



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 страница 1 из 1 (нумерация отдельных по каждому заданию)

Пусть $a = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3} \cdot p_1$
 $b = 2^{\beta_1} 3^{\beta_2} 5^{\beta_3} \cdot p_2$
 $c = 2^{\gamma_1} 3^{\gamma_2} 5^{\gamma_3} \cdot p_3$, $p_i \notin \{2, 3, 5\}$

$$\begin{array}{l} ab : 2^{\alpha_1+\beta_1} 3^{\alpha_2+\beta_2} 5^{\alpha_3+\beta_3} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1+\beta_1 \geq 6, & \alpha_2+\beta_2 \geq 13, & \alpha_3+\beta_3 \geq 11 \end{cases} \\ bc : 2^{\beta_1+\gamma_1} 3^{\beta_2+\gamma_2} 5^{\beta_3+\gamma_3} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1+\gamma_1 \geq 14, & \beta_2+\gamma_2 \geq 21, & \beta_3+\gamma_3 \geq 13 \end{cases} \\ ac : 2^{\alpha_1+\gamma_1} 3^{\alpha_2+\gamma_2} 5^{\alpha_3+\gamma_3} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1+\gamma_1 \geq 16, & \alpha_2+\gamma_2 \geq 25, & \alpha_3+\gamma_3 \geq 28 \end{cases} \end{array}$$

$abc = 2^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1} 3^{\alpha_2+\beta_2+\gamma_2} 5^{\alpha_3+\beta_3+\gamma_3} p_1 p_2 p_3$
 При минимальном abc $p_1 = p_2 = p_3 = 1$

ИЗ ① $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 18$ пример на 18
 $(\alpha_1 = 4, \beta_1 = 2, \gamma_1 = 12)$

ИЗ ② $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 29,5$, $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow$
 $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 30$
 пример на 30 $(\alpha_2 = 9, \beta_2 = 4, \gamma_2 = 17)$

ИЗ ③ $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 26$
 Предположим $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 26$
 Тогда $\begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 = 11 \\ \beta_3 + \gamma_3 = 13 \\ \alpha_3 + \gamma_3 = 28 \end{cases} \Rightarrow \beta_3 = -2$ противоречие, $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 27$

Предположим $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 27$
 $\begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 = x \\ \beta_3 + \gamma_3 = y \\ \alpha_3 + \gamma_3 = z \end{cases} \Rightarrow \beta_3 = \frac{x+y-z}{2}$, $x+y+z = 54$
 $\beta_3 = \frac{54-28}{2} \leq -1$ противоречие

Значит $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 28$ пример на 28 $\alpha_3 = 13, \beta_3 = 0, \gamma_3 = 15$

Наименьшее возможное значение $abc = 2^{18} 3^{30} 5^{28}$
 пример $a = 2^4 3^9 5^{13}$, $b = 2^2 3^4$, $c = 2^{12} 3^{17} 5^{15}$

Ответ: $2^{18} 3^{30} 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \arcsin(\sin x) = x - 2\pi$$

$$\arcsin(\sin x) = \frac{x - 2\pi}{5}$$

$$\sin x = t$$

$$x = \arcsin t + 2\pi k$$

$$\arcsin t = \frac{\arcsin t + 2\pi(k-1)}{5}$$

$$4 \arcsin t = 2\pi(k-1)$$

$$\arcsin t = \frac{\pi(k-1)}{2}$$

$$\arcsin t = \frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}$$

$$t = \pm 1$$

$$\sqrt{81 - 63}$$

$$\sqrt{18}$$

$$3\sqrt{2}$$

$$k=0$$

$$k=2$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{1}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{2} + 4\pi \\ x &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\arcsin t = \frac{\pi - \arcsin t + 2\pi k - 2\pi}{5}$$

$$6 \arcsin t = \pi + 2\pi(k-1)$$

$$\arcsin t = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi(k-1)}{3}$$

$$x = \pi - \arcsin t + 2\pi k$$

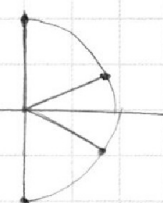
$$\arcsin t = \frac{\pi}{2} \quad k=2$$

$$\arcsin t = \frac{\pi}{6} \quad k=1$$

$$\arcsin t = \frac{\pi}{6} \quad k=0$$

$$\arcsin t = -\frac{\pi}{2} \quad k=-1$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{2} + 4\pi \\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi \\ \frac{7\pi}{6} \\ \frac{3\pi}{2} - 2\pi = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



