



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

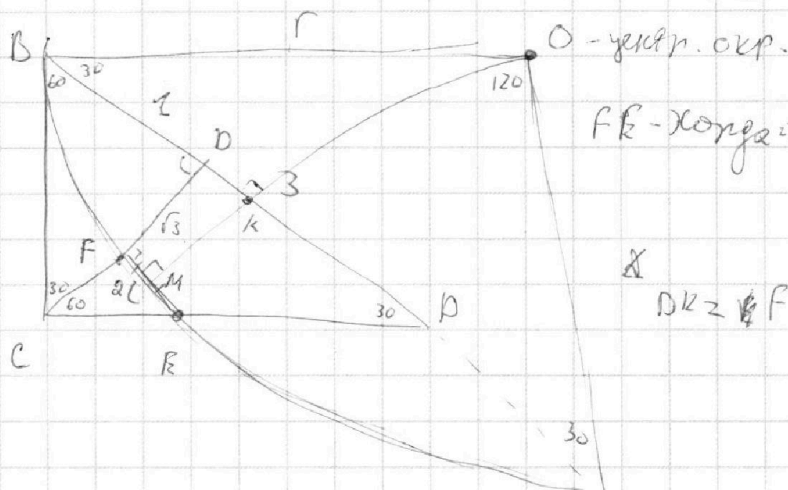
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\triangle ODB \sim \triangle I$ 2) $CO \approx \sqrt{3} \cdot 1 \approx \sqrt{3} \Rightarrow \angle DCA \approx 60^\circ \Rightarrow \angle A \approx 30^\circ \dots \angle OBA \approx 30^\circ$
 (т.к. $\triangle ODB \sim \triangle I$) (1)

$$FE = 21$$



FK-Kongruenz $\Rightarrow$ $\begin{matrix} GM \mid FK \\ + \\ FM \mid FM \end{matrix}$

DRZ FM, TK FM KD-ming.

$$(1) \text{ Bk: } r \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \cdot L = 4 r \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot r = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2L}{\sqrt{3}} = \frac{2+2L}{\sqrt{3}} = \frac{2+2 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$(L+1)^2 + \left(\frac{r}{7}\right)^2 2r^2 = \cancel{4r^2 + 3r^2} \quad (2+1) = \frac{3}{4}r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{46^2 + 86 + \frac{4}{3}}{\frac{3}{3}}$$

$$F_0^2 = \Gamma^2 = F_M^2 + M_0^2$$

$$mO_2 \quad \frac{r}{2} + \left(\sqrt{3} - \frac{2L}{3} \cdot \sqrt{3} \right) = \frac{r}{2} + \frac{3-2L}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

$$r^2 L^2 + \left(\frac{r}{2} + \frac{3-2L}{\sqrt{3}} \right)^2 / -3$$

$$3 + 6i + 2i^2 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}} + \frac{3-2i}{\sqrt{3}} \right)^2$$

$$9 + 18c + 6c^2 - (4 - c)^2$$

$$9 + 18C + 6C^2 = 16 - 8C + C^2$$

$$5c^2 + 26c - 7 = 0$$

$$D = 169 + 35 = 204$$

~~$$z = \frac{-13 \pm \sqrt{204}}{5}$$~~

$$3r^2 = 3(2 + (4 - 2)^2)$$

$$3f^2 = 16 - 2L + 4L^2$$

$$16(=12 \cdot 2) \cdot \frac{3}{4}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{CB^2}{FE^2} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{3}{2}} \right)^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{16}{3}$$

(negative)

15

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ x^2 + (y-6)^2 = 2^2 \end{cases}$$

$$x^2 + (y-6)^2 = 2^2$$

по построим график

похоже, что не суж. точки
то... или упрощаем

$$упрощаем: -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b \geq y$$

найдем уравнение касательной

найдем уравнение
касательной

$$y = ax + b$$

AB-кас. $O, C \parallel BA \Rightarrow AC \perp BO$ и BO, CO -высоты.

$$OO_1 = 6$$

$$OC = R_1 R_2 = 3 \cdot 2 = 6 \quad \left| \begin{array}{l} 1) BA \perp OC \Rightarrow \sqrt{36-25} = 2\sqrt{11} \\ 2) BA \perp OC \Rightarrow \sqrt{36-25} = 2\sqrt{11} \end{array} \right.$$

$$a_1 \cdot \tan \alpha = -\tan(180-\alpha) = \frac{\sqrt{11}}{5}$$

способ. у точек касательной в силу симметрии

$$a_2 = \frac{\sqrt{11}}{5}$$

$$\frac{\sqrt{11}}{5} \leq \frac{-a}{2} \leq \frac{\sqrt{11}}{5} \Rightarrow \frac{2\sqrt{11}}{5} \geq a \geq \frac{-2\sqrt{11}}{5} \text{ - не подходит}$$

