



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

Докажем, что при минимальном произведении $a \cdot b \cdot c$, $a = 2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot 5^{x_3}$

Предположим противное: $a = 2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot 5^{x_3} \cdot t$, где $t > 1$, $t \in \mathbb{N}$, $(t; 2) = 1$;
 $(t; 3) = 1$; $(t; 5) = 1$

Тогда рассмотрим число $a' = 2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot 5^{x_3}$. Оно удовлетворяет

условию, т.к. $a \cdot b : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$, т.е. $2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot 5^{x_3} \cdot t \cdot b : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$,

то $2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot 5^{x_3} \cdot b : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$ (т.к. $(t; 2) = 1$; $(t; 3) = 1$; $(t; 5) = 1$), т.е.

$a' \cdot b : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$.

Тогда $a \cdot b > a' \cdot b \Rightarrow a \cdot b$ - не минимально (?!)

Аналог: $b = 2^{y_1} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{y_3}$; $c = 2^{z_1} \cdot 3^{z_2} \cdot 5^{z_3}$.

Тогда:

$$a \cdot b : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 \geq 7 & (1.1) \\ x_2 + y_2 \geq 11 & (1.2) \\ x_3 + y_3 \geq 14 & (1.3) \end{cases} \quad b \cdot c : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 + z_1 \geq 13 & (2.1) \\ y_2 + z_2 \geq 15 & (2.2) \\ y_3 + z_3 \geq 18 & (2.3) \end{cases}$$

$$a \cdot c : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{15} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + z_1 \geq 14 & (3.1) \\ x_2 + z_2 \geq 17 & (3.2) \\ x_3 + z_3 \geq 15 & (3.3) \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} (1.1) + (1.2) + (1.3) : 2(x_1 + y_1 + z_1) &\geq 34 \\ (2.1) + (2.2) + (2.3) : 2(x_2 + y_2 + z_2) &\geq 43 \\ (3.1) + (3.2) + (3.3) : 2(x_3 + y_3 + z_3) &\geq 45 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a \cdot b \cdot c = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{30}$$

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

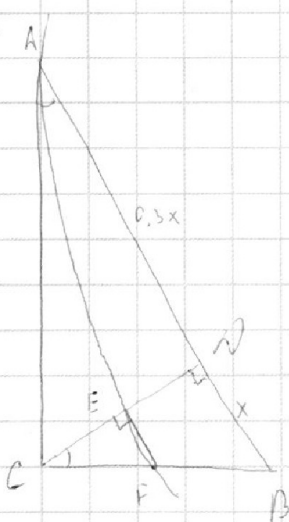
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2



$$DB = x \Rightarrow AB = 1.3x \Rightarrow AD = 0.3x$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle CAD = \angle DCB \\ 90^\circ = \angle ACD = \angle CDB \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle CDB$$

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AC}{DB} \Rightarrow DC = \sqrt{AD \cdot DB} = x \sqrt{\frac{3}{10}}$$

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{\frac{9}{100} x^2 + \frac{3}{10} x^2} = x \sqrt{\frac{39}{10}}$$

$$BC = \sqrt{CD^2 + DB^2} = \sqrt{x^2 + x^2 \cdot \frac{3}{10}} = x \sqrt{\frac{13}{10}}$$

Средняя теорема о высоте:

$$AC^2 = CF \cdot CB \Leftrightarrow CF = \frac{AC^2}{CB} = \frac{x^2 \cdot \frac{39}{10} \cdot \frac{10}{13}}{10 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{10}}} = x \cdot \frac{39 \sqrt{10}}{100 \sqrt{13}}$$

$$\left. \begin{array}{l} EF \parallel AB \\ CD \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow EF \perp CD$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle CAD = \angle DCB \\ 90^\circ = \angle CEF = \angle ACD \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle CEF, \quad k = \frac{AC}{CE} = \frac{x \sqrt{\frac{39}{10}}}{\frac{39 \sqrt{10}}{100 \sqrt{13}}}$$

$$= \frac{x \cdot \sqrt{39} \cdot 100 \cdot \sqrt{13}}{10 \cdot x \cdot 39 \cdot \sqrt{10}} = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

$$\frac{S(ADC)}{S(CEF)} = k^2 = \frac{10}{3}$$

Ответ: $\frac{10}{3}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

☐

2

☐

3

☒

4

☐

5

☐

6

☐

7

☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 Ответ

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

Найдём корни уравнения $\arccos(\sin x)$

$$\arccos(\sin x) = t \quad (\cos())$$

$$\sin x = \cos t$$

$$t = \frac{\pi}{2} - x$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\frac{(5-3)\pi}{2} = 6x$$

$$\pi = 6x \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{6} \right\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

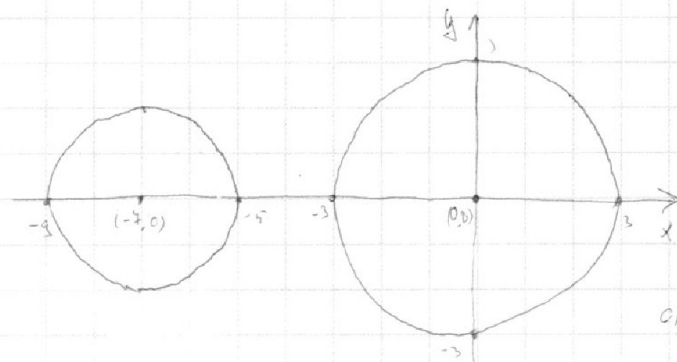
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

н 4

Для начала разберёмся со второй уравнением.

$$(x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0$$

$$\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 4 & \text{— окр-ть с центром } (-7, 0), \text{ радиусом } 2 \\ x^2 + y^2 = 9 & \text{— окр-ть с центром } (0, 0), \text{ радиусом } 3. \end{cases}$$



Любые прямые пересекаются с
окр-тью $\leq$ по 2-м точкам.

