МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

$ab \vdots 2^9 3^{10} 5^{10}$
$bc \vdots 2^{14} 3^{13} 5^{13}$
$ac \vdots 2^{19} 3^{18} 5^{30}$
$\Rightarrow a^2b^2c^2 \vdots 2^{9+14+19} \cdot 3^{10+13+18} \cdot 5^{10+13+30}$

$a^2b^2c^2 \vdots 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$

$\Downarrow$

$abc \vdots 2^{21} \cdot 3^{20,5} \cdot 5^{26,5}$, т.к. a, b и c - натуральные числа, то $abc \vdots 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$ (если степени 3 и 5 будут меньше, то $a^2b^2c^2$ не будет делиться на 3^{41} и 5^{53})

$ac \vdots 5^{30} \Rightarrow abc \vdots 5^{30}$, т.к. b - натуральное число.

$abc \vdots 2^{21} 3^{21} \cdot 5^{30} \Rightarrow abc \geq 2^{21} 3^{21} 5^{30}$

Пример для $abc = 2^{21} 3^{21} 5^{30}$:

$a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{15}$
~~$b = 2^2$~~
$b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0$
$c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{15}$

$\Rightarrow$

$ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{15} \vdots 2^9 3^{10} 5^{10}$
$bc = 2^{14} 3^{14} \cdot 5^{15} \vdots 2^{14} 3^{13} 5^{13}$
$ac = 2^{19} 3^{18} 5^{30} \vdots 2^{19} 3^{18} 5^{30}$

Ответ: $2^{21} 3^{21} 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$\arcsin\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow 5\arcsin\alpha \in [-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}] \Rightarrow$

$\Rightarrow 5\arcsin(\cos x) \in [-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}] \Rightarrow$

$\Rightarrow x + \frac{\pi}{2} \in [-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}] \Rightarrow x \in [-3\pi; 2\pi]$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k);\ k \in \mathbb{Z} \\ \cos x = \sin(-x + \frac{\pi}{2} + 2\pi n);\ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 5\arcsin(\sin(x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k)) = x + \frac{\pi}{2} \\ 5\arcsin(\sin(-x + \frac{\pi}{2} + 2\pi n)) = x + \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

$5x + \frac{5\pi}{2} + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}$ или $-5x + \frac{5\pi}{2} + 10\pi n = x + \frac{\pi}{2}$

$4x = -2\pi - 10\pi k$ $\qquad$ $6x = 2\pi + 10\pi n$

$x = -\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi k}{2}$ $\qquad$ $x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi n}{3}$

$x \in \{-3\pi; -\frac{\pi}{2}; 2\pi\}$ $\qquad$ $x \in \{-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; 2\pi\}$

При остальных решениях $x \in (-\infty; -3\pi) \cup (2\pi; +\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ эти решения не являются решениями для исходного уравнения.

Ответ: $x \in \{-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi\}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

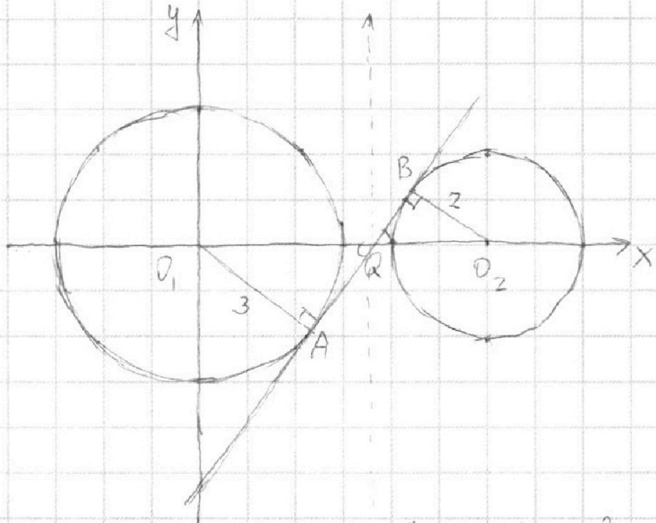
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ x^2+y^2-12x+36=4 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-\frac{a}{2}x+1{,}5b \text{ - прямая} \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2+y^2=4 \end{array}\right. \text{ - окружности} \end{cases}$$