и тогда

$$a \in \left(-i\sqrt{11}; -\frac{2\sqrt{11}}{5}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{11}}{5}; i\sqrt{11}\right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \frac{\ln^4 x}{\ln^4 3} + \frac{6 \ln 3}{\ln x} = \frac{\ln^5 3}{2 \ln x} - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\ln^4 2}{\ln^4 3} + \frac{2 \ln 3}{\ln 2} = \frac{\ln^5 3}{2 \ln 2} - 8 \end{cases}$$

$$\text{пусть } L(x) = \log_3(x)$$

$$8x = 5y$$

$$\begin{cases} L^4 x + \frac{6}{Lx} = \frac{5}{2Lx} - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L = 2a \\ L = 5a \end{cases}$$

$$\begin{cases} L^4 z + \frac{2}{Lz} = \frac{11}{2Lz} - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8 \\ b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2b} - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^5 + 4712 = 5 - 16a \\ 2b^5 + 4712 = 11 - 16b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^5 + 7 = -16a \\ 2b^5 - 7 = -16b \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(возм. нулей)} \\ \rightarrow \text{1 корень} \end{matrix}$$

если t корень $2a^5 + 7 = -16a$, то

$-t$ — корень $2b^5 - 7 = -16b$

и

$$2a^5 + b^5 = -8(a+b)$$

и

$$a+b=0 \Rightarrow Lx + (z=0) \Rightarrow \log_3(x \cdot z) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3(x \cdot y) = 0 \Rightarrow x \cdot y = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{x \cdot y} = 1}$$



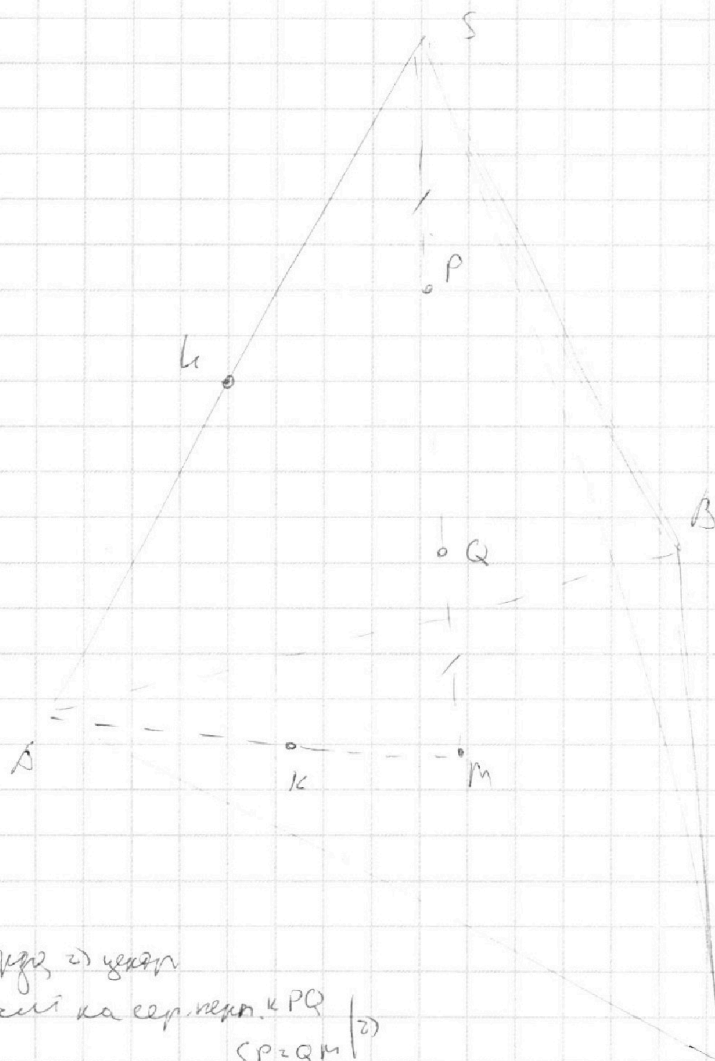
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



PQ - хорда $\Rightarrow$ центр

Ω лежит на сер-перп. к PQ
 $SP = QM \quad | \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow$ на сер-перп. к SM .



