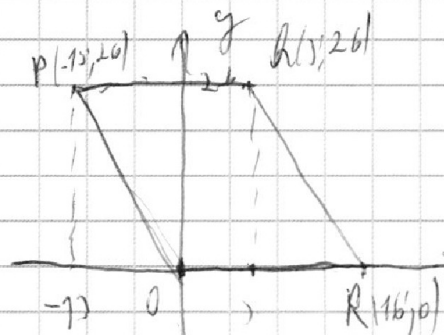
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №5



$$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$$

$$2x_2 - x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

+ прямую, перпендикулярную $|OP|$:

$$R = \frac{16}{13} - \frac{26}{13} = -2; b = 0$$

$$y = -2x + b$$

Всего на $|OP|$ 13 точек с целочисленными координатами.
Если внимательно посмотреть на выражение из условия и сказать,
что все точки с целыми координатами внутри параллелограмма
лежат на прямой, $\parallel$ OR $y = -2x + b$ (или OR), то

$$2x_2 - x_1 + y_2 - y_1 = b_2 - b_1 = 14$$

прямая, $\perp |OP|$ имеет уравнение $y = -2x + 0$, $|OR|: y = 0$

$$0 = -2x + b \Rightarrow b = 32 \Rightarrow b \in [0; 32]$$

Если $b_1 = 0$, то b_2 должно равняться 14

$$b_1 = 1 \Rightarrow b_2 = 15, \dots, b_1 = 18 \Rightarrow b_2 = 32$$

Всего на каждой b_1 прямой по 13 целочисленных точек, т.е.
всего пар $18 \cdot 13 = 13^2$ (пар)

$$\text{Ответ: } 13 \cdot 13^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

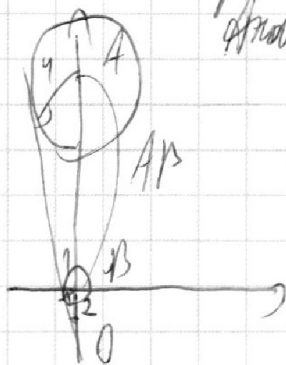
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6 - преобразование



Анализ: $\frac{OB}{OA} = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $AB = 12 \Rightarrow AB = 3 \cdot OB = 4 \cdot OB = 4$

$$\tan(\alpha) = -\tan(\beta) = -4 = \frac{\sqrt{4^2 - 1}}{1} = \sqrt{15} \Rightarrow$$

В силу симметричности - $\sqrt{15}$ также

возможно

Ответ: $\left\{ \pm \sqrt{15}; \pm \frac{\sqrt{4^2 - 1}}{1} \right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

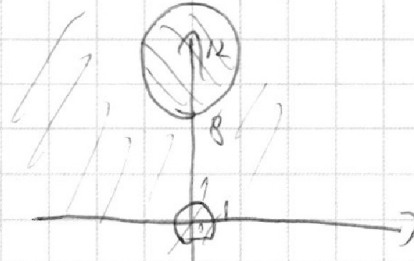
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6

$$\begin{cases} ax + by - 86 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1) \cdot (x^2 + y^2 - 12)^2 - 16 = 0 \end{cases}$$

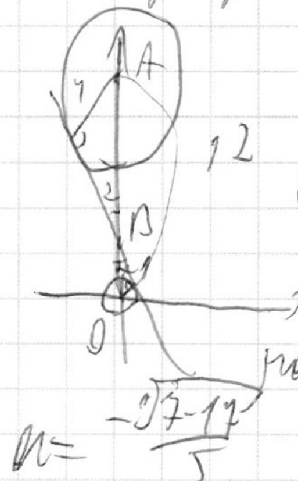
$$(x^2 + y^2 - 1) \cdot (x^2 + y^2 - 12)^2 - 16 = 0$$



Если нарисовать график второго уравнения,
то получим три точки касания, $\rightarrow$ из
этих точек выберем первую точку, если она является
решением первой системы, или вторую,
или третью.

