



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left\{ \begin{array}{l} ab : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \\ a, b \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow ab = k \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}, k \in \mathbb{N}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} bc : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \\ b, c \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow bc = m \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}, m \in \mathbb{N}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ac : 2^{17} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \\ a, c \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow ac = n \cdot 2^{17} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}, n \in \mathbb{N}$$

$$a^2 b^2 c^2 = kmn \cdot 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75} = 3 \cdot 5 \cdot kmn \cdot (2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37})^2$$

$$abc = \sqrt{15 kmn} \cdot 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37}, abc \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{15 kmn} \in \mathbb{N}$$

$$\text{Получим, что } \sqrt{15 kmn} = (\sqrt{15} \cdot \sqrt{kmn}) \in \mathbb{N}$$

Чтобы получить натуральное число, наименьшее, на что
нужно домножить $\sqrt{15}$ — это $\sqrt{15}$ (чтобы в итоге
был корень из квадрата натурального числа, равный
этому натуральному числу), т.к. $15 = 3 \cdot 5$, а 3 и 5 —
простые числа, и им под корнем нужна «пара», чтобы
выйти натуральным числом из под радикала:
тройке — тройке, пятёрке — пятёрке.

$$\text{Тогда: } \sqrt{kmn} = \sqrt{15} \Rightarrow \cancel{kmn} = 15$$

$$\text{Следовательно: } abc = \sqrt{15 kmn} \cdot 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37} = \\ = \sqrt{15^2} \cdot 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37} = 15 \cdot 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37} = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$$

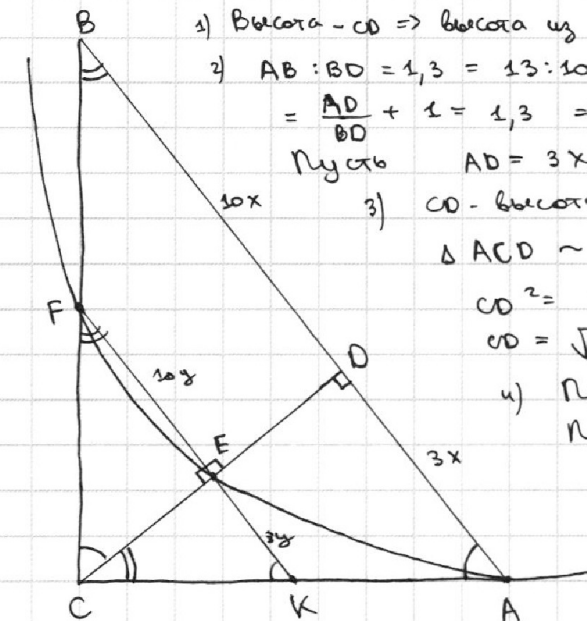
К примеру, $k=5, m=1, n=3$

$$\text{Ответ: } 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$$

(N1)

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) Высота - CD $\Rightarrow$ высота из C $\Rightarrow \angle C = 90^\circ$ в $\triangle ABC$

2) $AB : BD = 1,3 = 13 : 10$; $AB = AD + BD \Rightarrow AB : BD = \frac{AD + BD}{BD} =$
 $= \frac{AD}{BD} + 1 = 1,3 \Rightarrow AD : BD = 0,3 = 3 : 10$

Пусть $AD = 3x$, $BD = 10x$, тогда $AB = AD + BD = 13x$

3) CD - высота в $\triangle ABC \Rightarrow CD \perp AB \Rightarrow \angle BDC = \angle ADC = 90^\circ$

$\triangle ACD \sim \triangle BCD$ (по двум углам) $\Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$

$$CD^2 = AD \cdot BD = 3x \cdot 10x = 30x^2$$

$$CD = \sqrt{30x^2} = x\sqrt{30}$$

4) Проведем (EF) до пересечения с AC.

Пусть точка пересек. - K.

$EF \parallel AB \Rightarrow \angle FCE = \angle CFE = \angle CBD$ как
 $\angle ECK = \angle DAC$ соотв.

Тогда: $\triangle CFE \sim \triangle BDC$ (по 2 углам) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{FE}{BD} = \frac{CE}{CD}$$

$\triangle CKE \sim \triangle ACD$ (по 2 углам) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{KE}{AD} = \frac{CE}{CD}$$

Получаем, что $\frac{FE}{BD} = \frac{KE}{AD}$, т.е.

$$FE : KE = BD : AD = 10 : 3$$

5) Пусть $FE = 10y$, $KE = 3y$;

В $\triangle CKE$ CE - высота;

$\triangle CEF \sim \triangle CKE$ (по 2 углам) $\Rightarrow \frac{KE}{CE} = \frac{CE}{FE} \Rightarrow CE = \sqrt{FE \cdot KE} = y\sqrt{30}$