$$\frac{5\pi}{6}$$

$$y^2 + 18y + 81 = 4$$

$$(y-9)^2$$

$$5x + 6ay - 6 = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + (y+9)^2 = 4$$

$$\frac{1}{a} < -5$$

$$a > -\frac{1}{5}$$

$$-\frac{18\sqrt{2}}{5} a < 1$$

$$a > \frac{5}{-18\sqrt{2}}$$

$$x_3 + y_3 + z_3$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} \\ \frac{5\pi}{6} \\ \frac{7\pi}{6} \\ \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

$$54 - 2 \cdot 28 \quad x + y + z = 54$$

$$54 - 56$$

$$\frac{5\pi}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

134

$$5x + 6ay^2 - 6 = 0$$

$$a = 0$$

$$a \neq 0$$

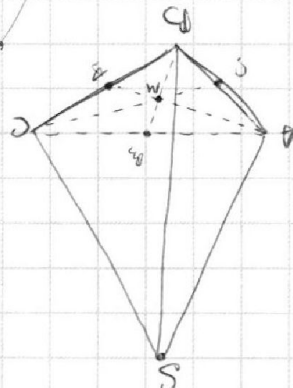
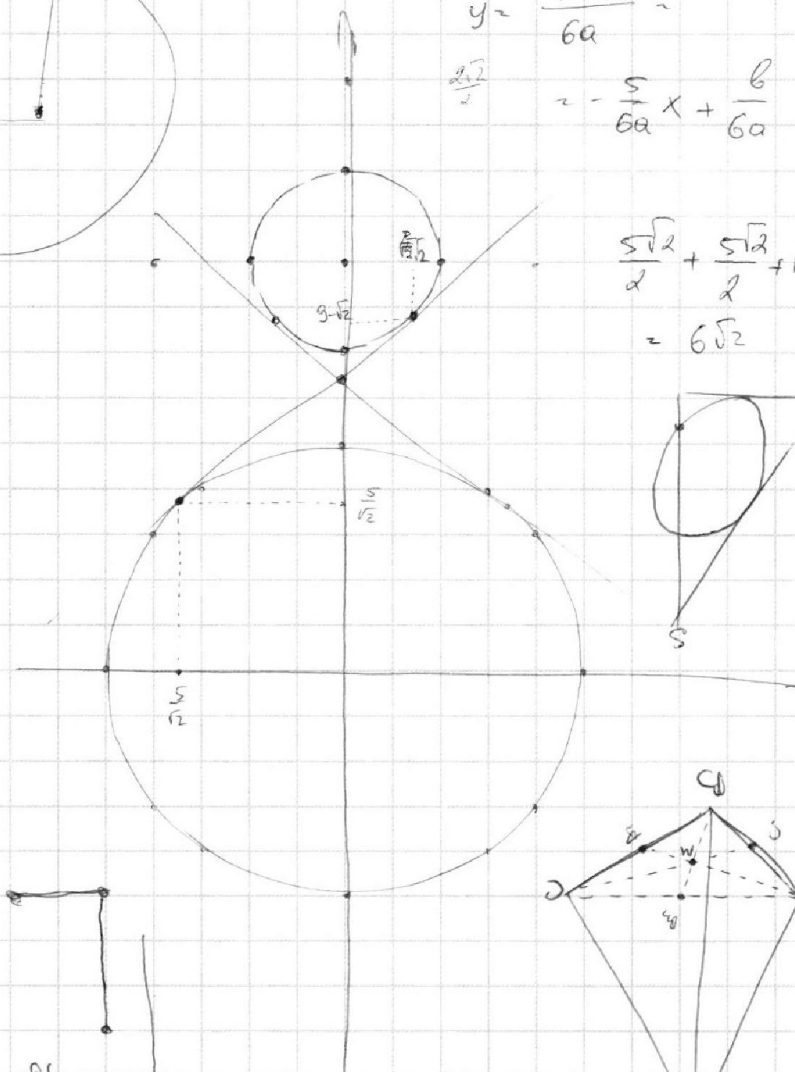
$$y = \frac{b - 5x}{6a}$$
$$= -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$$