Следовательно, если прямая будет пересекать одну из
окружностей в 2 точках (касательной), то будет бесконечно
много пересечений $\rightarrow$ не будет выполнено уравнение.

Потому получим, если подберем только 4 случая и
выберем один.



$$\frac{AB}{BO} = \frac{4}{1} \Rightarrow AB = \frac{12}{5} \cdot 4; BO = \frac{12}{5}$$

$$\tan(\alpha) = \tan(\beta) = -\alpha = \frac{\sqrt{12^2 - 4^2}}{4} = \frac{\sqrt{7-12}}{5}$$

Величину симметрично
рассмотрим

$$\alpha = \frac{-\sqrt{7-12}}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

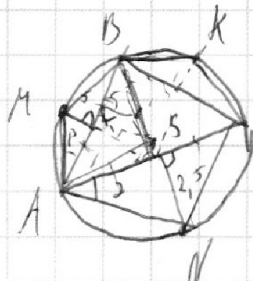
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 15



$$1) \angle ADB = \angle ANK = \angle MLC; \angle AKB = \angle NPB \Rightarrow \triangle AKB \sim \triangle NPB;$$

$$\triangle ANK \sim \triangle MLC \Rightarrow AN \parallel ML - \text{дуги параллельны}$$

$$\text{и дуги равны} \Rightarrow NS \parallel ML - \text{равные радиусы, параллельны}$$

$$KAC \parallel MKN.$$

$$AB = 2 \sqrt{R^2 - (R - 2.5)^2} = 2 \sqrt{10R - 25}$$

$$AL = 2 \sqrt{R^2 - (R - 2.5)^2} = 2 \sqrt{R^2 - R^2 + 5R - 6.25} = 2 \sqrt{5R - 6.25}$$

$$2) \angle LAN = 2; \angle MAP = \beta.$$

Проекции дуг на углы A. K - вершина дуги с окр.

$$\angle BKC = \angle KLC \Rightarrow \triangle BKC \sim \triangle KLC. \text{ и } 2\angle AKB + 2\angle ANK + 2\angle BKC = 360^\circ \Rightarrow$$

$$\angle BKC = 180^\circ - \angle AKB - \angle ANK \Rightarrow \angle KCB = 2\angle KBL = 90^\circ - 2 - \beta \Rightarrow$$

$$\cos(2\angle KBL) = \cos(2 + \beta) = \cos 2 \cdot \cos \beta - \sin 2 \cdot \sin \beta.$$

$$\angle B = \angle A = \sqrt{10R - 25} \Rightarrow AB = \sqrt{25 + 10R - 25} = \sqrt{10R}$$

$$\angle B = \angle A = \sqrt{10R - 25} \Rightarrow AB = AK = \sqrt{25 + 10R - 25} = \sqrt{10R}$$

$$\text{аналогично, } AN = ML = \sqrt{5R} \Rightarrow \cos 2 = \frac{\sqrt{10R - 25}}{\sqrt{10R}} = \frac{\sqrt{2R - 5}}{\sqrt{2R}} \Rightarrow$$

$$\sin 2 = \sqrt{1 - \frac{2R - 5}{2R}} = \sqrt{\frac{2R - 2R + 5}{2R}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2R}}; \cos \beta = \frac{\sqrt{5R - 6.25}}{\sqrt{5R}}; \sin \beta = \frac{5}{\sqrt{5R - 6.25}}$$

$$\cos(\angle KCB) = \frac{\sqrt{2R - 5} - \sqrt{5R - 6.25}}{\sqrt{10R}} = \frac{12.5}{\sqrt{10R}}$$