Рассмотрим ситуацию, когда прямая $y=-\frac{a}{2}x+1{,}5b$ является касательной к обеим окружностям (изобр. на графике) $\triangle O_1AQ \sim \triangle O_2BQ$ по 2 парам равных углов, $k=\frac{BO_2}{AO_1}=\frac{2}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{QO_2}{O_1Q}=\frac{2}{3} \Rightarrow O_1Q=\frac{18}{5}$, $QO_2=\frac{12}{5}$

~~Заметим, что при Рассмотрим этот же~~

Возьмем точку Q за новую точку (0;0) в нашем графике, тогда прямая будет задаваться ур.: $y=kx$, где $k=-\frac{a}{2}$, а окружности: $(x+\frac{18}{5})^2+y^2=9$ и $(x-\frac{12}{5})^2+y^2=4$

$y^2=4-(x-\frac{12}{5})^2$; $y=kx \Rightarrow y^2=k^2x^2$.

$4-(x-\frac{12}{5})^2=k^2x^2$ - уравнение точки пересеч. прямой с окр.
$100-25x^2+120x-144-25k^2x^2=0$
$25x^2(k^2+1)-120x+44=0$
$\frac{D}{4}=60^2-44\cdot25\cdot(k^2+1)=100(36-11k^2-11)=0$, т.к. прямая и окр. имеют единственную точку пересеч.
$k=\pm\frac{5}{\sqrt{11}}$

Заметим, что, если $k\in(-\infty;-\frac{5}{\sqrt{11}}]\cup[\frac{5}{\sqrt{11}};+\infty)$, система не может иметь более 2 решений, а при $k\in(-\frac{5}{\sqrt{11}};\frac{5}{\sqrt{11}})$ система будет иметь 4 решения, при таком b, что прямая $y=kx+1{,}5b$ будет проходить через точку Q. $\Rightarrow k\in(-\frac{5}{\sqrt{11}};\frac{5}{\sqrt{11}})$

$-\frac{a}{2}\in(-\frac{5}{\sqrt{11}};\frac{5}{\sqrt{11}}) \Rightarrow a\in(-\frac{10}{\sqrt{11}};\frac{10}{\sqrt{11}})$

Ответ: $(-\frac{10}{\sqrt{11}};\frac{10}{\sqrt{11}})$

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$ — 1-ое уравнение

$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\log_3 x} - 8$

$\frac{2\log_3^5 x + 16\log_3 x + 7}{2\log_3 x} = 0$

$2\log_3^5 x + 16\log_3 x + 7 = 0$

Замена: $\log_3 x = t$.

$f(t) = 2t^5 + 16t + 7 = 0$

$f'(t) = 10t^4 + 16 \Rightarrow$ функция непрерывно возрастает $\Rightarrow$ имеет единственное решение $f(t)=0$, при этом $f(0) \neq 0 \Rightarrow$ исходное ур. имеет единственное решение.

$\log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$ — 2-ое уравнение

$\log_3^4(5y) + \frac{2}{\log_3 5y} = \frac{11}{2\log_3 5y} - 8$

$\frac{2\log_3^5(5y) + 16\log_3(5y) - 7}{2\log_3 5y} = 0$

$2\log_3^5 5y + 16\log_3 5y - 7 = 0$ ~~Замена: $\log_3 5y$~~

Аналогично 1-ому, это уравнение (исходное ур. с переменной y) имеет единственный корень, доказывается также.

$$\begin{cases} 2\log_3^5 5y + 16\log_3 5y - 7 = 0 \\ 2\log_3^5 x + 16\log_3 x + 7 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