$$\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} =$$
$$= 6\sqrt{2}$$

$$\log_3 x - 6 \log_3 11 = \log_3 \frac{1}{121} - 5$$
$$\log_3 (0.5y) + \log_3 11 = \log_3 \frac{1}{121} - 5$$
$$\log_3 (0.5y) = \log_3 \frac{1}{121} - 5 - \log_3 11$$
$$\log_3 (0.5y) = \log_3 \frac{1}{121 \cdot 11} - 5$$
$$\log_3 (0.5y) = \log_3 \frac{1}{1331} - 5$$
$$\log_3 (0.5y) = \log_3 \frac{1}{1331} - \log_3 3^5$$
$$\log_3 (0.5y) = \log_3 \frac{1}{1331 \cdot 243}$$
$$\log_3 (0.5y) = \log_3 \frac{1}{322677}$$
$$0.5y = \frac{1}{322677}$$
$$y = \frac{2}{322677}$$

$$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$$

$$x \neq 0$$
$$x > 0$$
$$y > 0$$
$$y \neq 2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

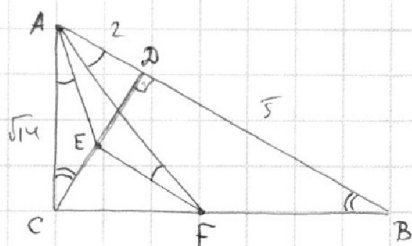
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2 страница 1 из 1



$\angle CAE = \angle EFA$ как угол между кас AC и хордой AE

$\angle EFA = \angle FAB$ как накрест лежащие

$\angle ACD = \angle CBA$ ($\triangle ABC$ прямоугол, CD высота)

$\triangle CAE \sim \triangle BAF$ по двум углам

$$\frac{CE}{BF} = \frac{AC}{AB}$$

Получаем отрезки приков НЧО $AD = 5 \Rightarrow AB = 7 \Rightarrow AD = 2 \Rightarrow CD = \sqrt{10}$
 $AC = \sqrt{14}$, $BC = \sqrt{35}$

$$\frac{CE}{BF} = \frac{\sqrt{14}}{7} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \Rightarrow BF = CE \sqrt{\frac{7}{2}}$$

ИЗ $\triangle CEF \sim \triangle CDB$: $\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB}$

$$\frac{CE}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{35} - CE \sqrt{\frac{7}{2}}}{\sqrt{35}}$$

$$CE \sqrt{\frac{2}{7}} + CE \frac{1}{\sqrt{10}} = 1 \Rightarrow CE = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$S_{\triangle CEF} = \frac{5\sqrt{10}}{8} \quad (EF = 2,5)$$

$$S_{\triangle ACD} = \sqrt{10}$$

$$S_{\triangle ACD} : S_{\triangle CEF} = 8 : 5$$

Ответ: 8 : 5

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 страница 1 из 1

$$10 \arcsin(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 10 \arcsin(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$5 \arcsin(\sin x) = x - 2\pi$$

, заменим $\sin x = t \Rightarrow$

$$1) \begin{cases} x = \arcsin t + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x = \pi - \arcsin t + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$1) 5 \arcsin t = \arcsin t + 2\pi(k-1)$$

$$\arcsin t = \frac{\pi(k-1)}{2}, \arcsin t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$k=0$	$\arcsin t = -\frac{\pi}{2}$	$x = -\frac{\pi}{2}$
$k=1$	$\arcsin t = 0$	$x = 2\pi$
$k=2$	$\arcsin t = \frac{\pi}{2}$	$x = \frac{\pi}{2} + 4\pi$

$$2) 5 \arcsin t = \pi - \arcsin t + 2\pi(k-1)$$

$$\arcsin t = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi(k-1)}{3}, \arcsin t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$k=-1$	$\arcsin t = -\frac{\pi}{2}$	$x = -\frac{\pi}{2}$
$k=0$	$\arcsin t = -\frac{\pi}{6}$	$x = -\frac{\pi}{6}$
$k=1$	$\arcsin t = \frac{\pi}{6}$	$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi$
$k=2$	$\arcsin t = \frac{\pi}{2}$	$x = \frac{\pi}{2} + 4\pi$

$$\text{Ответ: } \left\{-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}; 2\pi; \frac{5\pi}{6} + 2\pi; \frac{\pi}{2} + 4\pi\right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