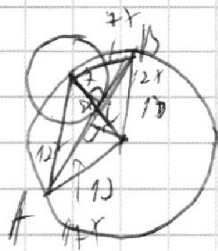
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$h = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$$

$$AB = 7$$

$$\frac{13}{a} - 1 = \frac{12 - a}{a} = \frac{\sqrt{13^2 - 12^2} + a}{a}$$

$$\cos \angle = \frac{\sqrt{13^2 - 12^2} + a}{13}$$

$$\sin \angle = \frac{12 - a}{13}$$

$$15 \sin \angle = \sqrt{13^2 - 12^2} + a$$

$$ab: 2^{15} \cdot 7^{11}, bc: 2^{17} \cdot 7^{18}, cl: 2^{23} \cdot 7^{35}$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{11}, bc = 2^{17} \cdot 7^{18}, cl = 2^{23} \cdot 7^{35}$$

$$\frac{a}{b} = 2^{-2} \cdot 7^{-7} \cdot \frac{41}{R} \Rightarrow C = 2^2 \cdot 7^7 \cdot R$$

$$\frac{m}{R} \cdot a = L \cdot 7^{37} \Rightarrow m = 2 \cdot 7^7 \cdot R$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{11}, bc = 2^{17} \cdot 7^{18}, cl = 2^{23} \cdot 7^{35}$$

$$11 + 35 + 18 = 58$$

$$55 \cdot 2 = 275$$

$$ab \geq 2^7 \cdot 7^m, bc \geq 2^{15} \cdot 7^{18}, cl \geq 2^{23} \cdot 7^{35}$$

$$2a_1 + 2b_1 + 2c_1 \geq 15 + 23 + 17 = 55$$

$$2a_2 + 2b_2 + 2c_2 \geq 11 + 17 + 18 = 46$$

$$abc_{\min} = 2^{28} \cdot 7^{23}$$

$$3a_1, m$$

$$a/m = 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a \leq b$

$$a^2 = 49b + b^2$$

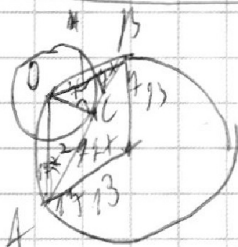
$$a + b : m$$

$$(a+b)^2 = 30b : m$$

$$m = 5$$

$$30b : m \Rightarrow \begin{cases} 5 : 4 \\ a : b \Rightarrow 16 : m \\ b : m \Rightarrow a : m \\ a + b : m \end{cases}$$

$$45 + 45x^2 = 2 \cdot 165 - 2 \cdot 165 \cdot \frac{14x^2 - 45}{14x^2 + 45} \Rightarrow$$



$$\sqrt{AO^2 + AO^2} = \sqrt{4x^2} = OB = 45x^2 \Rightarrow$$

$$AO^2 - OB^2 = 10 \cdot 24x^2 = \frac{AB^2}{2} \cdot AO = \frac{5}{2} AB^2$$

$$AO^2 = 24x^2 \cdot AO^2 + OB^2 - AB^2$$

$$\frac{AO^2 + AB^2 - AO^2}{2 \cdot AO \cdot AB} = \frac{\sqrt{14x^2 + 45}}{\sqrt{14x^2 + 45}} =$$

$$AO^2 = \frac{10 \cdot 24x^2 + 45x^2}{2 \cdot 24x \cdot AO} = \frac{14x}{\sqrt{14x^2 + 45}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{14}$$

$$20 \cdot 24x^2 + 45x^2$$

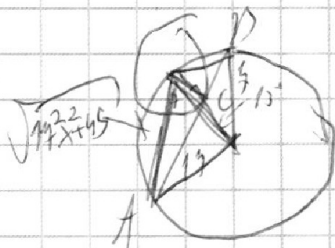
$$AO = \frac{1}{24 \cdot 31}$$

$$AO = \frac{185 - 432}{240} = 240$$

$$OB^2 = 45 + 45x^2$$

$$\frac{14x^2 + 45 + 45x^2 + 45x^2}{2} =$$

$$\cos 2 = \frac{14x^2 + 45 + 45x^2 + 45x^2}{2}$$



$$45x^2 + 45 =$$

$$\cos 2 = \frac{14x^2 + 45 + 24x^2 - 45x^2 - 45}{2 \cdot 24x \cdot \sqrt{14x^2 + 45}} = \frac{10x^2 + 24x^2}{2 \cdot 24x \cdot \sqrt{14x^2 + 45}} =$$