Прямая $x + 3ay - 7b = 0$ должна иметь
ровно 4 пересечения, а это значит, что
она пересекает каждый из окр-тей в 2-х точках.

То, что прямая пересекает окр-ть в 2-х точках $\Leftrightarrow \rho(\text{центр}, \text{прямая}) < R$:

$$\begin{cases} \frac{|0 + 3a \cdot 0 - 7b|}{\sqrt{9a^2 + 1}} < 3 \\ \frac{|-7 + 3a \cdot 0 - 7b|}{\sqrt{9a^2 + 1}} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |b| < \frac{3\sqrt{9a^2 + 1}}{7} \\ |b+1| < \frac{2\sqrt{9a^2 + 1}}{7} \end{cases}$$

здесь 10 пометил, т.к
или больше, но $\sqrt{9a^2 + 1} > 0$

$t = \sqrt{9a^2 + 1}$, $t \in [1; +\infty)$. Тогда задача звучит так: при каких $t \in$
 $[1; +\infty)$ $\exists b$, удов. условию: ~~$|b| < \frac{3}{7}t$~~

$$\begin{cases} |b| < \frac{3}{7}t \\ |b+1| < \frac{2}{7}t \end{cases}$$

1) Найдем t , при которых $\exists b > 0$:

$$\begin{cases} b < \frac{3}{7}t \\ b < \frac{2}{7}t - 1 \end{cases} \quad \text{Такой } b \text{ существует, если } \begin{cases} \frac{3}{7}t > 0 \\ \frac{2}{7}t - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t > \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow t > \frac{7}{2}$$

т.к если одно из них будет ≤ 0 , то b ~~один~~ ≤ 0 , и b
случае $b > 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2) Найдем, когда есть $b \in [-1; 0]$

$$\begin{cases} b > -\frac{3}{5}t \\ b < \frac{2}{7}t - 1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{3}{5}t < \frac{2}{7}t - 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{5}t < -1 \Leftrightarrow t < -\frac{5}{2}, \text{ но } t \in [0; 1] \Rightarrow \text{нет}$$

3) Найдем, когда есть $b \in (-\infty; -1)$

$$\begin{cases} b > -\frac{3}{5}t \\ b < \frac{2}{7}t - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b > -\frac{3}{5}t \\ b < \frac{2}{7}t - 1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{3}{5}t < \frac{2}{7}t - 1 \Leftrightarrow \frac{5}{7}t > 1 \Leftrightarrow t > \frac{7}{5}$$

$$\text{При таком } t: -\frac{3}{5}t < -\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{5} = -\frac{21}{25}; \quad \frac{2}{7}t - 1 > \frac{2}{5} - 1 = -\frac{3}{5} \Rightarrow b \in (-\frac{21}{25}; -\frac{3}{5})$$

3) Найдем, когда есть $b < -1$

$$\begin{cases} b > -\frac{3}{5}t \\ b < \frac{2}{7}t - 1 \end{cases} \quad \text{Такой существует, если: } \begin{cases} -\frac{3}{5}t < -1 \\ -\frac{3}{5}t - 1 < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t > \frac{5}{3} \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t > \frac{5}{3}$$

4) объединяем все случаи

$$\begin{cases} t > \frac{7}{5} \\ t > \frac{5}{3} \\ t > \frac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow t > \frac{7}{5} \Leftrightarrow \sqrt{9a^2 + 1} > \frac{4}{5} \Leftrightarrow 9a^2 + 1 > \frac{16}{25} \Leftrightarrow 9a^2 > \frac{11}{25} \Leftrightarrow a^2 > \frac{11}{225} \Leftrightarrow a > \frac{\sqrt{11}}{15} \text{ или } a < -\frac{\sqrt{11}}{15}$$

$$\Leftrightarrow a \in (-\infty; -\frac{\sqrt{11}}{15}) \cup (\frac{\sqrt{11}}{15}; +\infty)$$

$$\text{Ответ: при } a \in (-\infty; -\frac{\sqrt{11}}{15}) \cup (\frac{\sqrt{11}}{15}; +\infty)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$1) \log_7(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{(6x)} 7^3 - 4 \quad \text{ОДЗ: } x > 0; x \neq \frac{1}{6}$$

$$\log_7(6x) - \frac{2}{\log_7(6x)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\log_7(6x)} - 4$$

$$\left[\log_7(6x) = t, \text{ т.к. } 6x \neq 1, t \neq 0 \right]$$

$$t - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4 \quad | \cdot 2t$$

$$2t^2 - 4 = 3 - 8t \Leftrightarrow 2t^2 + 8t - 7 = 0 \quad (1)$$

$$2) \log_7 y + 6 \log_y 7 = \log_y (7^5) - 4 \quad \text{ОДЗ: } y > 0; y \neq 1$$

$$\left[\log_7 y = u, u \neq 0 \right]$$

$$u + \frac{6}{u} = \frac{5}{2u} - 4 \quad | \cdot 2u$$

$$2u^2 + 12 = 5 - 8u \Leftrightarrow 2u^2 + 8u + 7 = 0 \quad (2)$$

$$(1) + (2): 2(t^2 + u^2 + 4(t+u)) = 0$$

$$(t+u)(t^4 - t^3u + t^2u^2 - tu^3 + u^4 + 4) = 0$$

$$(t+u)(t^4 + u^4 - t^3u - tu^3 + 4) = 0$$

$$(t+u)(t(t^3 - u^3) - u(t^3 - u^3) + t^2u^2 + 4) = 0$$

$$(t+u)((t-u)(t^2 + tu + u^2) + t^2u^2 + 4) = 0$$

$$(t+u) \left(\underbrace{(t-u)^2}_{\substack{IV \\ 0}} \underbrace{(t^2 + tu + u^2)}_{\substack{V \\ 0}} + \underbrace{t^2u^2}_{\substack{VI \\ 0}} + \underbrace{4}_{\substack{VII \\ 0}} \right) = 0$$

III

$$t = -u$$

$$t + u = 0$$

$$\log_7(6x) + \log_7(y) = 0$$

$$\log_7(6xy) = 0$$

$$6xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{6}$$

Ур-ния (1) и (2) имеют всего

2 корня, т.к. они пер. степени.