6) По св-ву кас. и секущ., пров. из одной точки к окружн:

$$KE \cdot KF = KA^2$$

$$3y(3y + 10y) = KA^2 \Rightarrow KA = y\sqrt{39}$$

7) $\triangle CKE \sim \triangle ACD \Rightarrow \frac{KE}{AD} = \frac{CK}{AC}$; $\frac{3y}{3x} = \frac{AC - AK}{AC}$; $\frac{y}{x} = 1 - \frac{AK}{AC}$

AC по т. Пифагора из $\triangle ACD$: $AC^2 = CD^2 + AD^2$

$$AC = \sqrt{30x^2 + 9x^2} = x\sqrt{39}$$

$$\text{Тогда: } \frac{y}{x} = 1 - \frac{AK}{AC} = 1 - \frac{y\sqrt{39}}{x\sqrt{39}} = 1 - \frac{y}{x}$$

$$\frac{2y}{x} = 1 \Rightarrow 2y = x; \quad y = \frac{x}{2}; \quad \frac{y}{x} = \frac{1}{2}; \quad \frac{x}{y} = 2$$

$$8) S_{ACD} = \frac{AD \cdot CD}{2} = \frac{3x \cdot x\sqrt{30}}{2} = \frac{3\sqrt{30}}{2} x^2$$

$$S_{CEF} = \frac{CE \cdot EF}{2} = \frac{y\sqrt{30} \cdot 10y}{2} = 5\sqrt{30} y^2$$

$$S_{ACD} : S_{CEF} = \frac{3\sqrt{30}}{2 \cdot 5\sqrt{30}} \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{3}{10} \cdot 2^2 = \frac{12}{10} = 1,2$$

Ответ: 1,2
 (N2)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5 \arccos(\sin x) = 5 \cdot \frac{\pi}{2} - \pi + x$$

$$\text{Знаю, что } \arccos t + \arcsin t = \frac{\pi}{2} :$$

$$5 \arccos(\sin x) = 5(\arccos(\sin x) + \arcsin(\sin x)) - \pi + x$$

$$5 \arcsin(\sin x) = \pi - x ; \quad x = \pi - 5 \arcsin(\sin x)$$

$$\} f(x) = \arcsin(\sin x)$$

$$E_f = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \text{ т.е. } \begin{aligned} -\frac{\pi}{2} &\leq \arcsin(\sin x) \leq \frac{\pi}{2} & | \cdot 5 \\ -\frac{5\pi}{2} &\leq 5 \arcsin(\sin x) \leq \frac{5\pi}{2} & | \cdot (-1) \\ -\frac{5\pi}{2} &\leq -5 \arcsin(\sin x) \leq \frac{5\pi}{2} & | + \pi \\ -\frac{3\pi}{2} &\leq \pi - 5 \arcsin(\sin x) \leq \frac{7\pi}{2}, \text{ т.е. } \\ &-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\sin x = \sin(\pi - x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{функция } g(x) = \sin x$$

симметрична отн.

$$\text{прямой } x = \pi$$

$$\text{Проверим } x = \pi : 5 \arcsin(\sin \pi) = \pi - \pi$$

$$5 \arcsin(0) = 0 \text{ — подходит}$$

Теперь найдём решения на $\left(\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$ и потом отразим их отк. $x = \pi$ — такие решения также будут верными.

$$g(x) = \sin x \text{ периодична : } T = 2\pi, \text{ тогда}$$

$$5 \arcsin(\sin x) = 5 \arcsin(\sin(x + 2\pi n)) , n \in \mathbb{Z}$$

$$5 \arcsin(\sin(x + 2\pi n)) = 5(x + 2\pi n) \text{ при условии, что}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq 5(x + 2\pi n) \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$n = 0 : 5x = \pi - x$$

$$x = \frac{\pi}{6} < \pi \text{ — не подходит для } \left(\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$$

$$n = -1 : 5x - 10\pi = \pi - x$$

$$x = \frac{11\pi}{6} \text{ — подходит + его отражение : } x = \pi - \left(\frac{11\pi}{6} - \pi\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$n = -2 : 5x - 20\pi = \pi - x$$

$$x = \frac{21\pi}{6} = \frac{7\pi}{2} \text{ — подходит + его отражение : } x = \pi - \left(\frac{7\pi}{2} - \pi\right) = -\frac{3\pi}{2}$$

$$n = -3 : 5x - 30\pi = \pi - x$$

$$x = \frac{31\pi}{6} > \frac{7\pi}{2} \text{ — не подходит для } \left(\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2} \right\}$$

(N3)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

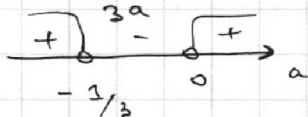
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(продолжение №4)

1) $-1 < \frac{1}{3a}$;

$$\frac{1}{3a} + 1 > 0$$

$$\frac{3a+1}{3a} > 0$$



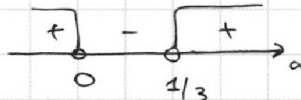
$$\begin{cases} a < -\frac{1}{3} \\ a > 0 \end{cases}$$