$$= \frac{10x + 24x}{2 \cdot \sqrt{14x^2 + 45}} = \frac{14x}{\sqrt{14x^2 + 45}}$$

$$\cos(2L) = 2 \cdot \frac{14x^2}{14x^2 + 45} - 1 = \frac{2 \cdot 14x^2 - 14x^2 - 45}{14x^2 + 45} = \frac{14x^2 - 45}{14x^2 + 45}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение

$$a = 2^{a_1} \cdot 7^{a_2}, b = 2^{b_1} \cdot 7^{b_2}, c = 2^{c_1} \cdot 7^{c_2}$$

$$2^{a_1+b_1} \cdot 7^{a_2+b_2} = 2^{15} \cdot 7^{11}, 2^{b_1+c_1} \cdot 7^{b_2+c_2} = 2^{17} \cdot 7^{18}, 2^{a_1+c_1} \cdot 7^{a_2+c_2} = 2^{21} \cdot 7^{33}$$

$$\begin{cases} a_1+b_1 \geq 15 \\ a_2+b_2 \geq 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1+c_1 \geq 17 \\ b_2+c_2 \geq 18 \end{cases}$$

$$a_1+c_1 \geq 23$$

$$a_2+c_2 \geq 33$$

$$a_1+b_1+c_1 \geq 17, a_2+b_2+c_2 \geq 18$$

$$2(a_1+b_1+c_1) \geq 15+23+17 \quad (A)$$

$$2(a_2+b_2+c_2) \geq 18+11+33 = 33$$

$$33+11 = 52+18 = 68 \cdot 2 \Rightarrow > 4$$

$$a_2+c_2 \geq 18$$

$$a_1+b_1+c_1 = 2^{28} \cdot 7^{33}$$

$$c = 7^{33} \cdot 2$$

$$\Rightarrow c = 2^{13} \cdot 7^{28}$$

$$a = 2^{11} \cdot 7^{17}$$

$$b = 2^5$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2 - 3ab}$$

$$b \neq 4 \cdot 2^2$$

$$\begin{cases} a+b \in m \\ 3ab \in m \end{cases}$$