При этом 0 не является ни одним из этих уравнений.

Тогда для этих $t_0 \neq 0$ и $u_0 \neq 0$ $\exists x, y$,
а по только это значит, $xy = \frac{1}{6}$

Ответ: $\frac{1}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

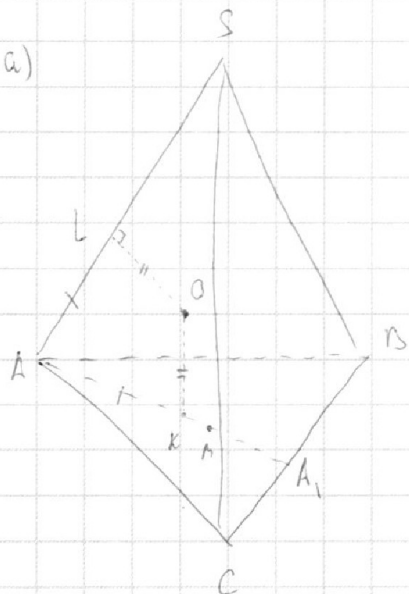
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 4

а)



$$1) OK \perp \angle BOC \Rightarrow OK \perp AM$$

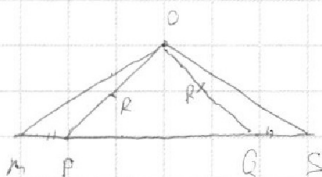
$$OL \perp AL$$

$$2) \triangle ALO; \triangle AKO. AO - \text{общая}, OL = OK - \text{радиусы},$$

$$\angle OLA = \angle OKA = 90^\circ \Rightarrow \triangle ALO = \triangle AKO \text{ (катет и гипотенуза)}$$

$$AL = KA$$

$$3) \triangle M - \text{т.б. } OSM$$



$$OP = \sqrt{R^2 + KM^2} > R$$

$$OS = \sqrt{R^2 + LS^2} > R$$

$$\Rightarrow P, Q \in MS$$

$$OP = OQ - \text{радиусы.}$$

$$MP = QS - \text{кас.}$$

$$\angle OPR = \angle OQR \text{ (о.о.р. } \angle PRQ - \text{пр.б.)}$$

$$\angle MPO = \angle SQO$$

$$\Rightarrow \triangle MPO = \triangle SQO \Rightarrow OM = OS$$

(если P, Q поменяны местами, то аналогично)

$$4) \triangle OKM; \triangle OLS$$

$$OL = OK - \text{радиусы}$$

$$OM = OS \text{ (н. 4)}$$

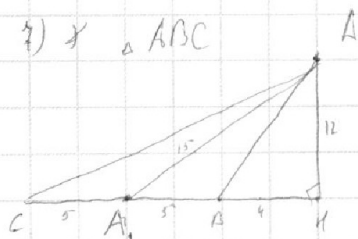
$$\angle OKM = \angle OLS = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle OSL = \triangle OKM \text{ (катет и гипотенуза)} \Rightarrow MK = LS$$

$$5) \begin{cases} AL = AK \text{ (н. 2)} \\ MK = LS \text{ (н. 4)} \end{cases} \Rightarrow AL + LS = AK + KM \Rightarrow AM = AS = 10$$

$$6) AM = \frac{2}{3} AA_1 \Rightarrow AA_1 = 15$$

$$7) \triangle ABC$$



$$S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH = 60 \Rightarrow AH = \frac{2 \cdot 60}{10} = 12$$

$$AH = \sqrt{AA_1^2 - A_1K^2} = 9 > \frac{10}{2} \Rightarrow K \text{ находится вне } \triangle ABC \text{ (иногда B)}$$

$$AB = \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{160}$$

$$AC = \sqrt{12^2 + 14^2} = \sqrt{340}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

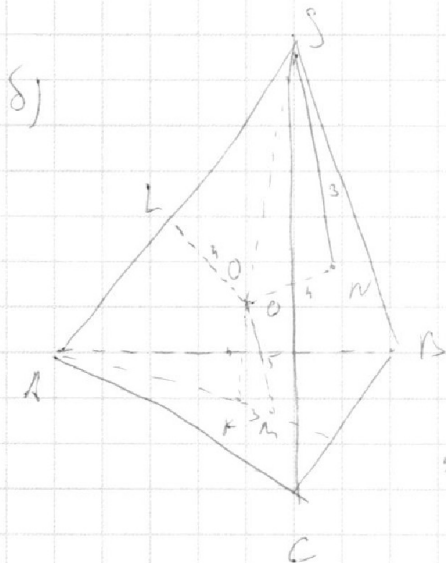


$$8) BB_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2BA^2 + 2BC^2 - AC^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot 160 + 2 \cdot 100 - 340} = \frac{1}{2} \sqrt{180}$$

$$CC_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2CA^2 + 2CB^2 - AB^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot 340 + 2 \cdot 100 - 160} = \frac{1}{2} \sqrt{720}$$

$$9) AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot 6\sqrt{2} = \frac{15 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 9 \cdot 15 \cdot 10 = 1350$$