2) $\frac{1}{3a} < 1$

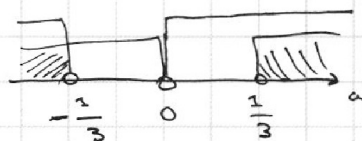
$$\frac{1}{3a} - 1 < 0$$

$$\frac{1-3a}{3a} < 0$$

$$\frac{3a-1}{3a} > 0$$



$$\begin{cases} a > \frac{1}{3} \\ a < 0 \end{cases}$$



Пересечение 1) и 2):

Т.е. $\begin{cases} a < -\frac{1}{3} \\ a > \frac{1}{3} \end{cases}$

Ответ: $a \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; +\infty)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

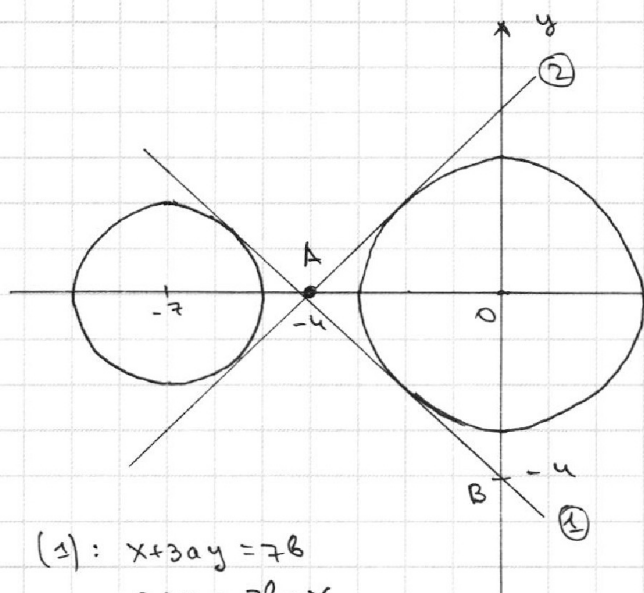
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} x+3ay-7b=0 & (1) \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 & (2) \end{cases}$$

$$(2): \begin{cases} x^2+14x+y^2+45=0 \\ x^2+y^2-9=0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x+7)^2+y^2=4 & \text{— ур-е окр-ти с ц. в } (-7;0) \text{ и } r_1=2 \\ x^2+y^2=9 & \text{— ур-е окр-ти с центром в } (0;0) \text{ и } r_2=3 \end{cases}$$

Изобразим (2) на пл-сти (x,y) :



Нас интересуют значения a , для которых сущ. b , такое, что прямая (1) пересекает эти две окр-ти в 4х точках. (при $a \neq 0$)

$a=0$: (1): $x=7b$ — вертик. прямая $\Rightarrow$ не будет 4-х пересечений $\Rightarrow a=0$ — не подходит.

$$(1): x+3ay=7b$$

$$3ay=7b-x$$

$$y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a} = kx + c, \text{ где } k = -\frac{1}{3a}, c = \frac{7b}{3a}$$

$c \in \mathbb{R}$ —

насколько сдвинута по вертикали прямая $y = \frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}$

Найдём такие a , что

$y = -\frac{1}{3a}x$ можно как-то сдвинуть по вертикали на c и получить 4 пересечения.

Найдём для этого такие $-\frac{1}{3a}$ — углы наклона прямой (1)

Очевидно, самый маленький будет у внеш. кас. (1),

а самый большой — у внеш. кас. (2), при этом

$k_{(1)} = -k_{(2)}$ в силу симметрии

$$k_{(1)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4 - 0}{0 - (-4)} = -1 \Rightarrow k_{(2)} = 1, \text{ при этом у кас.}$$

2 решения $\Rightarrow -1$ и 1 не годятся.

$$\text{Тогда: } -1 < -\frac{1}{3a} < 1 \Rightarrow -1 < \frac{1}{3a} < 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$$

$$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7(6x)} = \log_{(6x)^2} 7^3 - 4$$

$$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7(6x)} = \frac{3}{2 \log_7(6x)} - 4$$