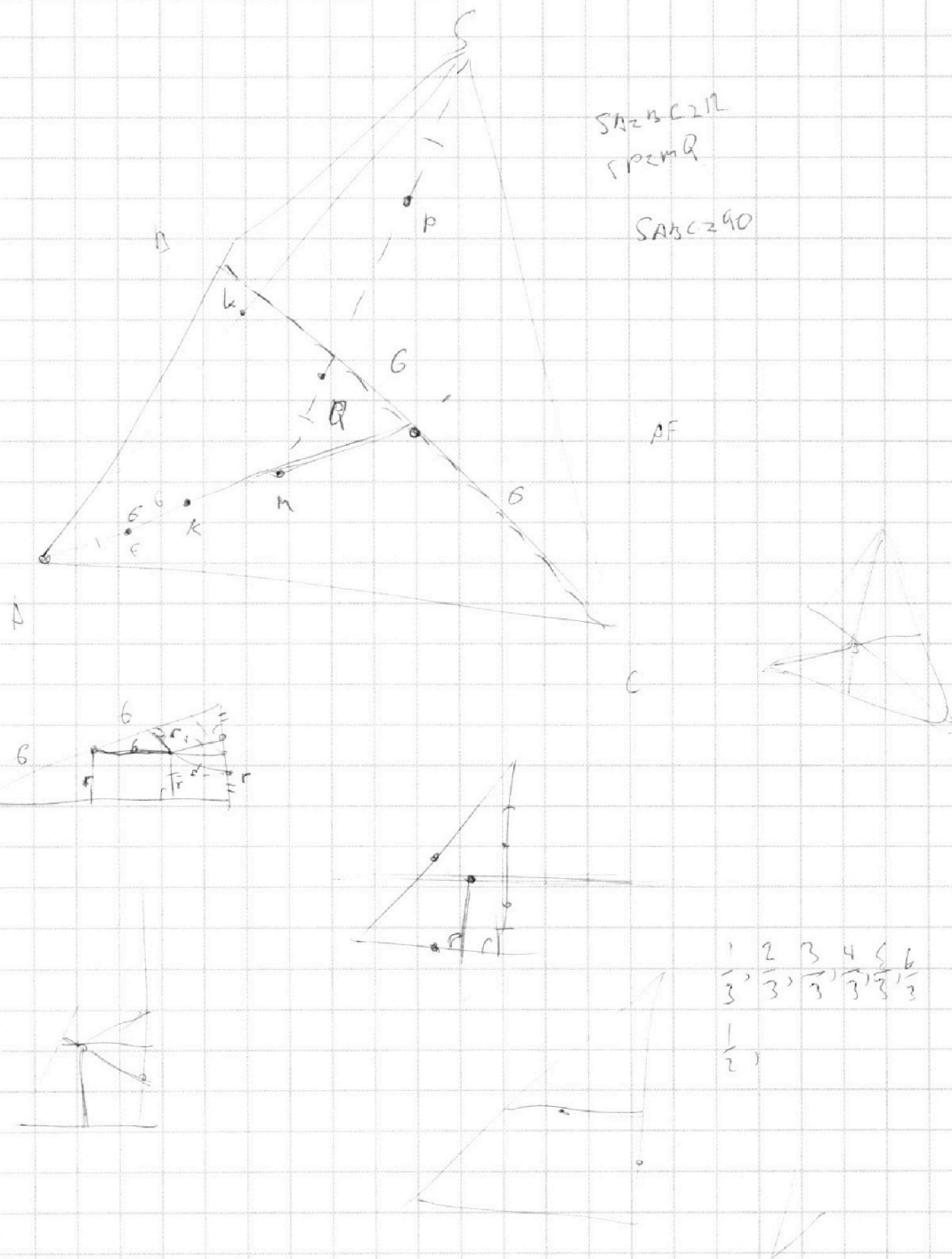
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