Ответ: 1350

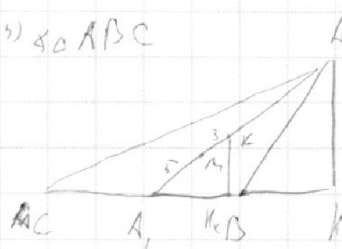


$$1) ON \perp SBC \Rightarrow ON \perp SN,$$

$$\Rightarrow \triangle OSN - \text{right} \Rightarrow OS = 5$$

$$2) \text{ по (2, 3): } OM = OS = 5 \Rightarrow KM = 3 \text{ (4)}$$

3) $\triangle ABC$



$$A_1K = \frac{1}{3} AA_1 = 5$$

$$A_1K = 5 + 3 = 8 \text{ (5)}$$

$$\Rightarrow A_1K = \frac{8}{15} AA_1, \text{ и } A_1H_K = \frac{8}{15} A_1H = \frac{8}{15} \cdot 9 = \frac{72}{15} \geq 5 \Rightarrow H_K \in \text{отрезок } A_1H$$

$$BK = \sqrt{H_K B^2 + K H_K^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{25} + \left(\frac{8}{15} \cdot 12\right)^2\right)} = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{96}{25}}$$

$$CK = \sqrt{H_K C^2 + K H_K^2} = \sqrt{\dots}$$

Аналогично записываем, получим только так:

Найти CK, BK , по теореме Пифагора найдем

$$\Rightarrow KH_K = \frac{8}{15} \cdot AH = \frac{8}{15} \cdot 12 = \frac{32}{5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

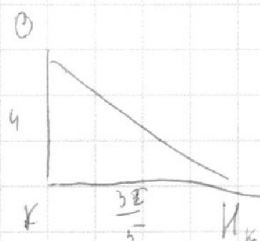
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4) $K = \text{пр}(O; \Delta ABC) \left\{ \begin{array}{l} 3^2 \\ \Rightarrow OI_K \perp AC \end{array} \right.$
 $KI_K \perp AC$



$$OI_K = \sqrt{16 + \frac{32^2}{25}}$$

5) $KBC = \text{пр}_{ABC} OBC \Rightarrow \cos \widehat{BC} = \frac{S(KBC)}{S(ABC)} = \frac{\frac{1}{2} BC \cdot OI_K}{\frac{1}{2} AC \cdot OI_K} =$

~~$\frac{OI_K}{KI_K} = \frac{\sqrt{16 + \frac{32^2}{25}}}{\frac{32}{5}} = \frac{\sqrt{16 + 32^2}}{32} = \frac{\sqrt{1024 + 1024}}{32} = \frac{\sqrt{2048}}{32} = \frac{\sqrt{256 \cdot 8}}{32} = \frac{16\sqrt{8}}{32} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$~~

$$= \frac{32 \cdot 5}{5 \cdot \sqrt{16 + \frac{32^2}{25}}} = \frac{32}{4 \sqrt{25 + 64}} = \frac{8}{\sqrt{89}}$$

$$\widehat{BC} = \arccos\left(\frac{8}{\sqrt{89}}\right)$$

$$\text{Ответ: } \arccos\left(\frac{8}{\sqrt{89}}\right)$$

~~Решение задачи 5. Пусть K - проекция точки O на плоскость ABC. Тогда OK перпендикулярна плоскости ABC. Пусть I_K - проекция точки K на сторону BC. Тогда KI_K перпендикулярна BC. По теореме Птолемея в четырехугольнике OKI_KC имеем: OK \cdot I_KC + KI_K \cdot OC = OI_K \cdot KC. Так как OK перпендикулярна плоскости ABC, то OK перпендикулярна I_KC. Значит, треугольник OKI_KC - прямоугольный. Тогда по теореме Пифагора: OI_K^2 = OK^2 + KI_K^2. Так как OK = 3, то OI_K^2 = 9 + KI_K^2. С другой стороны, по теореме Птолемея: 3 \cdot I_KC + KI_K \cdot OC = OI_K \cdot KC. Так как OC = 5, то 3 \cdot I_KC + KI_K \cdot 5 = OI_K \cdot KC. Так как KI_K перпендикулярна BC, то KI_K^2 + I_KC^2 = KC^2. Так как KC = 4, то KI_K^2 + I_KC^2 = 16. Так как OI_K^2 = 9 + KI_K^2, то OI_K^2 = 9 + 16 - I_KC^2 = 25 - I_KC^2. Тогда OI_K = \sqrt{25 - I_KC^2}. Подставим это в уравнение: 3 \cdot I_KC + \sqrt{25 - I_KC^2} \cdot 5 = \sqrt{25 - I_KC^2} \cdot KC. Так как KC = 4, то 3 \cdot I_KC + 5 \sqrt{25 - I_KC^2} = 4 \sqrt{25 - I_KC^2}. Тогда 3 \cdot I_KC = -\sqrt{25 - I_KC^2}. Так как I_KC не может быть отрицательным, то это уравнение не имеет решений. Значит, наше предположение неверно. Пусть I_K - проекция точки K на сторону AC. Тогда KI_K перпендикулярна AC. По теореме Птолемея в четырехугольнике OKI_KA имеем: OK \cdot I_KA + KI_K \cdot OA = OI_K \cdot KA. Так как OK перпендикулярна плоскости ABC, то OK перпендикулярна I_KA. Значит, треугольник OKI_KA - прямоугольный. Тогда по теореме Пифагора: OI_K^2 = OK^2 + KI_K^2. Так как OK = 3, то OI_K^2 = 9 + KI_K^2. С другой стороны, по теореме Птолемея: 3 \cdot I_KA + KI_K \cdot OA = OI_K \cdot KA. Так как OA = 5, то 3 \cdot I_KA + KI_K \cdot 5 = OI_K \cdot KA. Так как KI_K перпендикулярна AC, то KI_K^2 + I_KA^2 = KA^2. Так как KA = 4, то KI_K^2 + I_KA^2 = 16. Так как OI_K^2 = 9 + KI_K^2, то OI_K^2 = 9 + 16 - I_KA^2 = 25 - I_KA^2. Тогда OI_K = \sqrt{25 - I_KA^2}. Подставим это в уравнение: 3 \cdot I_KA + \sqrt{25 - I_KA^2} \cdot 5 = \sqrt{25 - I_KA^2} \cdot KA. Так как KA = 4, то 3 \cdot I_KA + 5 \sqrt{25 - I_KA^2} = 4 \sqrt{25 - I_KA^2}. Тогда 3 \cdot I_KA = -\sqrt{25 - I_KA^2}. Так как I_KA не может быть отрицательным, то это уравнение не имеет решений. Значит, наше предположение неверно. Пусть I_K - проекция точки K на сторону AB. Тогда KI_K перпендикулярна AB. По теореме Птолемея в четырехугольнике OKI_KB имеем: OK \cdot I_KB + KI_K \cdot OB = OI_K \cdot KB. Так как OK перпендикулярна плоскости ABC, то OK перпендикулярна I_KB. Значит, треугольник OKI_KB - прямоугольный. Тогда по теореме Пифагора: OI_K^2 = OK^2 + KI_K^2. Так как OK = 3, то OI_K^2 = 9 + KI_K^2. С другой стороны, по теореме Птолемея: 3 \cdot I_KB + KI_K \cdot OB = OI_K \cdot KB. Так как OB = 5, то 3 \cdot I_KB + KI_K \cdot 5 = OI_K \cdot KB. Так как KI_K перпендикулярна AB, то KI_K^2 + I_KB^2 = KB^2. Так как KB = 4, то KI_K^2 + I_KB^2 = 16. Так как OI_K^2 = 9 + KI_K^2, то OI_K^2 = 9 + 16 - I_KB^2 = 25 - I_KB^2. Тогда OI_K = \sqrt{25 - I_KB^2}. Подставим это в уравнение: 3 \cdot I_KB + \sqrt{25 - I_KB^2} \cdot 5 = \sqrt{25 - I_KB^2} \cdot KB. Так как KB = 4, то 3 \cdot I_KB + 5 \sqrt{25 - I_KB^2} = 4 \sqrt{25 - I_KB^2}. Тогда 3 \cdot I_KB = -\sqrt{25 - I_KB^2}. Так как I_KB не может быть отрицательным, то это уравнение не имеет решений. Значит, наше предположение неверно. Таким образом, проекция точки K на сторону BC не существует. Тогда проекция точки K на плоскость ABC - это точка K. Тогда OK перпендикулярна плоскости ABC. Тогда OK перпендикулярна BC. Тогда треугольник OKB - прямоугольный. Тогда по теореме Пифагора: OB^2 = OK^2 + KB^2. Так как OB = 5, OK = 3, KB = 4, то 25 = 9 + 16. Это верно. Тогда OK перпендикулярна BC. Тогда OI_K = OK = 3. Тогда \cos \widehat{BC} = \frac{OK}{OB} = \frac{3}{5}.~~