ОДЗ: $\begin{cases} 6x > 0 \\ 6x \neq 1 \\ x > 0 \\ x \neq \frac{1}{6} \end{cases}$

$$3 \log_7 6x = a$$

$$a^4 - \frac{2}{a} = \frac{3}{2a} - 4; \quad \frac{2a^5 + 8a - 7}{2a} = 0 \quad (1)$$

$$2) \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4$$

$$\log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2 \log_7 y} - 4$$

ОДЗ: $\begin{cases} y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$

$$3 \log_7 y = b$$

$$b^4 + \frac{6}{b} = \frac{5}{2b} - 4; \quad \frac{2b^5 + 8b + 7}{2b} = 0 \quad (2)$$

$$a + b = \log_7 6x + \log_7 y = \log_7 (6xy)$$

$$6xy = \frac{7^{(a+b)}}{7^{(a+b)}}$$

$$xy = \frac{7^{(a+b)}}{6} - \text{необходимо найти все возможные значения этого выражения}$$

$$(1): \begin{cases} 2a^5 + 8a - 7 = 0 \\ 2a \neq 0 \end{cases} \Rightarrow 2a^5 + 8a = 7$$

$$(2): \begin{cases} 2b^5 + 8b + 7 = 0 \\ 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow 2b^5 + 8b = -7 = -(2a^5 + 8a)$$

$$\textcircled{1} \quad 2b^5 + 8b = -2a^5 - 8a = 2(-a)^5 + 8(-a) \Rightarrow b = -a, \text{ тогда}$$

$$a + b = 0, \text{ и } xy = \frac{7^{(a+b)}}{6} = \frac{7^0}{6} = \frac{1}{6}$$

~~$$\textcircled{2} \quad 2a^5 + 8a = 2b^5 + 8b = 0$$~~

$$\text{Ответ: } \frac{1}{6}$$

(NS)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$A(x_1; y_1); \quad B(x_2; y_2)$$

$$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$$

$$4(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 40$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x_2 - x_1) \in \mathbb{Z} \\ (y_2 - y_1) \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$a = (x_2 - x_1) \cdot 4$ — горизонтальный катет прямоуго. Δ -ка

$b = y_2 - y_1$ — вертикальный катет

Как интересуют Δ -ки : 1) $a = 0, b = 40$;