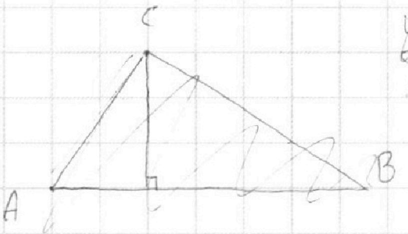
Пусть $x = a$ — решение 1-ого уравнение, тогда $5y = \frac{1}{a}$, то есть $y = \frac{1}{5a}$ будет решением второго, т.к. если $2\log_3^5 a + 16\log_3 a = -7$, то $2\log_3^5\left(\frac{1}{a}\right) + 16\log_3\left(\frac{1}{a}\right) = -2\log_3^5 a - 16\log_3 a = 7$, $\Rightarrow xy = a\cdot\frac{1}{5a} = 0{,}2$, т.к. a — единственное решение 1-го уравнение и $\frac{1}{5a}$, соответственно, единственное решение 2-го. Ответ: 0,2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

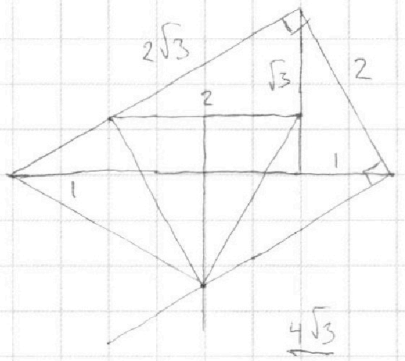
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



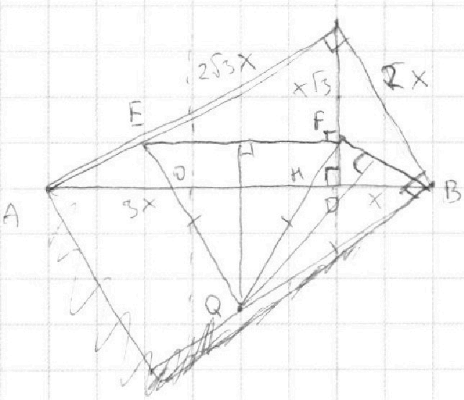
$y = |k| x$



$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32) = 0 \end{cases}$$

$y = -\frac{a}{2}x + 1{,}5b$



$\frac{AE}{QB} = \frac{AO}{OB}$

$\left(x - \frac{7}{3}\right)^2$

$(3x-7)^2$

$AD \cdot DB = CD^2$

$3BD^2 = CD^2$

$36 - 9x^2 + 6x - 1 - 9k^2x^2 = 0$

$9x^2(k^2+1) - 6x - 35 = 0$

$D = 36 + 4 \cdot 35 \cdot 9(k^2+1) =$

$36 - 9x^2 + 42x - 49 = 9k^2x^2$

$9x^2(k^2+1) - 42x + 13 = 0$

$D = 42^2 -$

$\frac{D}{4} = 21^2 - 9 \cdot 13(k^2+1) =$

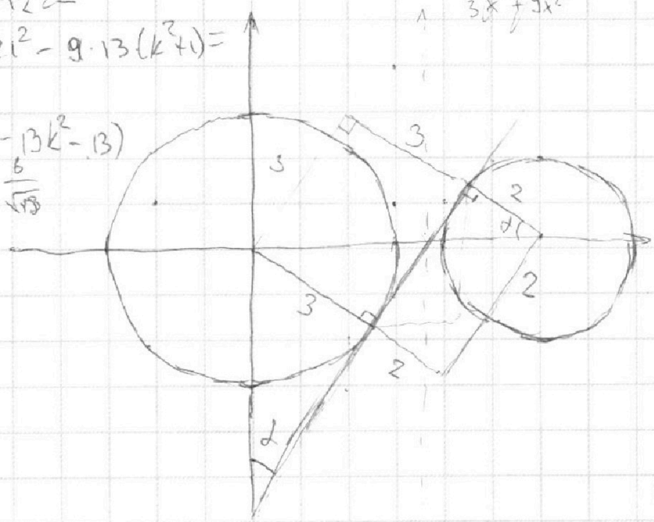
$x^2 + 3x^2$

$3x^2 + 9x^2$

$(x-6)^2 + y^2 = 4$

$= 9(49 - 13k^2 - 13)$

$k = \pm \frac{6}{\sqrt{13}}$



$\frac{6}{35}$

$$\begin{cases} 4 - \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = k^2x^2 \,\Big|\cdot 9 \\ 9 - \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = k^2x^2 \,\Big|\cdot 9 \end{cases}$$