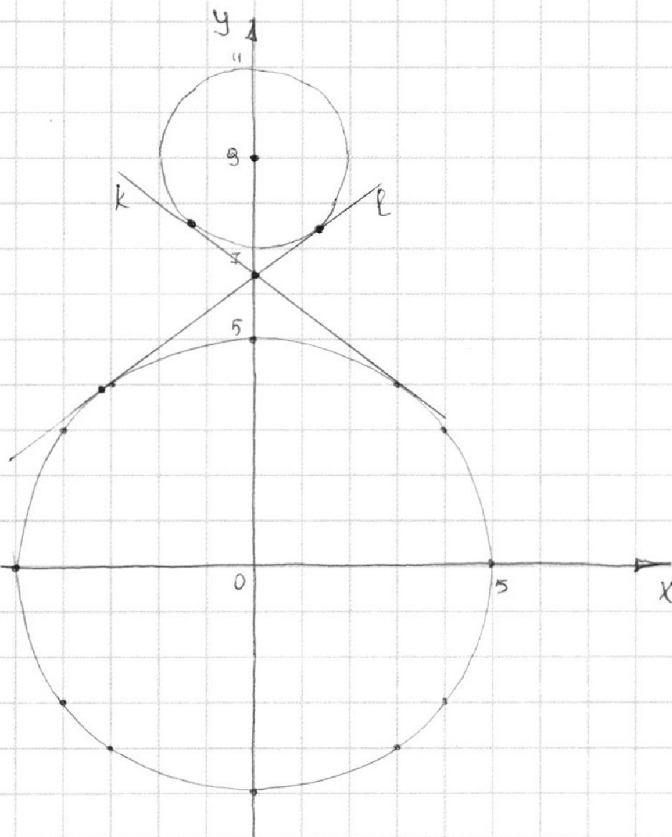
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 страница 1 из 2



$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

$$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \quad - \text{ две окружности,}$$

$$\omega_1: \text{центр } O(0,0), R_1 = 5$$

$$\omega_2: \text{центр } B(0,9), R_2 = 2$$

$$5x + 6ay - b = 0 \quad \text{прямая}$$

При $a = 0$ заметим, что $b = 0$ удовлетворяет условию, т.е.
прямая $x = 0$ пересекает окр-ты в 4х точках

Пусть $a \neq 0$, тогда

$$y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a} \quad \text{т.к. } b \text{ выбирается произвольно, то } a \text{ определяет}$$

только наклон прямой. Для любого

а подбором b можно перевести прямую в любую парам...

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

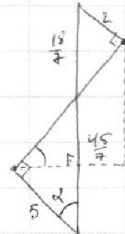
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 страница 2 из 2

Найти k и l общие внутренние касательные к
окр-там

Из графика следует, что для любой прямой, коэфф
наклона которой больше 1 или меньше k (с у-знаком)
параллельным переносом можно добиться 4х точек
пересечения

Для прямой из ур. этому условию так сказать
невозм.



$$\tan \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{7}$$

Решая нелинейную алгебраическую задачу
получаем $\tan \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{7}$, т.е. коэфф наклона $l = \frac{3\sqrt{2}}{7}$
 $k = -\frac{3\sqrt{2}}{7}$

$$-\frac{5}{6a} > \frac{3\sqrt{2}}{7}$$

$$-\frac{5}{6a} < -\frac{3\sqrt{2}}{7}$$

$$\frac{1}{a} < \frac{18\sqrt{2}}{5}$$

$$\frac{1}{a} > \frac{18\sqrt{2}}{5}$$

$$0 > a > -\frac{5}{18\sqrt{2}}$$

$$0 < a < \frac{5}{18\sqrt{2}}$$

$a = 0$ также подходит

Ответ: $\left(-\frac{5}{18\sqrt{2}}; \frac{5}{18\sqrt{2}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x 3 \cdot \frac{1}{121} - 5, \quad x > 0, x \neq 1$

$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_x 11} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\log_x 11} - 5, \quad \log_x 11 = t$

$t^4 - \frac{16}{3}t^{-1} + 5 = 0, \quad t \neq 0 \text{ т.к. } x \neq 1$

(1) $t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$ ровно одно решение, $x = 11^t$
ровно одно решение искомого

$\log_{0,5y}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,5y} 3 \cdot (11^{-13}) - 5, \quad y > 0, y \neq 2$

$\log_{0,5y}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{0,5y} 11} = -\frac{13}{3} \log_{0,5y} 11 - 5, \quad \log_{0,5y} 11 = k$