таких Δ -ов в параллелограмме влезет $(68 - 40 + 1) \cdot 3 = 87$

2) $a = 1, b = 36$

таких:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

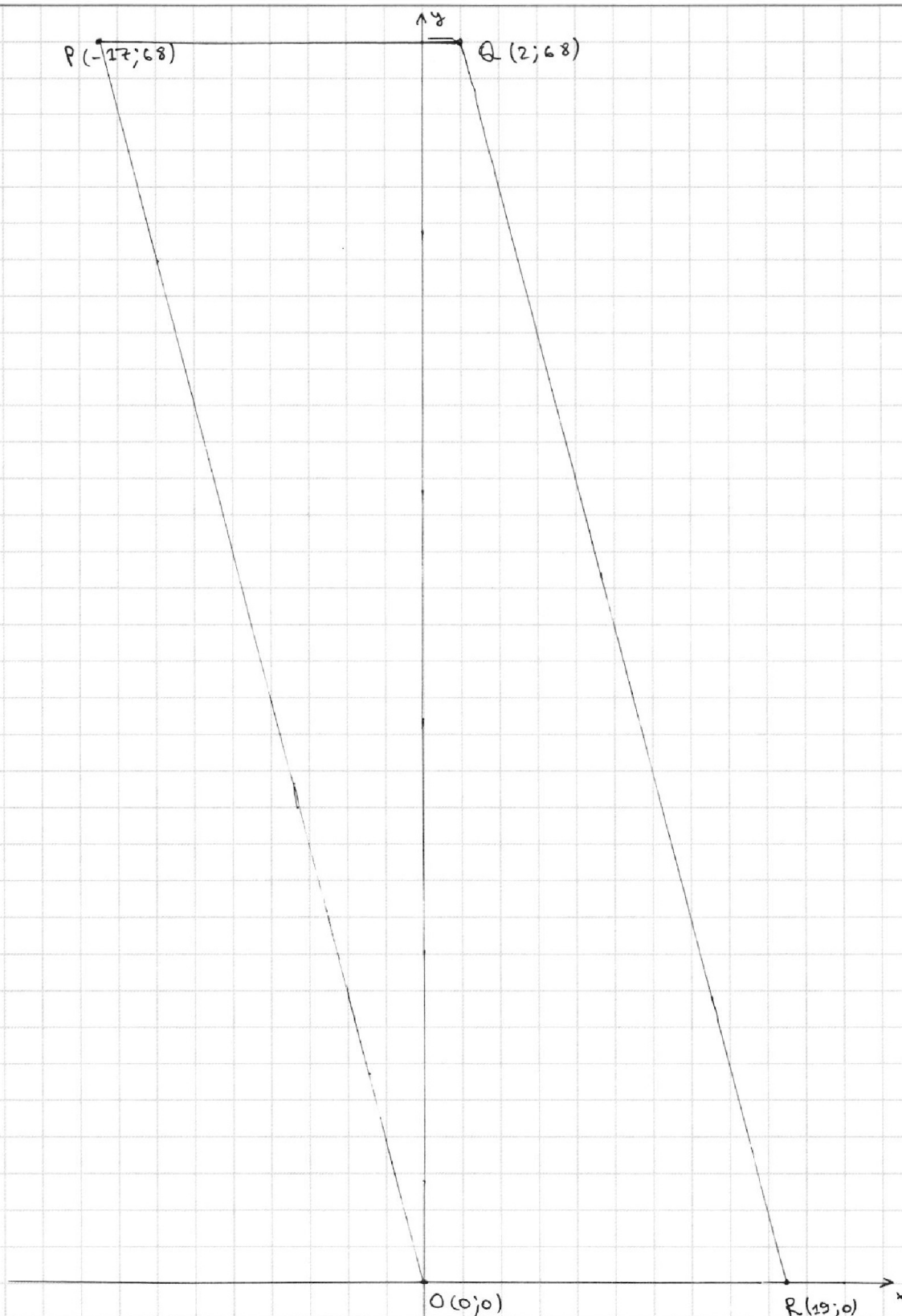
5
☐

6
☒

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черн

$$\log_2 6x = -\log_2 \frac{8}{6x^{5/2}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5 \arccos(\sin x) = 5 \cdot \frac{\pi}{2} - \pi + x$$

$$\text{С учётом равенства: } \arccos(\sin x) + \arcsin(\sin x) = \frac{\pi}{2} :$$

$$5 \arccos(\sin x) = 5 (\arccos(\sin x) + \arcsin(\sin x)) - \pi + x$$

$$5 \arccos(\sin x) = 5 \arccos(\sin x) + 5 \arcsin(\sin x) - \pi + x$$

$$5 \arcsin(\sin x) = \pi - x$$

Композиция возрастающих функций $f(x) = \arcsin x$ есть
возрастающая функция $\Rightarrow$ и $g(x) = \sin x$
на $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$$\Rightarrow 5 \arcsin(\sin x) \uparrow \text{ на } [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$\text{На } [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \arcsin(\sin x) = x, \text{ тогда:}$$

$$5x = \pi - x; \quad 6x = \pi; \quad x = \frac{\pi}{6}$$

$$h(x) = \pi - x - \text{убывает (т.к. } -x \downarrow)$$

$$\text{Получаем, что } \uparrow = \downarrow \Rightarrow \text{есть единственный корень } x = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{6} \right\}$$

(N3)

Черн. бас.

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$5x + 10\pi = \pi - x$$

$$6x = -9\pi$$

$$\frac{22\pi}{6}$$

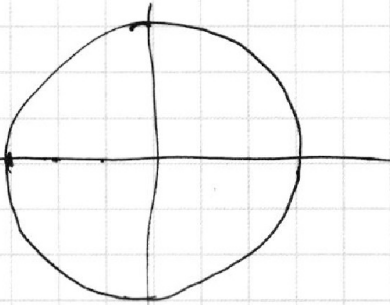
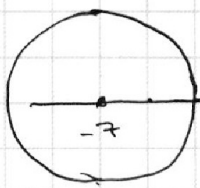
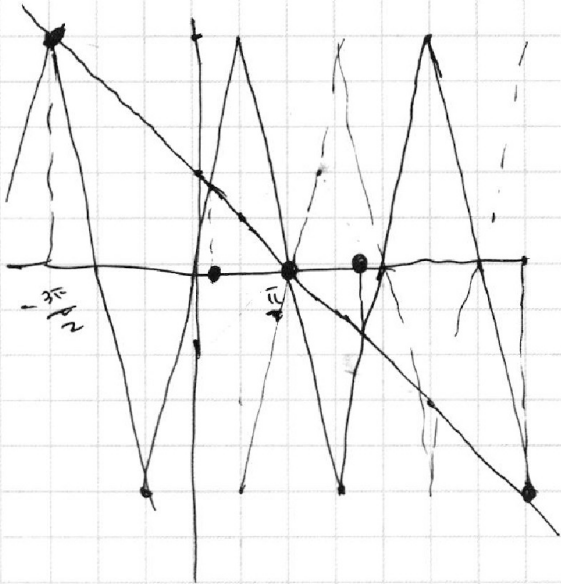
$$5x - 10\pi = \pi - x$$

$$5x - 20\pi = \pi - x$$

$$\frac{22\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

$$a=0 \quad \text{X}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x + 2\pi n \leq \frac{\pi}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