$36 - 9x^2 + 6x - 1 - 9kx = 0$

$9x^2 - x(6 - 9k) - 35 = 0$

$D = (6 - 9k)^2 + 4 \cdot 35 \cdot 9 =$

$= 81k^2 - 108k + 36 + 4 \cdot 35 \cdot 9 = 0$

$(9k)^2 - 2 \cdot 9 \cdot 6k + 36^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\cancel{a^2 b^2 c^2 \vdots 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5}$

$a^2 b^2 c^2 \vdots 2^{8+14+19} \cdot 3^{10+13+18} \cdot 5^{10+13+30}$

$2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$

$abc \vdots 2^{21} \cdot 3^{20,5} \cdot 5^{26,5}$

$2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$

$a \vdots 2^7$ $\quad a \vdots 2^7$

$c \vdots 2^{12}$ $\quad b \vdots 2^3$

$b \vdots 2^2$ $\quad c \vdots 2^{11}$

$$\left[\begin{aligned} &\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k\right) \\ &\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x + 2\pi k\right) \end{aligned}\right.$$

-3π

$\frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}$

$6x = 2\pi + 10\pi k$

$12 \quad x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi k}{3}$

$-\frac{2\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3}, 2\pi$

$\frac{11\pi}{3}, \frac{16\pi}{3}$

$\sin(4\alpha) = 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha =$
$= 4\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

$30^\circ \cdot 5 = 60^\circ + 90^\circ$

$x = \frac{\pi}{3}$ $\quad \frac{5\pi}{2} + 5x + 10\pi k = x + \frac{\pi}{2}$

$[-450^\circ; 450^\circ]$ $\quad 4x = -2\pi - 10\pi k$

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$\cancel{5\arcsin(\cos x) = \arcsin(\sin(x + \frac{\pi}{2}))}$

$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$

$\frac{\pi}{6}$

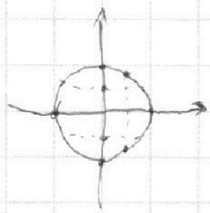
$x \in [-3\pi, 2\pi]$

$-\frac{5\pi}{2}$

$\arcsin(\cos x) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)\right)$

$\cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right)$ $\quad \cos x =$

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$



$\frac{\pi}{6} \cdot 5 = \frac{11\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$

$5 \cdot \frac{\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$

$2\pi = 6x \quad x = \frac{\pi}{3}$

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$5\frac{\pi}{2} + 5x = x + \frac{\pi}{2}$ $\quad \cos x$

$4x = -2\pi$

$x = -\frac{\pi}{2}$ $\quad \cos x =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_3^4 x + \cancel{6}\frac{6}{\log_3 x} = \cancel{10}\ \frac{5}{2}\log_x \cancel{243}^{3} - 8$

$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} - \frac{5}{2\log_3 x} + 8 = 0$

$t^4 + \frac{6}{t} - \frac{5}{2t} + 8 = 0$

$t^4 + \frac{7}{2t} + 8 = 0$

$\frac{2t^5 + 16t + 7}{2t} = 0$

$10t^4 + 16$

$\begin{cases} 2\log_3^5 x + 16\log_3 x + 7 = 0 \\ 2\log_3^5 (5y) + 16\log_3 (5y) - 7 = 0 \end{cases}$

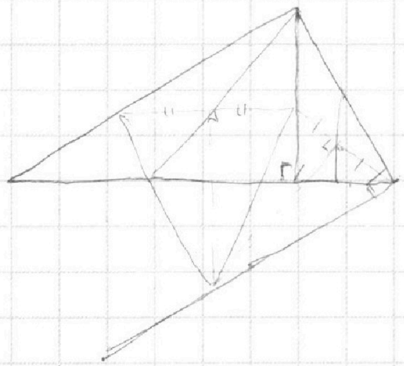
$\log_3^5 x + \log_3^5 (5y) + 8\log_3 x + 8\log_3 (5y) = 0$

$x = \frac{1}{5y}$

~~$\log$~~

$a^4 + \frac{2}{a} = \frac{11}{2a} - 8$

$\frac{2a^5 + 16a - 7}{2a} = 0$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$