$k^4 + \frac{1}{k} = -\frac{13}{3}k - 5$

$k^4 + \frac{16}{3} \frac{1}{k} + 5 = 0, \quad k \neq 0, \text{ т.к. } 0,5y \neq 1$

(2) $k^5 + 5k + \frac{16}{3} = 0$ ровно одно решение, $y = 2 \cdot 11^k$
ровно одно решение искомого

Заметим, что если a - корень (1), то $(-a)$ - корень (2),
т.е. $k + t = 0$

$xy = 11^t \cdot 2 \cdot 11^k = 2 \cdot 11^{t+k} = 2 \cdot 11^0 = 2$

Ответ: 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

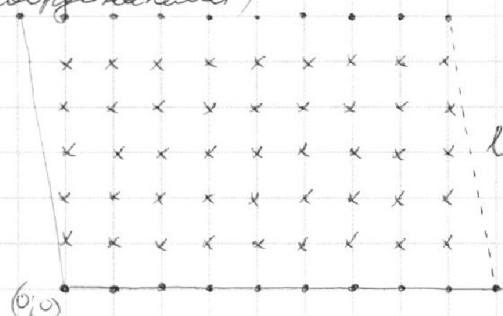


№6 страница 1 из 1

Нетрудно заметить, что для точек $(x_1; y_1)$

ГМТ $(x_2; y_2)$ удовлетворяющих $6(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 48$ -
прямая, проходящая через $(x_1 + 8; y_1)$ с коэф-ом
наклона -6 (Точка $(x_1 + 8; y_1)$ очев. подходит, отклонив
получается из неё шагом на и вправо и на
и вниз)

Заметим, что такая прямая пересекает параллелограмм
не более, чем в 16 ^{целых} точках $(90/6 + 1)$. Ровно в
16 titik пересекает нижнее основание в целых точках
(здесь и ранее целая точка - точка с целочисленными
координатами).



для $x = 16$ пар
для $x = 15$ пар
(для x ГМТ пер
ост не 6 цел. точек)

Заметим, что для точек, лежащих правее l не найдётся
ни одной пары уд. усл. Для каждой ^{целой точки} l и
правее l найдётся 16 точек, если точка лежит
на ^{нижн.} основании или на прямой, параллельной нижней основе
и пересекающей боковые в целых точках (•) или 15 точек
для всех других точек (x)

16 прямых по 10 точек по 16 пар
15 прямоугольников по 45 точек по 15 пар

Итого $16^2 \cdot 10 + 15^2 \cdot 45 = 2560 + 225 \cdot 45 = 2560 + 10125 =$
 $= 12685$

Ответ: 12685

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

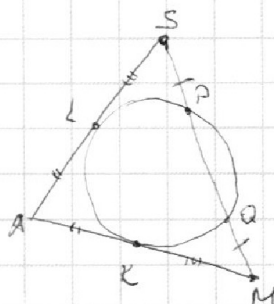
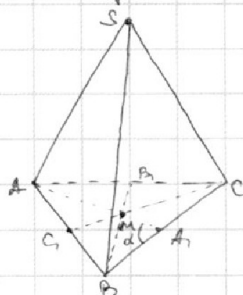
[illegible]

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

27

Страница 1 из 2



В ASM ceremony саботажного ASM —
опр. через L, K, P, Q

$AL = AK$ отрезки кас
 $SQ = MP$ суммы равны

$$LS^2 = SP \cdot SQ = QM \cdot MP = MK^2 \Rightarrow LS = MK \text{ (кас. по внем. зрасть)}$$

$AS = AM$, $\triangle ASM$ — равнобедр.

$$AA_1 = \frac{3}{2} \quad AM = \frac{3}{2} \quad AS = \frac{3}{2} \quad BC = 30$$

$$\Delta \int_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AA_1 \cdot \sin \alpha$$

$$180 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 30 \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{150}{300} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} = 0,6 \Rightarrow \cos \alpha = 0,8$$