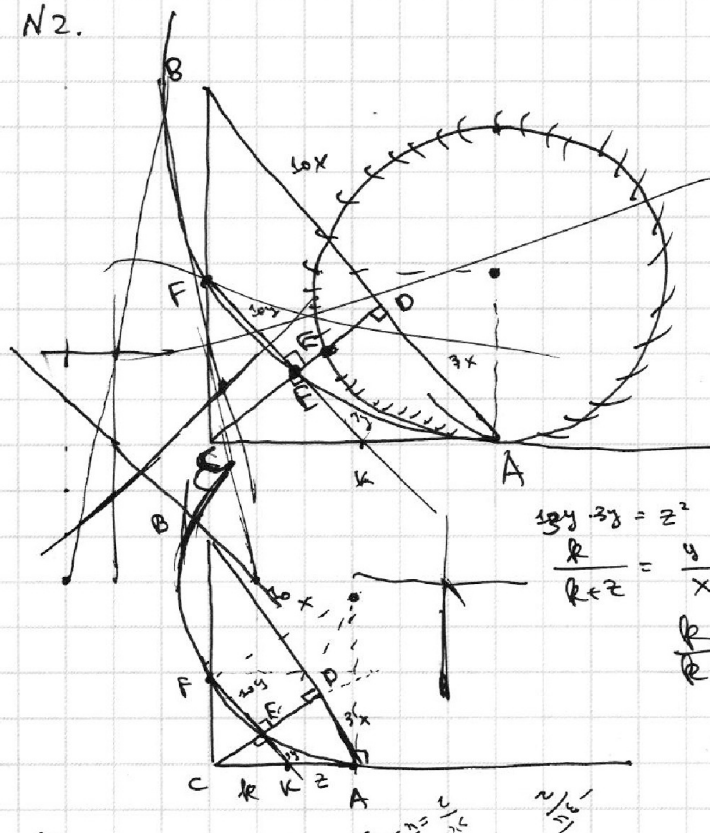
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N2.



$AB \parallel EF$

$$AB : BD = \frac{13}{10}$$

$$\frac{AD + BD}{BD} = \frac{13}{10}; \frac{AD}{BD} = \frac{3}{10}$$

$$S_{ACD} : S_{CEF} = ?$$

$$S_{ACD} = \frac{AD \cdot CD}{2}$$

$$AD = 3x; CD = \sqrt{(x + y\sqrt{3})^2 - 9x^2} = \sqrt{(y\sqrt{3}(\frac{1}{3} + \frac{2}{x-y}))^2 - 9x^2}$$

$$3xy - 3x = z^2 \quad z = y\sqrt{30}$$

$$\frac{x}{x+z} = \frac{y}{x}; \quad \frac{x}{x+y\sqrt{30}} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{x}{x+y\sqrt{30}} = \frac{y}{x}$$

$$kx = ky + y^2\sqrt{30}$$

$$k = \frac{y^2\sqrt{30}}{x-y}$$

$$1 + \frac{1}{x-y} = \frac{x-y+1}{x-y}$$

N5.

$$1) \log_7^4(6x) - 2 \log_6 x \cdot 7 = \log_6(6x)^2 \cdot 7^3 - 4$$

$$\log_7^4(6x) - \frac{2}{\log_7(6x)} = \frac{3}{2} \log_7(6x) - 4$$

$$2) \log_7^4 y + 6 \log_3 7 = \log_7(7^5) - 4$$

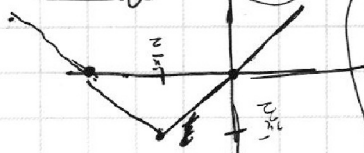
$$\log_7^4 y + \frac{6}{\log_7 y} = \frac{5}{2 \log_7 y} - 4$$

$$\begin{cases} \log_7 6x = a \\ \log_7 y = b \end{cases}$$

$$a + b = \log_7 6xy$$

$$\frac{2b^5 + 12 - 5 + 9b}{2b} = 0$$

$$\frac{2b^5 + 8b + 7}{2b} = 0$$



$$a^4 - \frac{4}{2a} = \frac{3}{2a} - 4$$

$$\frac{2ab^5 + 8ab + 7a + 2ab + 8ab - 7b}{2ab} = 0$$

$$CD \cdot \log x = AB \cdot BC$$

$$\frac{CD}{\log x} = \frac{3x}{CD} \Rightarrow CD = x\sqrt{30}$$

$$S_{ACD} = \frac{AD \cdot CD}{2} = \frac{3x \cdot x\sqrt{30}}{2} = \frac{3\sqrt{30}}{2} x^2$$

$$OD \geq \begin{cases} 6x > 0 \\ 6x \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$b^4 + \frac{6}{b} = \frac{5}{2b} - 4$$

$$2b^5 + 12 - 5 + 9b = 0$$

$$2a^5 - 4 - 3 + 8a = 0$$

$$\frac{2a^5 + 8a - 7}{2a} = 0$$

$$a \neq 0$$

$$2ab^5 + 8ab + 7a + 2ab + 8ab - 7b = 0$$

$$2ab$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик. ①

$$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + \frac{x}{5}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{5}\right) = \sin x$$

17

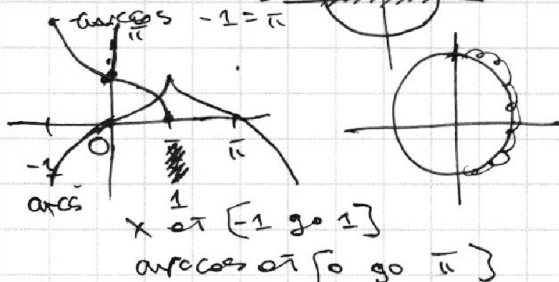
N3.