~~Решение задачи 5.~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

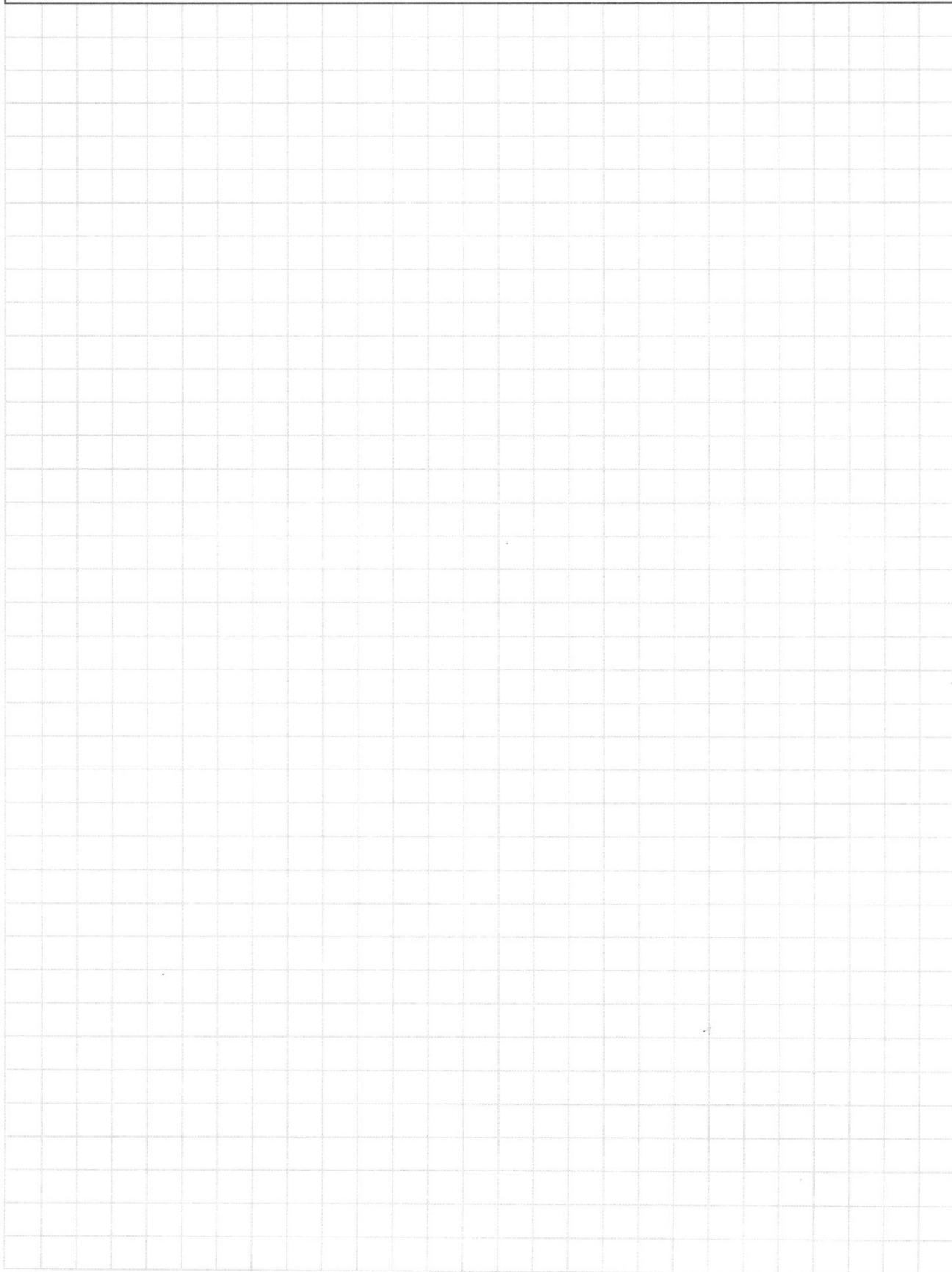
5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{t^4}{t} + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 4 \quad | \cdot 2t$$