$$3ab \in m$$

$$3ab \in m$$

$$3a \in m; a+b \in m; a \in m; b \in m$$

$$a=3, b=4$$

$$a=4, b=3$$

$$a+b$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

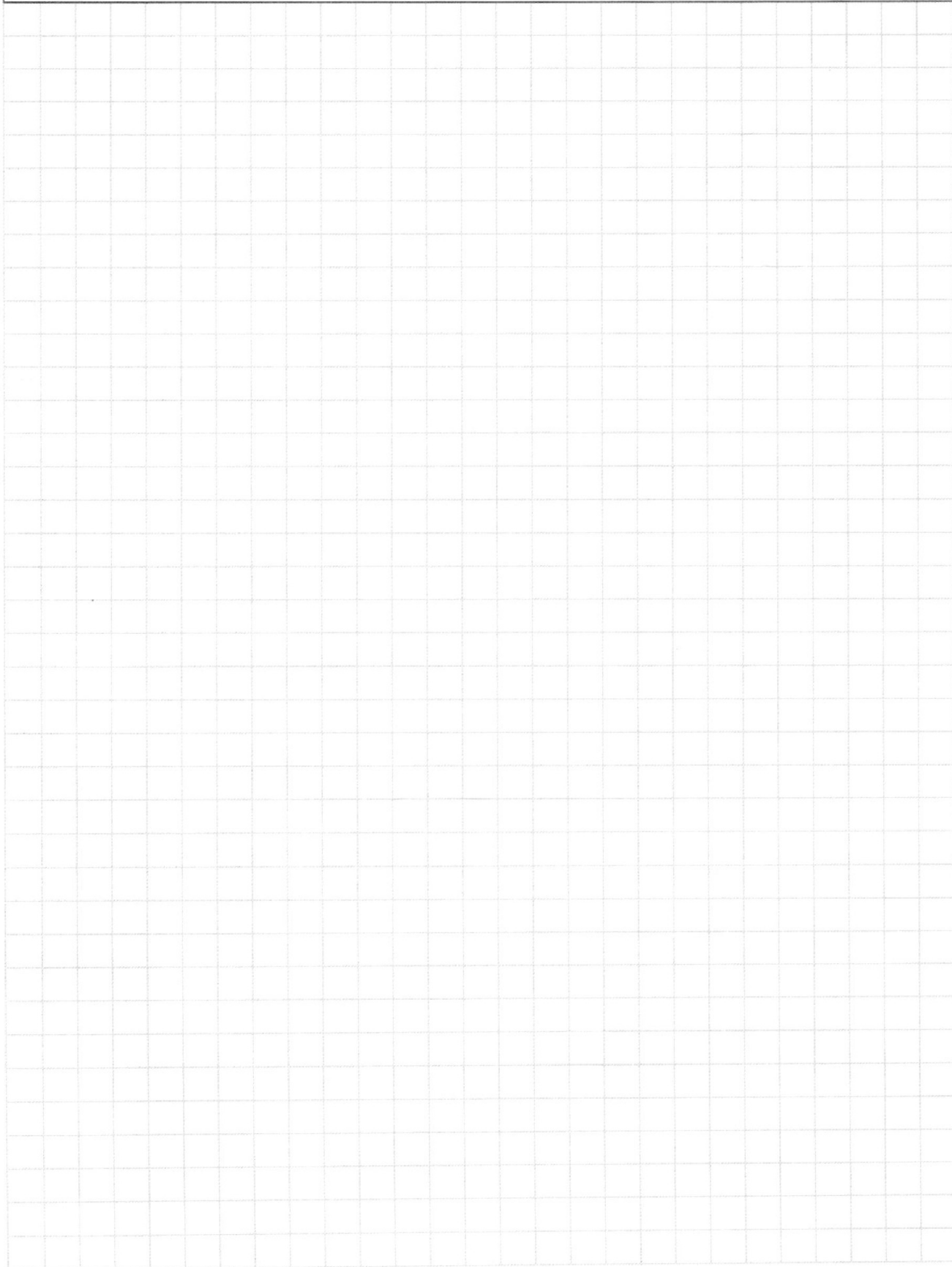
5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$49 \cdot 99^2 x^2 + 49^2 + 99^2 \cdot 19^2 x^2 + 49^2 x^2 = 2 \cdot 165 - 2 \cdot 169 \cdot 19^2 x^2 - 2 \cdot 165 \cdot 49$$

$$t = x^2$$

$$49 \cdot 19^2 t + 49^2 + 49 \cdot 19^2 t^2 + 49^2 t = 2 \cdot 165 - 2 \cdot 169 \cdot 19^2 t - 2 \cdot 165 \cdot 49$$

$$49 \cdot 19^2 t^2 + (49 \cdot 19^2 + 49 + 19^2 + 2 \cdot 169 \cdot 19^2) t + 49^2 + 2 \cdot 165 \cdot 49 = 0$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 5x$$

$$a - b = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \\ \sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 \end{cases}$$

$$x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 18 - 12 \cdot 2 = -6$$

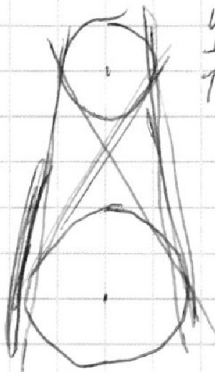
$$3x^2 - 6x + 2 = x^2 + 5x + 1 \Rightarrow$$

$$5x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{5} \quad 3 \cdot \frac{1}{25} - \frac{6}{5} + 2 = \frac{3}{25} - \frac{6}{5} + 2 = \frac{3}{25} - \frac{30}{25} + \frac{50}{25} = \frac{23}{25}$$