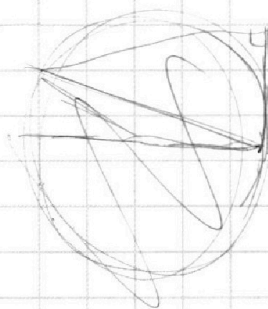
1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

$$158 = 69 + 150$$



$$16 - 8L + 6L = 9 + 18L + 6L$$

$$\left(\frac{15}{4} - \frac{1}{L}\right)^2 = 3 + 6L + 18L^2$$

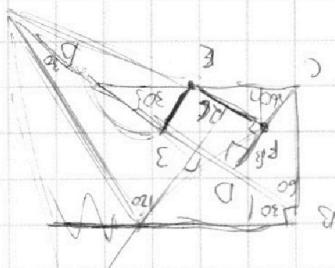
$$\left(2\frac{1}{2} + \frac{15}{L}\right)^2$$

$$4\left(5 - \frac{15}{L} + \frac{1}{L} + \frac{15}{L}\right)$$

$$316L + 18L^2 = 15$$

$$L^2 = 11$$

$$L^2 = 11 + \frac{1}{L} - \frac{3}{L} \cdot 2L \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{L}\right)$$

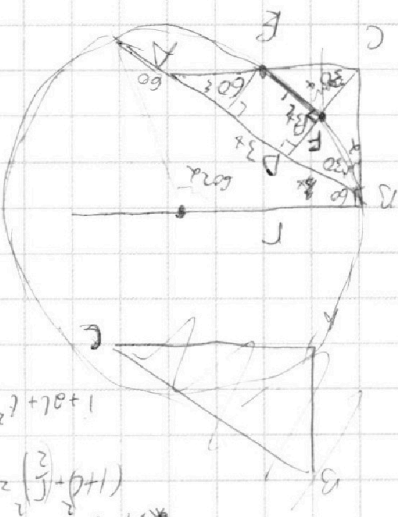


$$\frac{225}{250} = \frac{9}{10}$$

$$\frac{1}{L^2} = \frac{1}{11} + \frac{1}{L} + \frac{1}{L^2}$$

$$L^2 = \frac{1}{11} + \frac{1}{L} + \frac{1}{L^2}$$

$$AB \parallel EF$$
$$AD = \frac{1}{3} DB$$
$$3DB = AD$$



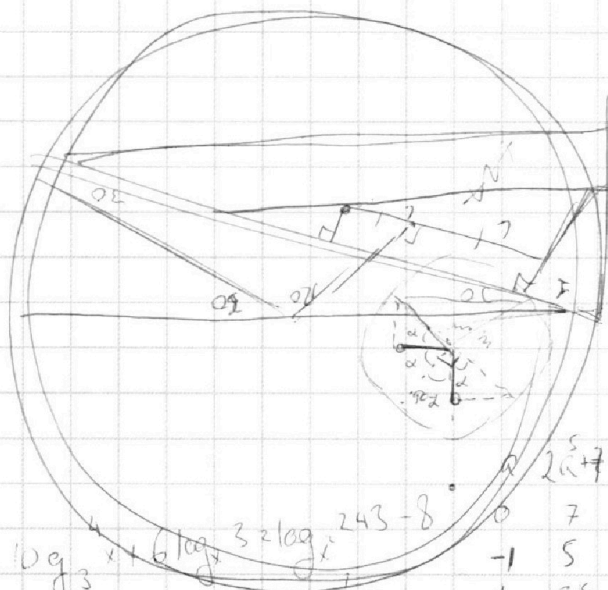
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

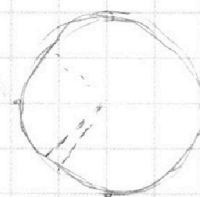
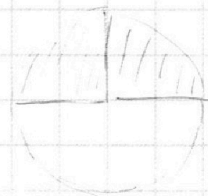
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a^5 + b^5 = -8(a+b)$$

$$2(a^4 + 8) = -7$$

$$a(a^4 + 8) = -3,5$$

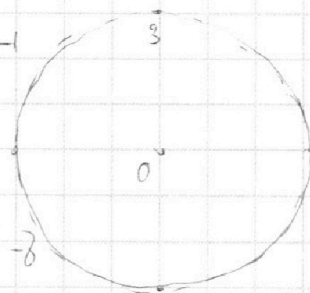
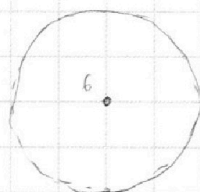


$$\begin{matrix} 2\sqrt{5}+7 & -16a \\ 0 & 7 & 0 \\ -1 & 5 & -16 \end{matrix}$$

$$8x + 29y + 5z = kx + by$$

$$a + 2y - 3b = 0$$

$$-\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b = y$$



$$243 = 81 \cdot 3 = 3^5$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_3^2 3 = \log_3^2 243 - 8$$

$$(q+r)2 = 2q + r$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + 7 \Rightarrow \frac{16}{\sqrt{2}}$$