20. r. cos $AB^2 = 900 + 100 - 0,4 \cdot 30 \cdot 10 = 880$
~~AB~~ $AB = \sqrt{880}$

$$AC^2 = 900 + 100 + 0,4 \cdot 30 \cdot 10 = \sqrt{1120}$$

$$\text{медiana}^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}, \quad a=20, \quad b=\sqrt{380}, \quad c=\sqrt{1120}$$

$$\text{Выразив через } z = \frac{(2a^2 + 2b^2 - c^2)(2b^2 + 2c^2 - a^2)(2a^2 + 2c^2 - b^2)}{4a^2 b^2 c^2}$$

$$= (4a^2b^2 + 4a^2c^2 - 2a^4 + 4b^4 + 4b^2c^2 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^4 + a^2c^2)(2a^2 + 2c^2 - b^2) + (2a^2b^2 + 5a^2c^2 + 2b^2c^2 + 4b^4 - 2a^4 - 2c^4)(2a^2 + 2c^2 - b^2) =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7 страница 2 из 2

$$\begin{aligned} &= 4a^4 + 10a^4c^2 + 4a^2b^2c^2 + 8a^2b^4 - 4a^6 - 4a^2c^4 + \\ &+ 2b^4 4a^2b^2c^2 + 10a^2c^4 + 4b^2c^4 + 2b^4c^2 - 4a^4c^2 - 4c^6 + \\ &- 2a^2b^4 - 5a^2b^2c^2 - 2b^4c^2 - 4b^6 + 2a^4b^2 + 2b^2c^4 = \end{aligned}$$

~

$$\begin{aligned} a &= 20 \\ b &= \sqrt{810} \\ c &= \sqrt{1120} \end{aligned}$$



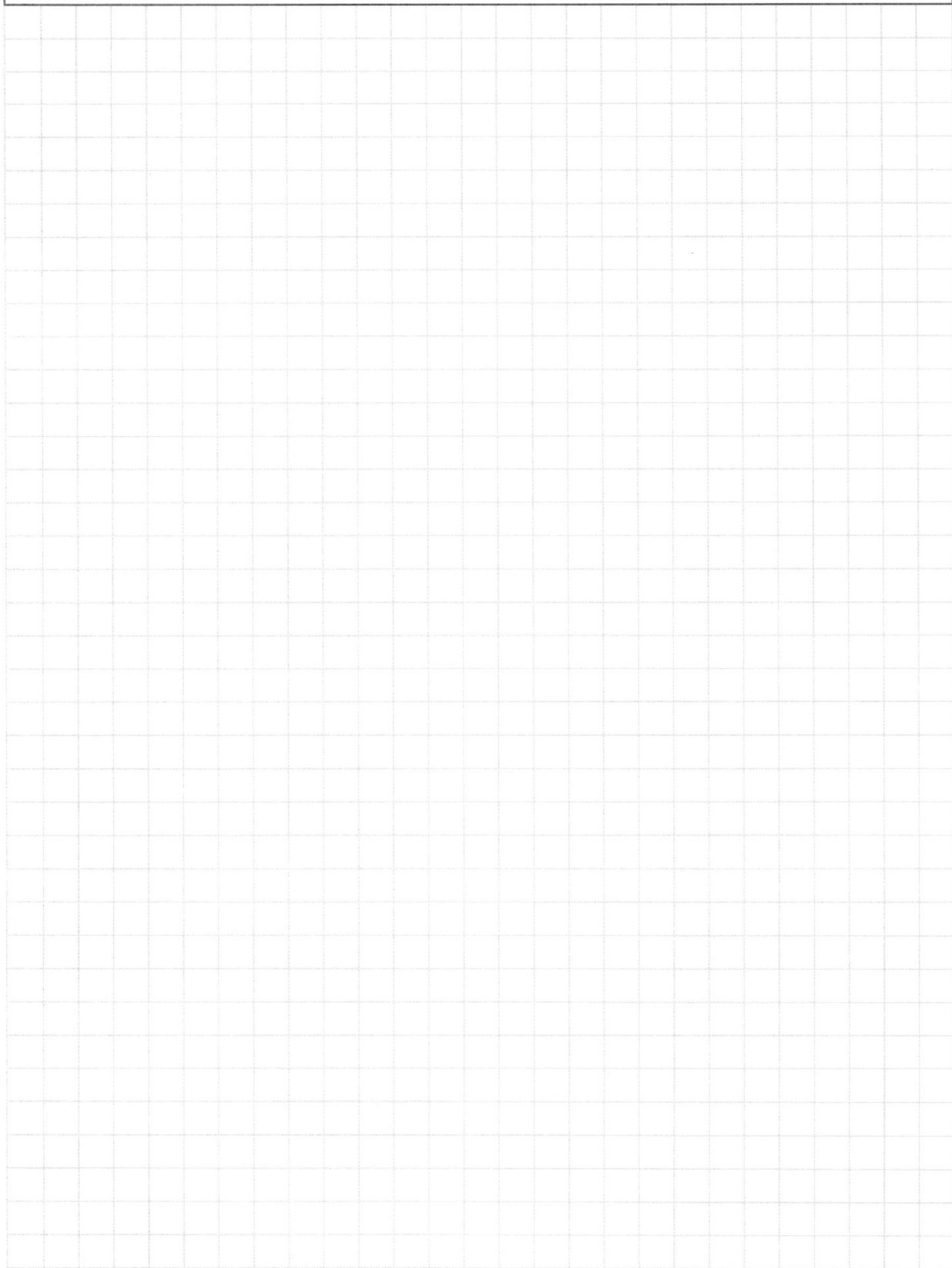
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