$$y = -ax + 8.6$$

$$b = 8.6, a = 0$$



$$\frac{y}{x} = \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \Rightarrow y = \frac{x}{8}$$

$$5x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{5}$$

$$y = -ax + 8.6$$

$$x^2 + (-ax + 8.6 - 12)^2 = 16$$



$$y = -ax + 8.6$$

$$y = -ax + 8.6$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \Rightarrow y = \frac{x}{8}$$

$$\frac{\sqrt{144}}{25} = \frac{\sqrt{144-25}}{5} = \frac{\sqrt{119}}{5}$$

$$\frac{\sqrt{144}}{25} = \frac{\sqrt{144-25}}{5} = \frac{\sqrt{119}}{5}$$

$$\frac{\sqrt{144}}{25} = \frac{\sqrt{144-25}}{5} = \frac{\sqrt{119}}{5}$$

$$\frac{\sqrt{144}}{25} = \frac{\sqrt{144-25}}{5} = \frac{\sqrt{119}}{5}$$

$$\frac{\sqrt{144}}{25} = \frac{\sqrt{144-25}}{5} = \frac{\sqrt{119}}{5}$$

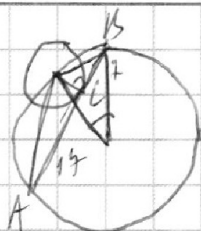
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$(\cos L) = \frac{\sin 178}{\sqrt{14^2 + 4^2}}$$

$$10522 \approx 2 \cdot \frac{19^2}{19 \times 49}$$

$$\begin{array}{r} 17^2 - 7^2 \\ \hline 17^2 + 7^2 \\ 17^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 105 \\ \hline 115 \\ 000 \\ \hline 2315 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \quad 55 \\ 676 \quad 288 \\ \times 45 \quad 76 \\ \hline 62141 \quad 344624 \\ + 441 \\ \hline 281 \\ \hline 3624 \end{array}$$

$$19x^2 + 4s = 2 \cdot 16s - 2 \cdot 16s \cdot \frac{17s - 7}{17s^2 + 7}$$

$$48 \cdot 17^2 x^4 + 45 x^2 + 17^2 \cdot 95 x^2 + 45 = 2 \cdot 168 - 17^2 x^2 + 2 \cdot 168 \cdot 7^2 - 2 \cdot 168 \cdot 17^2 x^2 + 2 \cdot 168 \cdot 7 =$$

$$45 \cdot 17^2 x^9 + x^2 (45 + 17^2 \cdot 45) + 45^2 - 9 \cdot 165 \cdot 45 = 0 \quad | : 45$$

$$17^2 x^4 + x^2(45 + 17^2) + 45 - 2 \cdot 17 \cdot 165 = 0$$

$$289 + 45 = 300 + 38 =$$

~~$$Q = 45^2 + 17^2 - 45 \cdot 17^2 - 4 \cdot 17^2 - 45 + 16 \cdot 17^2 - 165$$~~

$$2854^9 + 1^2 \text{ up } 338 \text{ at } - 627 = 0$$

$$\begin{array}{r} 398 \\ \times 24 \\ \hline 1592 \\ + 7960 \\ \hline 9552 \end{array}$$

$$2) 338^2 + 289 = 627$$

~~$$93^2 + 14^2 + 2 \cdot 93 \cdot 14 = 4 \cdot 14^2 + 45 + 16 \cdot 14 \cdot 165 = 45 + 14 + 16 \cdot 14 \cdot 165 =$$~~

$$= 10 \cdot 25^2 + 16 \cdot 19^2 - 465^2 = 4 \cdot 25 \cdot 25^2 + 8 \cdot 19^2 - 165^2$$

$$x = \frac{-45 \pm \sqrt{45^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14}}{2 \cdot 1}$$

$$48x^2 + 48 = 2 \cdot 16S - 2 \cdot 16S \cdot \frac{17x^2 - 9^2}{17^2x^2 + 9^2} \Rightarrow 17^2 \cdot 48x^4 + 48^2x^2 + 48 \cdot 17x^2 + 48^2 =$$

$$= 2 \cdot 165 \cdot 99x^2 + 1 \cdot 165 \cdot 9^2 - 2 \cdot 118 \cdot 99x^2 + 1 \cdot 165 \cdot 9^2$$