$$2x + 3 = -6y$$

$$3x + 2y - 3z = -5x + 5y$$

$$3x + 2y - 3z = -5x + 5y$$

$$t = (8 + 10) \cdot 2$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_3^2 3 = \log_3^2 243 - 8$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_3^2 3 = \log_3^2 243 - 8$$

$$\frac{\ln^4 x}{\ln^4 3} + \frac{6 \ln 3}{\ln x} = \frac{\ln^4 3}{2 \ln x} - 8$$

$$\frac{\ln^4 (5y)}{\ln^4 3} + \frac{2 \ln 3}{\ln (5y)} = \frac{\ln^4 3}{2 \ln 5y} - 8$$

$$8y = 5$$

$$2y = 8$$

$$-180$$

$$-31$$

$$-01 + 2 = 2y - 2$$

$$-20 = 31$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin(\arcsin(\cos(x))) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2} \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2}$$



$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$2\pi = 6x + 2\pi k$$

$$x = \frac{2\pi + 2\pi k}{6}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{3}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{3} \text{ и } -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}$$

$$\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$\sin(\pi - (\frac{\pi}{2} - x)) = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$2\pi = -4x + 2\pi k$$

$$x = \frac{-2\pi + 2\pi k}{4}$$

$$(\arcsin(x): [-1; 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}])$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



кратчайшие

найдем, но что получится $a^2 b^2 c^2: 2^9 3^{10} 5^{10} : 2^{14} 3^7 5^{13} : 2^{19} 3^{18} 5^{30} =$
 $= 2^{\frac{42}{3}} 3^{\frac{41}{5}} 5^3$

т.к. мы уже НОД этих чисел 3 раза получили $2^{12} 3^{21} 5^{33}$ но
 $(2^9 3^{10} 5^{10})^2 = 2^{22} 3^{21} 5^{23}$

будем предположить такие входы (a, b, c) , найдем $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$

$a^2 b^2 c^2 : (23, 23, 23) \Rightarrow a^2 b^2 c^2 : (23, 23, 30) \Rightarrow \text{HKBH}$
 $ac : (19, 18, 30)$

минимальные произведения.

$a = (a_1, a_2, a_3)$ $a_1 + b_1 \geq 9$
 $b = (b_1, b_2, b_3)$ $a_2 + b_2 \geq 10$
 $c = (c_1, c_2, c_3)$ $a_3 + b_3 \geq 10$
 $a_1 + c_1 \geq 19$
 $a_2 + c_2 \geq 18$
 $a_3 + c_3 \geq 30$
 $b_1 + c_1 \geq 14$
 $b_2 + c_2 \geq 13$
 $b_3 + c_3 \geq 13$

$\begin{cases} a_1 + b_1 \geq 9 & a_1 + b_1 = 9 \\ a_1 + c_1 \geq 19 & \Rightarrow a_1 + c_1 = 19 \\ b_1 + c_1 \geq 14 & b_1 + c_1 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 7 \\ b_1 = 2 \\ c_1 = 12 \end{cases}$
 $\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 10 & a_2 + b_2 = 10 \\ a_2 + c_2 \geq 18 & a_2 + c_2 = 18 \\ b_2 + c_2 \geq 13 & b_2 + c_2 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 7 \\ b_2 = 3 \\ c_2 = 11 \end{cases}$
 $\begin{cases} a_3 + b_3 \geq 10 & a_3 + b_3 = 10 \\ a_3 + c_3 \geq 30 & a_3 + c_3 = 30 \\ b_3 + c_3 \geq 13 & b_3 + c_3 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = 7 \\ b_3 = 3 \\ c_3 = 11 \end{cases}$

т.к. мы
используем
сумму $a_1 + b_1 + c_1$ и
(НОД)
следующих входов
будет, когда
сумма будет не
2, минимально

EN

$\Rightarrow \begin{cases} a_3 + b_3 + c_3 \geq 30 \\ a_3 + c_3 \geq 30 \\ a_3 = 15 \\ c_3 = 15 \\ b_3 = 0 \end{cases}$

стандартно, т.к.

$a_3 + b_3 + c_3 \geq \max(a_3 + b_3, a_3 + c_3, b_3 + c_3)$

$a_3 + c_3 + b_3 \geq \frac{30+30}{2} \geq 30$
 $a_2 + b_2 + c_2 \geq \frac{7+3+11}{2} = 21$
 $a_1 + b_1 + c_1 \geq \frac{7+2+12}{2} = 21$

$\Rightarrow a^2 b^2 c^2 = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$