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\arccos 1 = 0$$

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos -1 = \pi$$



$$x \in [-1; 1]$$

$$\arccos x \in [0; \pi]$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\arccos(\sin x) = t$$

$$\cos t = \sin x$$

$$\sqrt{1 - \sin^2 t} = \sin x$$

$$1 - \sin^2 t = \sin^2 x$$

$$5 \arccos(\sin x) = 5 \arccos(\sin x) + 5 \arcsin \sin x - \pi + x$$

$$5 \arcsin(\sin x) = \pi - x$$

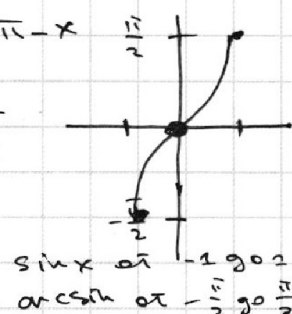
$$\arcsin 0 = 0$$

$$\arcsin -1 = -\frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$5x = \pi - x$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$



Реш:

$$5 \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{9\pi + \pi}{6} \quad \text{①}$$

N1.

$$ab = k \cdot 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$bc = m \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$ac = n \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{13}$$

$$32 + 13 = 25$$

$$abc = k \cdot m \cdot n \cdot 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75} = 15 k m n \cdot (2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37})^2$$

$$abc = \sqrt{15 k m n} \cdot 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37}$$

$$\min(abc) = \sqrt{15} \cdot 2^{17} \cdot 3^{21} \cdot 5^{37}$$

Например: $k=5, m=3, n=2$

$$ab = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{15}$$

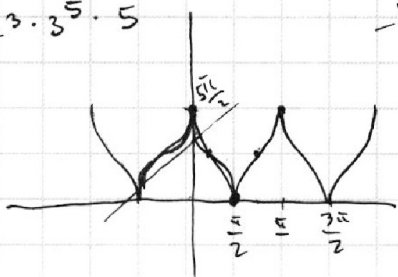
$$bc = 2^{13} \cdot 3^{16} \cdot 5^{18}$$

$$ac = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{13}$$

$$a = \sqrt{\frac{a^2 bc}{bc}} = \sqrt{\frac{2^{21} \cdot 3^{28} \cdot 5^{58}}{2^{13} \cdot 3^{16} \cdot 5^{18}}} = \sqrt{2^8 \cdot 3^{12} \cdot 5^{40}} = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{20}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5$$

$$c = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{13}$$

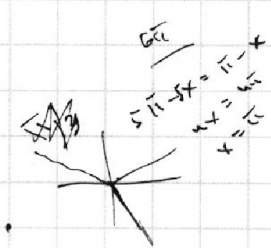


$$15 k m n = x^2$$

$$x = \sqrt{15 k m n} \Rightarrow k m n = 15$$

$$5 \arccos\left(\sin \frac{23}{6} \pi\right) = \frac{5\pi}{3} = \pi - \frac{2\pi}{6}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} &\leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{5\pi}{2} &\leq 5 \arcsin x \leq \frac{5\pi}{2} \\ -\frac{5\pi}{2} &\leq -5 \arcsin x \leq \frac{5\pi}{2} \\ -\frac{3\pi}{2} &\leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

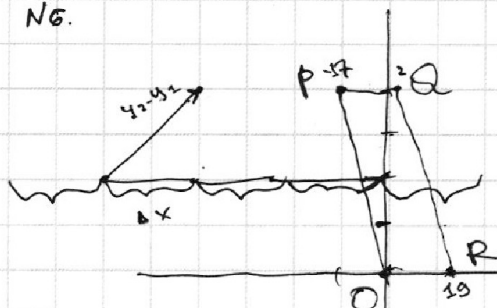
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

N6.



$$u(x_2 - u(x_1) + y_2 - y_1) = u_0$$

$$u(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = u_0$$

$$y = kx + b$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

(9; 4)

36x^2 + 25y^2 = 360

6; 2

$$k = \frac{2}{3}$$

$$u_0 x + a y = u_0$$

28 уа.
3 рр
(0, 1, 2)
0; u_0
→ 28; 68

$$N2. S_{ACD} = \frac{3\sqrt{30}}{2} x^2$$

$$S_{CEF} = CE \cdot EF; EF = \frac{10y}{4\sqrt{30}}; CE = \frac{y}{4\sqrt{30}}$$

$$S_{CEF} : S_{ACD} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$S_{ABC} = \frac{CD \cdot AB}{2} = \frac{x\sqrt{30} \cdot 10x}{2}$$

$$S_{BCD} = \frac{10}{13} S_{ABC} = \frac{x\sqrt{30} \cdot 10x}{2} = 5\sqrt{30} x^2$$

$$AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{30x^2 + 9x^2} = x\sqrt{39}$$

$$0 \leq \Delta x \leq \frac{10}{4}$$

$$AK = y\sqrt{39}$$

$$\frac{y}{x} = CK : AC = \frac{AC - AK}{AC} = 1 - \frac{AK}{AC} = 1 - \frac{y}{x}$$