~~$2R^2 + 10R + 25$~~

$$17^2 \cdot 45x^4 + x^2(45 \cdot 17^2) + 45^2 - 4 \cdot 165 \cdot 45 = 0 \quad 10R - 25 + 25 = 10A$$

$$17x^2 + x^2(95 + 14^2) + 45 - 4 \cdot 165 = 0$$

$$D = 45^2 + 17^2 + 2 \cdot 45 \cdot 17 - 4 \cdot 17^2 - 45 + 6 \cdot 17^2 \cdot 165 = [45 - 17^2]^2 + 16 \cdot 17^2 - 165 =$$

$$= 10^2 \cdot 29^2 + 16 \cdot 14^2 \cdot 165 = 54600 + 4,627 \cdot 10^3$$

301: 4

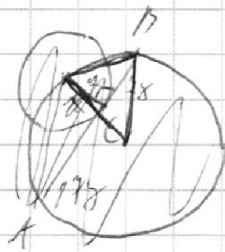
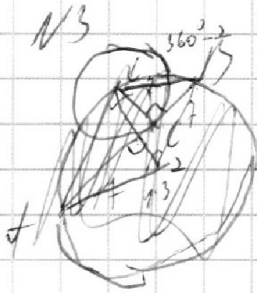
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{93+45y^2} = \sqrt{93+45y^2} = \sqrt{93+45y^2}$$

$$\cos(2) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$\sqrt{1+y^2} = \frac{1}{\cos(2)}$$

$$a, b, c; ab, 2 \cdot 7^{15}, bc, 2 \cdot 7^{18}, ac, 2 \cdot 7^{23}$$

$$abc = ?; ab = R \cdot 2 \cdot 7^{15}; bc = m \cdot 2 \cdot 7^{18}; ac = S \cdot 2 \cdot 7^{23}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{a} = \frac{2 \cdot 7^{15}}{R} \cdot \frac{m}{R} \Rightarrow c = 2 \cdot 7^{15} \cdot \frac{m}{R} \cdot a$$

$$2 \cdot 7^{15} \cdot \frac{m}{R} \cdot a = S \cdot 2 \cdot 7^{23} \Rightarrow a = S \cdot 2 \cdot 7^{23} \cdot \frac{R}{m} \Rightarrow a = \sqrt{S \cdot 2 \cdot 7^{23} \cdot \frac{R}{m}}$$

$$c = 2 \cdot 7^{15} \cdot \frac{m}{R} \cdot \sqrt{S \cdot 2 \cdot 7^{23} \cdot \frac{R}{m}} = 2 \cdot 7^{20} \cdot \sqrt{S \cdot 2 \cdot \frac{m}{R}}$$

$$b = \frac{R \cdot 2 \cdot 7^{15}}{a} = \frac{R \cdot 2 \cdot 7^{15}}{\sqrt{S \cdot 2 \cdot \frac{m}{R}}} = \sqrt{\frac{R \cdot m}{S \cdot 2^{21}}} \cdot \frac{2}{7^2} = 1 \quad \begin{matrix} S \cdot \frac{R}{m} = 2 \\ R \cdot m = 8 \\ S = 2 \end{matrix}$$

$$abc = \sqrt{S \cdot 2 \cdot 7^{23} \cdot \frac{R}{m}} \cdot \sqrt{\frac{R \cdot m}{S \cdot 2^{21}}} \cdot \frac{2}{7^2} = \sqrt{8 \cdot 2^{21} \cdot \frac{R \cdot m}{S}} = \sqrt{8 \cdot 2^{21} \cdot \frac{8}{2}} = \sqrt{8 \cdot 2^{21} \cdot 4} = \sqrt{32 \cdot 2^{21}} = \sqrt{2^5 \cdot 2^{21}} = \sqrt{2^{26}} = 2^{13}$$