$(0;0);(-11;0)$
$(0;-20);(-11;-20)$

$3\Delta x + \Delta y = 33$

$\Delta y = 33 - 3\Delta x$

$3\Delta x + \Delta y = 33$

$x = \geq 14$

$(-14;0)(+4;33)$

0;33 -1;36

1;30 -2;39

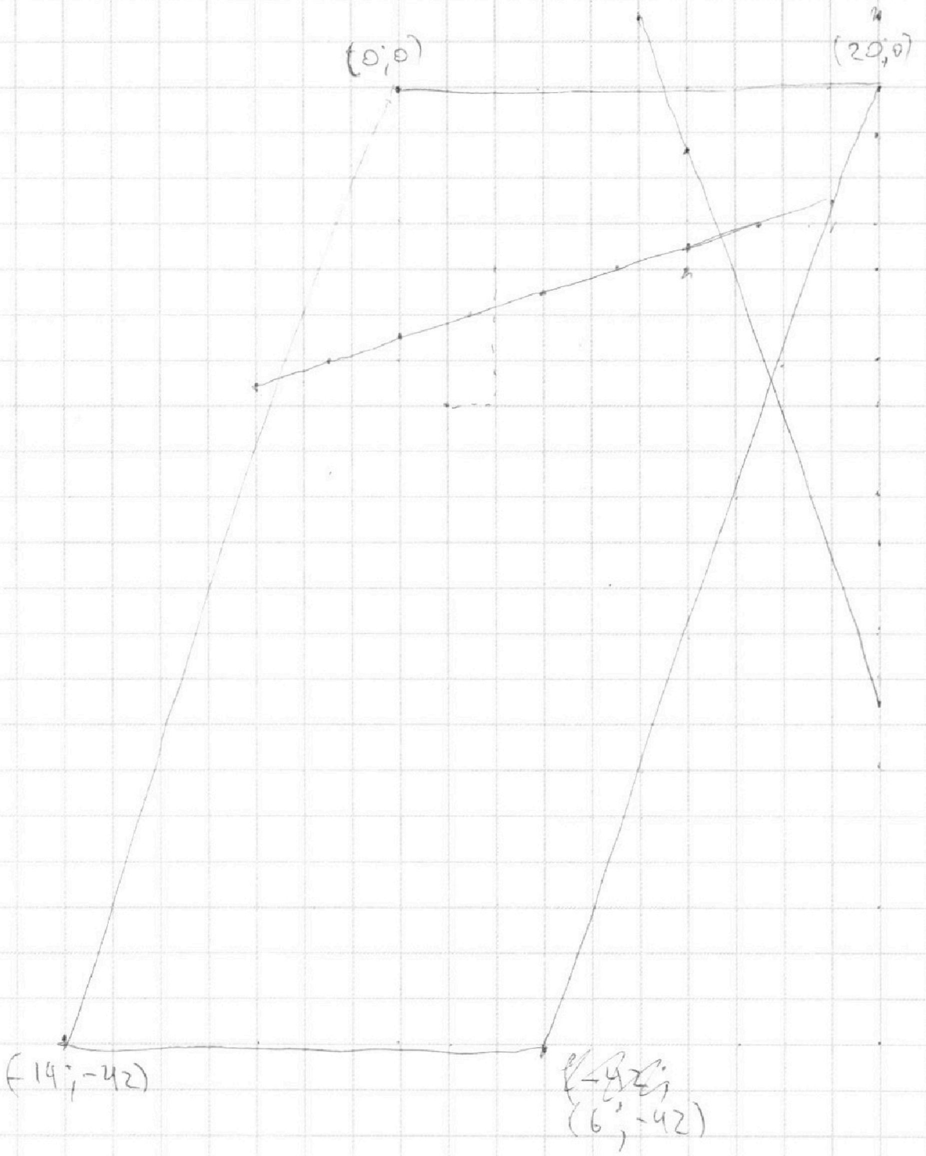
2;27 -3;42

3;24

6;15

10;0 7;12

25;-42



$\frac{42}{14} = 3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