$$2t^5 + 12 = 5 - 8t$$

$$2t^5 + 8t + 7 = 0$$

$$+ 2u^5 + 8u - 7 = 0$$

$$t^5 + u^5 + 4(t+u) = 0$$

$$(t+u)(t^4 - t^3u + t^2u^2 - tu^3 + u^4) + 4(t+u) = 0$$

$$(t+u)(t^4 - t^3u + t^2u^2 - tu^3 + u^4 + 4) = 0$$

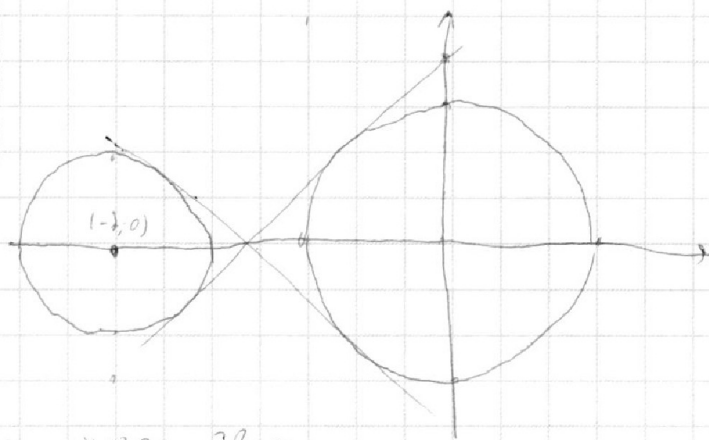
$$t = -u$$

$$\log_2 y + \log_2 6x = 0$$

$$\log_2 6xy = 0$$

$$xy = \frac{1}{6}$$

$$(x+y^x)^2 + y^2 = 4$$



Прямая $x + 39y - 7z = 0$

пересекает ось z в точке X

$$y = \frac{x}{39} + \frac{7z}{39} \quad \text{при } y=0 \quad \frac{x}{39} + \frac{7z}{39} = 0 \quad x = -7z$$

при $x=0$

тогда z и y не найдены, тогда $z(0,0)$ где $39y + x - 7z = 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{(6x)} 7^3 - 4 \quad \text{ДНЗ: } 6x > 0$$

$$6x \neq 1$$

$$\log_7(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \frac{3}{2} \log_{6x} 7 - 4$$

$$\log_7(6x) = t$$

$$\frac{1}{t} - \frac{2}{t} = \frac{3}{2t} - 4 \quad | \cdot 2t$$

$$2t - 4 = 3 - 8t$$

$$2t + 8t - 7 = 0$$

$$10t - 7 = 0$$

$$t = \frac{7}{10}$$

$$\frac{2t^5 + 0t^4 + 0t^3 + 0t^2 + 8t - 7}{2t^5 + 7t^4 + 7t^3}$$

$$P(-12; 0.5)$$

$$Q(1; 0.5)$$

$$4a + b = 10$$

$$4a + b = 10$$

$$4a - b = 10$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

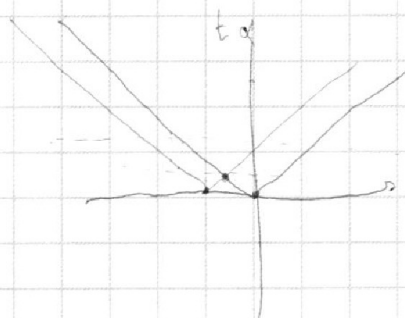
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \frac{|7b|}{\sqrt{9a^2+1}} < 3 \\ \frac{|-7-7b|}{\sqrt{9a^2+1}} < 2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} |b| < \frac{3\sqrt{9a^2+1}}{7} \\ |b+1| < \frac{2\sqrt{9a^2+1}}{2} \end{cases}$$

$$t = \sqrt{9a^2+1}$$

Имеем радиусом $t \geq 0$

$$\begin{cases} |b| < \frac{3}{7}t \\ |b+1| < \frac{3}{7}t \end{cases}$$

$$1) b \geq 0, \quad \begin{cases} b < \frac{3}{7}t \\ b+1 < \frac{3}{7}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < \frac{3}{7}t \\ b < \frac{3}{7}t - 1 \end{cases}$$

$$\text{Если } \frac{3}{7}t - 1 < 0, \text{ то } b > \frac{3}{7}$$

$$t < \frac{7}{3}$$

$$9a^2+1 < \frac{49}{9}$$

$$9a^2 < \frac{48}{9}$$

$$a^2 < \frac{5}{3} \Rightarrow -\frac{\sqrt{15}}{3} < a < \frac{\sqrt{15}}{3} \quad (20)$$

$$2) b < 0, \quad \begin{cases} b > \frac{3}{7}t \\ b+1 > \frac{3}{7}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b > \frac{3}{7}t \\ b > \frac{3}{7}t - 1 \end{cases}$$

$$\text{Если } \frac{3}{7}t - 1 \geq 0, \text{ то } b > \frac{3}{7}t - 1$$

$$b > \frac{3}{7}t - 1 < 0$$

$$t < \frac{7}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



При $k \geq 1$

$$\exists b: \begin{cases} |b| < \frac{3}{2}t \\ |b+1| < \frac{2}{3}t \end{cases}$$

$$\sqrt{9a^2-1} > \frac{2}{5}$$

$$9a^2-1 > \frac{4}{25}$$

$$9a^2 > \frac{25}{25} \quad a^2 > \frac{25}{9 \cdot 25}$$

Посмотрим, когда есть $b > 0$.