$$= \sqrt{32 \cdot 2^{21}} \cdot 2 \cdot 7^{18} = 2^{13} \cdot 2 \cdot 7^{18} = 2^{14} \cdot 7^{18}$$

$$5mk = 2 \cdot 7^{14} \cdot 7^{18}$$

$$ab = 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$bc = 2^{18} \cdot 7^{18}$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{23}$$

$$a = 2 \cdot 7 \Rightarrow c = 2 \cdot 7 \cdot a = 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 7 = 2^2 \cdot 7^2$$

$$a^2 = 2^2 \cdot 7^2 \Rightarrow a = 2 \cdot 7$$

$$\frac{a+b}{a^2-4ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-3ab} = \frac{a+b}{m(a+b)^2-3ab} = \frac{a+b}{m(a+b)^2-3ab}$$

$$\frac{10+10}{40000-30} = \frac{20}{39970} = \frac{2}{3997}$$

$$\frac{1000+1000}{12000^2-3 \cdot 1000 \cdot 1000} = \frac{2000}{119990000} = \frac{2}{11999000}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

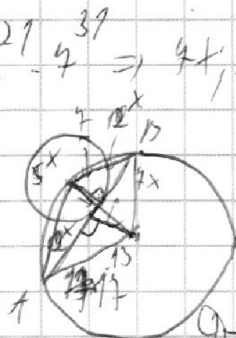
$$2^{15} \cdot 7^{11}, 16; 2^{17} \cdot 7^{18}, 16; 2^{25} \cdot 7^{55}$$

$$nb > k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}, b = m \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}, 16 = l \cdot 2^{25} \cdot 7^{55}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{m}{R} \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} \Rightarrow c = \frac{m}{R} \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot a = 1 \cdot \frac{m}{R} \cdot a^2 = 2^{27} \cdot 7^{39} \Rightarrow 4x, 13x$$

$$a = \sqrt{\frac{2^{17} \cdot 7^{18} \cdot R}{R \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}}} = 1, c = 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot \sqrt{\frac{m}{R} \cdot 2^{27} \cdot 7^{39}}$$

$$b = \frac{R \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}}{a} = \frac{R \cdot 2^{15} \cdot 7^{11}}{2^{17} \cdot 7^{18} \cdot \sqrt{\frac{m}{R} \cdot 2^{27} \cdot 7^{39}}}$$



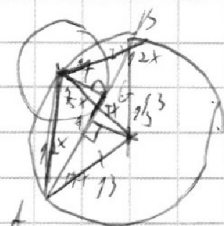
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

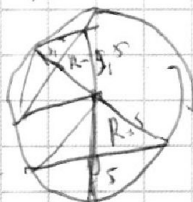
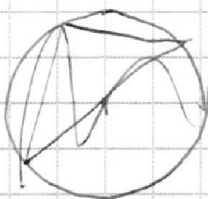
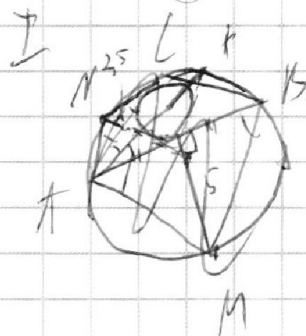
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 11x + y - 86 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 1)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 1)^2 - 16) \leq 0$$

$$y = -11x + 86$$



$$\frac{360^\circ - 22^\circ - 22^\circ}{2} = 150^\circ - 22^\circ = 128^\circ$$

$$AC = \sqrt{R^2 - R^2 + (R - 6,25)}$$

$$\frac{AC}{AB} = \sqrt{\frac{5R - 6,25}{10R - 25}} = \sqrt{\frac{R - 1,25}{2R - 5}}$$



$$\frac{AC}{AB} = \sqrt{\frac{R - 1,25}{2R - 5}} = \frac{BA}{BL} \cdot \frac{CL}{BL}$$