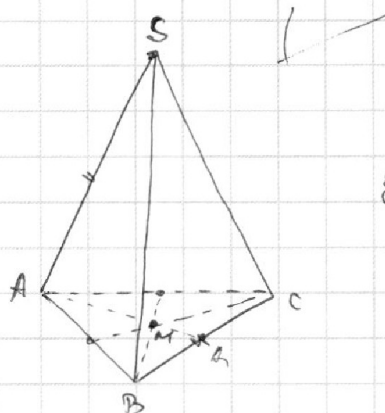
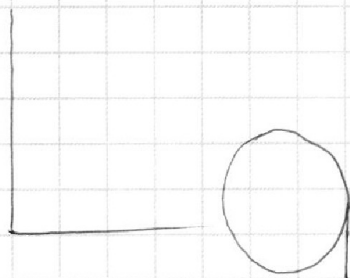
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$2a^2 \quad 4a^2 b^2$$

$$(2a^2 + 2b^2 - c^2)(2b^2 + 2c^2 - a^2)(2a^2 + 2c^2 - b^2)$$



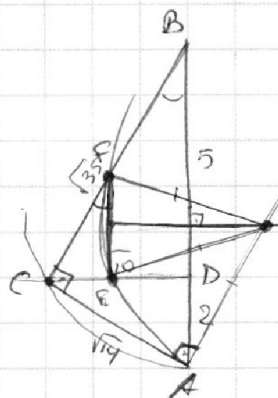
$$1000$$

$$S_{\triangle ABC} = 180$$

$$SA = \frac{1}{2} BC$$

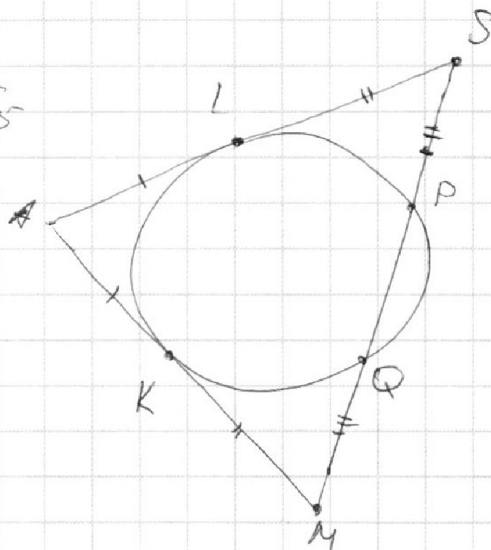
$$AA_1 = \frac{3}{2} AS$$

$$AM = AS$$



$$\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{14}}{2} = \sqrt{2.5}$$



$$\frac{BC \cdot AA_1 \cdot \sin \angle B C A A_1 \cdot \sin \angle C A A_1 \cdot \sin \angle A A_1 B}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot BC \cdot 2AA_1 \cdot \sin \angle B C A A_1 \cdot \sin \angle C A A_1 \cdot \sin \angle A A_1 B$$

is

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ab bc 38

17

$\alpha_2 = 9$
 $\beta_2 = 4$
 $\gamma_2 = 17$

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\arccos(\sin x) = 0,9\pi - 0,2x$$

$$0 \leq 9\pi - 2x \leq 20\pi$$

$$0 \geq 2x - 9\pi \geq -20\pi$$

$$\sin x = t$$

$$x = \arcsin t + 2\pi k$$

$$\alpha_1 + \beta_1 \geq 6$$

$$\beta_1 + \gamma_1 \geq 14$$

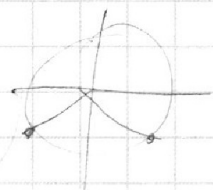
$$\alpha_1 + \gamma_1 \geq 16$$

22

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \geq 18$$

$$\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_2 \geq 30$$

$$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \geq 26$$



$$\alpha_2 + \beta_2 \geq 24$$

$$\alpha_2 + \beta_2 \geq 13$$

$$\beta_2 + \gamma_2 \geq 21$$

$$\gamma_2 + \alpha_2 \geq 25$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$$