$$b < \frac{3}{2}t$$

$$b < \frac{2}{3}t-1$$

$$\text{При } \frac{2}{3}t-1 > 0$$

$$t > \frac{3}{2} \quad t \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$$

Посмотрим, когда есть $b \in [-1; 0]$.

$$\begin{cases} b > \frac{2}{3}t \\ b < \frac{2}{3}t-1 \end{cases}$$

$$\frac{2}{3}t > \frac{2}{3}t-1$$

$$2t > 2t-1$$

$$t < -\frac{1}{2}$$

Посмотрим, когда есть $b < -1$.

$$-\frac{3}{2}t < -1$$

$$\begin{cases} b > -\frac{3}{2}t \\ b > -\frac{2}{3}t-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}t \leq 0 \\ \frac{2}{3}t-1 > -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{9a^2+1} > \frac{4}{5}$$

$$9a^2+1 > \frac{16}{25}$$

$$9a^2 > \frac{11}{25}$$

$$a^2 > \frac{11}{225}$$

$$a \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{11}}{15}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{11}}{15}; +\infty\right)$$

$$\left[\frac{1}{2} \right]$$

$$-\frac{3}{2}t < \frac{2}{3}t-1$$

$$\frac{5}{2}t > -1$$

$$\frac{3}{2}t > 0$$

$$\frac{2}{3}t-1 > 0$$

$$\begin{cases} t > \frac{3}{2} \\ t > 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{3}{2} \right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

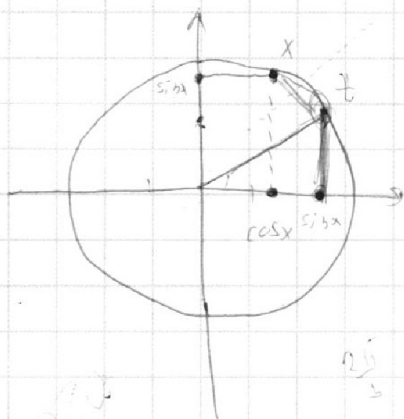
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\arccos x \in [0; \pi]$$



$$\frac{1}{\cos x}$$

$$\cos x$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x = \sin x$$

$$\sin^2 x + y^2 = 1$$

$$y = \cos x$$

$$\arccos(\sin x) = \sqrt{1-x^2}$$



$$\sin x = \cos t$$

$$x = \frac{\pi}{2} - t$$

$$5\sqrt{1-x^2} = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$25 - 25x^2 = \frac{9\pi^2}{4} + 3\pi x + x^2$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2}$$

$$26x^2 + 3\pi x + \frac{9\pi^2}{4} - 25 = 0$$

$$\frac{-2x}{25}$$

$$\frac{3\pi}{2} + x$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{5\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$



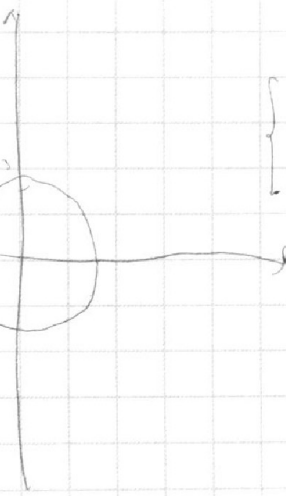
$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$



$$x + 3ay - 7b = 0$$

$$\left(\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + y^2 - 4\right) (x^2 + y^2 - 9) = 0$$

$$\arccos(\sin x) = t$$

$$\sin x = \cos t$$

$$x = -\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$6x = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{12}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AB: 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$BC: 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$AC: 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{23}$$

$$A = 2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot 5^{x_3}$$

$$B = 2^{y_1} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{y_3}$$

$$C = 2^{z_1} \cdot 3^{z_2} \cdot 5^{z_3}$$

$$\begin{cases} x+y+z=14 \\ x+y=7 \\ y+z=13 \\ z+x=14 \end{cases} \Rightarrow x+y+z = \frac{34}{2} = 17$$

$$x, y, z \geq 7$$

$$x+y \geq 13$$

$$14+18=32$$

$$\frac{32}{2} = 16$$

$$\triangle ADC \sim \triangle CDB$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{CD}{BC}$$

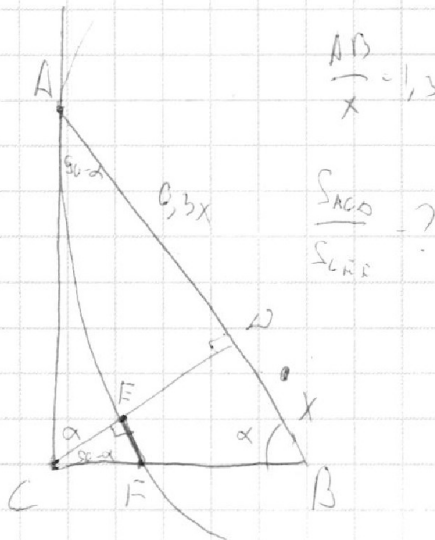
$$\frac{AD}{AC} = \frac{DC}{DB} \Rightarrow DC = \sqrt{AD \cdot DB} = x \sqrt{\frac{3}{10}}$$