0, 1, 2, 3, 4, 5,
6, 7, 8, 9, 10

$$\frac{2y}{x} = 1; y = \frac{x}{2}$$

$$S_{CEF} = \frac{10y \cdot y\sqrt{30}}{2} = 5\sqrt{30} y^2$$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{\frac{3\sqrt{30}x^2}{2}}{5\sqrt{30}y^2} = \frac{3\sqrt{30}}{2 \cdot 5\sqrt{30}} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{3}{10} \cdot 2^2 = \frac{12}{10}$$

N4.

$$x + 3ay - 2b = 0$$

$$x = 2b$$

$$x + 3ay = 2b$$

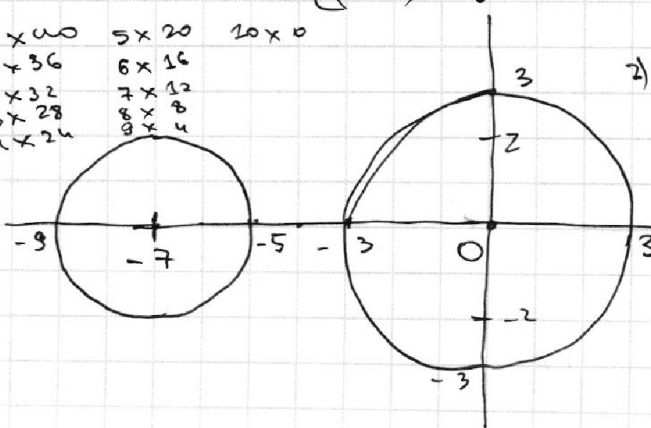
$$3ay = 2b - x$$

$$\begin{cases} (x^2 + 14x + 49) + y^2 = 2^2 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 2^2 \\ (x+0)^2 + (y+0)^2 = 3^2 \end{cases}$$

0 u: 0x u0 5x 20 10x 0
1x 36 6x 16
2x 32 7x 12
3x 28 8x 8
4x 24 9x 4

$$\frac{x+3a}{3a} + y = \frac{2b}{3a}$$

$$2) a \neq 0: y = -\frac{x}{3a} + \frac{2b}{3a}$$



$$a^5 + b^5 + 8(a+b) = 0$$

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 8(a+b) = 0$$

$$a-b$$

$$a^5 - b^5 + 8(a-b) = 0$$

$$(a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) + 8(a-b) = 0$$

5	5
6	6
7	7
8	8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

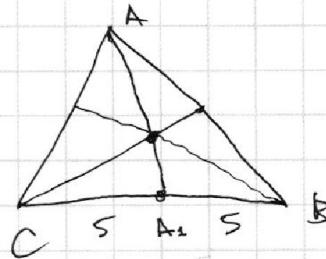
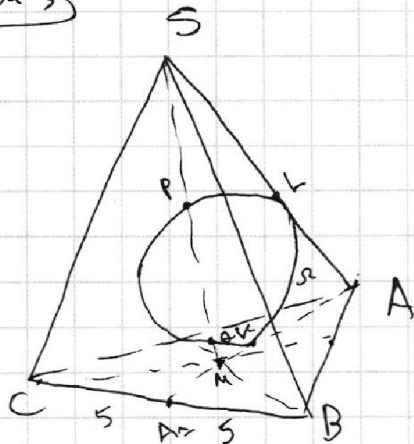
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Чертёж



$$a = \log_2 6x$$

$$b = \log_2 y$$

$$a+b = \log_2 6xy = \log_2 6 + \log_2 xy$$

$$\frac{(a+b)^2}{6} = xy$$

$$\frac{2a^5 + 8a - 7}{2a} = 0 = \frac{2b^5 + 8b + 7}{2b}$$

$$2a^5 + 8a - 7 = 0$$

$$= 2b^5 + 8b + 7$$

$$7 = 2a^5 + 8a$$

$$7 = 2b^5 + 8b$$

$$a+b = \log_2 6xy$$

$$\frac{a+b}{6} = xy$$

$$a^5 - b^5 + 4(a-b) = 7^2$$

$$(a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) + 4(a-b) = 7^2$$

$$(a-b)^2 = (a-b) \dots$$

$$a+b = \log_2 6xy$$

$$\frac{a+b}{6} = xy$$

$$\frac{a+b}{6} = \dots$$

$$\frac{(a^5 - b^5) + 4(a-b)}{6} = \dots$$

$$7^{(a-b)} = ?$$

$$\log_2 \dots = 1$$

$$\log_2$$

$$\log_2 6xy = a+b$$

$$xy = ?$$