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3$$

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$$

$$\alpha_3 + \beta_3 \geq 11$$

$$\beta_3 + \gamma_3 \geq 13$$

$$\gamma_3 + \alpha_3 \geq 28$$

$$x \in [0; \frac{\pi}{2}]$$

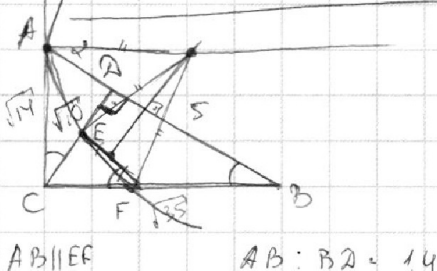
$$\cos = 1$$

$$\alpha_1 = 4$$

$$\beta_1 = 2$$

$$\gamma_1 = 12$$

$$abc \geq 2^{18} 3^{30} 5^{26}$$



$$\frac{AD \cdot CD}{CE \cdot EF}$$

$$\frac{AC \cdot CD}{CF \cdot FE}$$

$$\frac{AD \cdot CD}{CE \cdot EF} = \frac{AC \cdot CD}{CF \cdot FE}$$

$$\frac{AD}{CE} = \frac{AC}{CF}$$

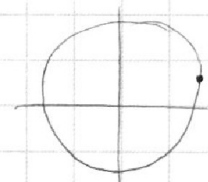
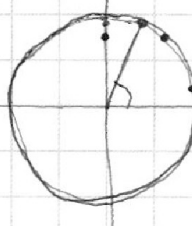
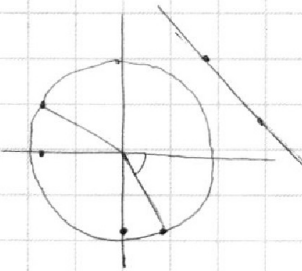
$$\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x) = 0,9\pi - 0,2x$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

$$10 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x) \right) = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 10 \arcsin(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$10 \arcsin(\sin x) = 2x - 4\pi$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\log_4 x - 6 \log_4 x = \log_4 x^{\frac{1}{12}} - 5$$

$$\log_4 x - \frac{6}{\log_4 x} = -2 \log_4 x^{\frac{1}{12}} - 5 = -2 \frac{1}{3} \log_4 x^{\frac{1}{12}} - 5$$

$$\log_4 x - \frac{6}{\log_4 x} = -\frac{2}{3} \log_4 x^{\frac{1}{12}} - 5, \quad t = \log_4 x$$

$$t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3}t - 5$$

$$\log_4 (\log_4 x) + \log_4 x = \log_4 x^{\frac{1}{12}} - 5$$

$$\log_4 x + \frac{1}{\log_4 x} = -13 \frac{1}{3} \log_4 x^{\frac{1}{12}} - 5$$

$$k^4 + \frac{1}{k} = \frac{-13}{3}k - 5$$

$$k^4 + \left(\frac{13}{3} + \frac{1}{3}\right) \frac{1}{k} + 5 = 0$$

$$k^4 + \frac{16}{3k} + 5 = 0$$

$$t^4 + \left(-\frac{18}{3} + \frac{2}{3}\right) t + \frac{1}{3} + 5 = 0$$

$$t^4 - \frac{16}{3}t + 5 = 0$$

$$t^5 k^5 + 5(k+t) = 0$$

$$(t+k)(t^4 - t^3 k + t^2 k^2 - t k^3 + k^4) + 5(t+k) = 0$$

$$-\frac{2}{3} \log_4 x$$

$$t^5 k^5$$

$$0.5y = z$$

$$zx = 0.5ky$$

$$t+k = \log_4 x^2$$

$$x^2 = t+k$$

$$ky = t+k$$

$$k+t=0$$

$$k \neq 0$$

$$k^5 + 5k + \frac{16}{3} = 0$$

$$t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$$