$$BC = \sqrt{x^2 + x^2 \cdot \frac{3}{10}} = x \sqrt{\frac{13}{10}}$$

$$AC = \sqrt{\frac{3}{10}x^2 + \frac{9}{100}x^2} = x \sqrt{\frac{39}{100}} = x \frac{\sqrt{39}}{10}$$

$$x \cdot \frac{\sqrt{39}}{100} = CF \cdot x \sqrt{\frac{13}{10}} \Rightarrow CF = x \cdot \frac{\sqrt{39} \cdot \sqrt{10}}{100 \cdot \sqrt{13}}$$

$$\frac{AC}{CF} = \frac{x \cdot \sqrt{39 \cdot 100 \cdot \sqrt{13}}}{10 \cdot x \cdot \sqrt{39} \cdot \sqrt{10}} = \sqrt{\frac{10}{3}} \Rightarrow \frac{5}{5} = \frac{10}{3}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$t^4 - t^3 u + t^2 u^2 - t u^3 + u^4 + u = (t^2 + u^2)^2 - t^2 u^2 - t u (t^2 + u^2) + u =$$

$$= (t^2 + u^2)(t^2 - t u + u^2) - t^2 u^2 + u =$$

$$(t + u)(t^2 - t u^3) +$$

$$320 + 200 - 340$$

$$180$$

$$620 - 160$$

$$520$$

$$700 - 20 + 100$$

$$-180$$

$$900 - 180$$

$$720$$

$$\begin{cases} -b < \frac{3}{2}t \\ b+1 < \frac{7}{2}t \end{cases} \quad \begin{cases} b > -\frac{3}{2}t \\ b < \frac{7}{2}t-1 \end{cases}$$

$$-\frac{3}{2}t < \frac{7}{2}t-1 \Leftrightarrow -\frac{5t}{2} > -1$$

$$t > \frac{2}{5}$$

$$-\frac{3}{2}t < -\frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2}t-1 > -\frac{3}{2} \Rightarrow t > \frac{2}{3}$$

$$49+25 = 74$$

$$5.15 =$$

$$90$$

$$+45$$

$$1350$$

$$\frac{25}{20}$$

$$t \approx 5.2$$

$$b > -\frac{3}{2}t$$

$$b > -\frac{3}{2}t-1$$

$$-\frac{3}{2}t < -1$$

$$-\frac{3}{2}t-1 < -1$$

$$9.8$$

$$38.2$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}t > 1 \\ t > 0 \end{cases} \quad t > \frac{2}{3}$$

$$Am = \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot 160 + 2 \cdot 340 - 100}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{900} =$$



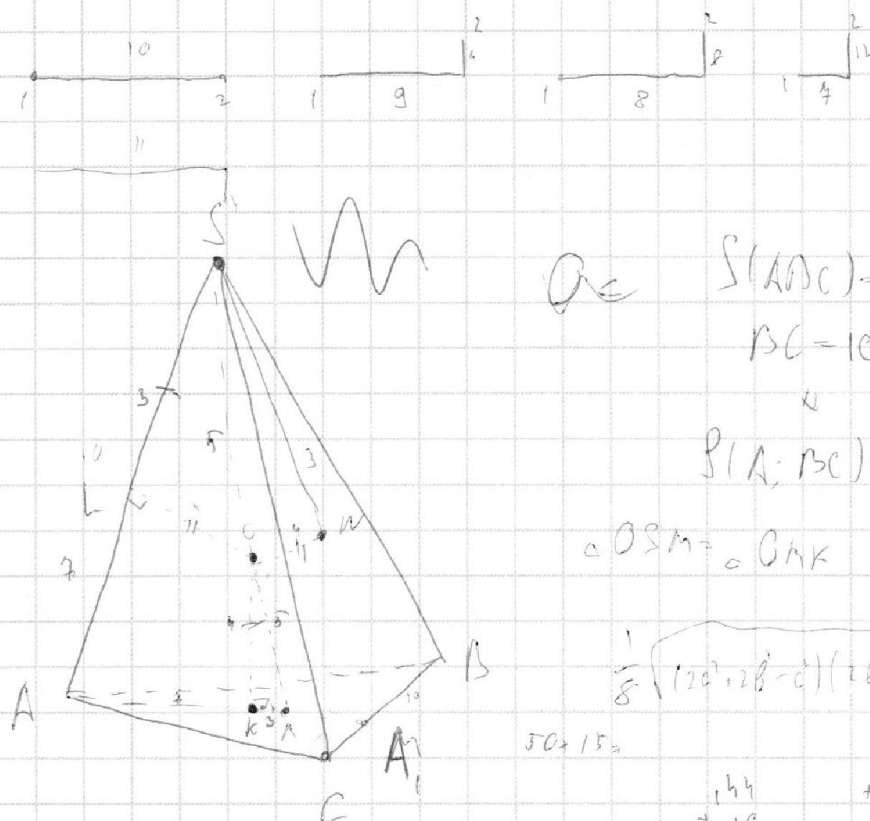
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



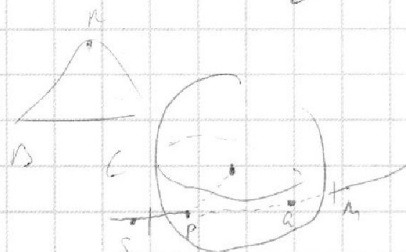
$$\triangle OSM \sim \triangle OKK$$

$$\frac{1}{8} \sqrt{(12^2 + 10^2 - d^2)(12^2 + 10^2 - d^2)(2d^2 + 10^2 - 12^2)}$$

$$50 + 15 =$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ + 16 \\ \hline 160 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ + 196 \\ \hline 340 \end{array}$$



$$SL = KM$$

$$AL = AR$$

$$LS = KM$$

$$\Rightarrow AS = AM \Rightarrow \angle A_1 = \frac{3}{2}$$

$$AM = 5$$

