



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

Пусть $a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1}$, $b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2}$, $c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \cdot 5^{z_3}$
(из соображений минимальности abc будет считаться, что других простых делителей нет.)
Тогда:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_2 + x_3 \geq 14 \\ x_3 + x_1 \geq 19 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 + y_2 \geq 10 \\ y_2 + y_3 \geq 13 \\ y_3 + y_1 \geq 18 \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 + z_2 \geq 10 \\ z_2 + z_3 \geq 13 \\ z_3 + z_1 \geq 30 \end{cases}$$

(как показано строки состав-х множителей в разложенных ab , bc , ca). Сложим нерав-ва в каждой системе:

$$2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 42, \quad 2(y_1 + y_2 + y_3) \geq 41, \quad 2(z_1 + z_2 + z_3) \geq 53. \quad \text{Тогда}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 21, \quad y_1 + y_2 + y_3 \geq 21, \quad z_1 + z_2 + z_3 \geq 27$$

(однако $z_3 + z_1 \geq 30$, тогда $z_1 + z_2 + z_3 \neq \geq 30$)

$$\text{Тогда } abc \neq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$\text{Это достигается при } a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{15}, \quad b = 2^7 \cdot 3^7, \quad c = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{15}$$

(для таких a, b, c условие задачи выполнено)

$$\text{Ответ: } \min(abc) = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$\text{Если } \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} \quad \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

Проведем замену $t = x + \frac{\pi}{2}$

$$\text{Если } \arcsin(\sin t) = t \quad \text{Поскольку при любом}$$

$$t \in \arcsin \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad \text{Если } \arcsin \in [-2\pi - \frac{\pi}{2}, 2\pi + \frac{\pi}{2}]$$

$$\text{Тогда } t \in [-2\pi - \frac{\pi}{2}, 2\pi + \frac{\pi}{2}]$$

$$1) t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad \arcsin(\sin t) = t \quad \text{Если } t = 0$$

$$2) t \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi - \frac{\pi}{2}] \quad \arcsin(\sin t) = \pi - t$$

$$\pi - t = t \quad t = \frac{\pi}{2} \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi - \frac{\pi}{2}]$$

$$3) t \in [2\pi - \frac{\pi}{2}, 2\pi + \frac{\pi}{2}] \quad \arcsin(\sin t) = t - 2\pi$$

$$t - 2\pi = t \quad t = \frac{5\pi}{2} \in [2\pi - \frac{\pi}{2}, 2\pi + \frac{\pi}{2}]$$

$$4) t \in [-2\pi + \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}] \quad t + 2\pi \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi - \frac{\pi}{2}]$$

$$\arcsin(\sin t) = \arcsin(\sin(t + 2\pi)) = \pi - (t + 2\pi) = -t - \pi$$

$$-t - \pi = t \quad t = -\frac{\pi}{2} \in [-2\pi + \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$$

$$5) t \in [-2\pi - \frac{\pi}{2}, -2\pi + \frac{\pi}{2}] \quad t + 2\pi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\arcsin(\sin t) = \arcsin(\sin(t + 2\pi)) = t + 2\pi$$

$$t + 2\pi = t \quad t = -\frac{5\pi}{2} \in [-2\pi - \frac{\pi}{2}, -2\pi + \frac{\pi}{2}]$$

$$t \in \{-\frac{5\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, 0, \frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\}, \quad x = t - \frac{\pi}{2}, \text{ тогда}$$

$$x \in \{-3\pi, -\frac{4\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 2\pi\}$$

$$\text{Ответ: } x \in \{-3\pi, -\frac{4\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 2\pi\}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

уравнение $x^2 + (kx+d) - g = 0$ имеет
единств. рш. $(k^2+1)x^2 + 2kd + d^2 - g = 0$
 $\frac{D}{4} = k^2 d^2 - (k^2+1)(d^2 - g) = 0 \quad gk^2 - d^2 + g = 0$
 $d^2 = g(k^2+1)$

$y = kx + d$ — упр-е касан. (AB). Также AB кас-
на крив. через $X(x_0, 0)$, тогда

$$0 = 3,6k + b \quad b = -3,6k \quad b^2 = 12,96k^2$$

$$3,96k^2 = g \quad \frac{9 \cdot 44}{100} k^2 = g \quad gk^2 + g$$

$$k_1 = -\frac{10}{2\sqrt{11}}, \quad k_2 = \frac{10}{2\sqrt{11}} \quad \text{— упр. касат. к крив.}$$

Получ. в соответствии с замечанием (i),

$$a \in [k_1, k_2], \quad a \in \left(-\frac{10}{2\sqrt{11}}, \frac{10}{2\sqrt{11}}\right)$$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\frac{10}{2\sqrt{11}}, \frac{10}{2\sqrt{11}}\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5
По условию

$$\log_x 243 = \frac{5}{2} \log_x 3 \quad 4$$

$$\log_{25} 3 = \frac{11}{2} \log_{25} 3$$

перепишем систему так:

$$\begin{cases} \log_3^4 x + \frac{7}{2} \log_x 3 = -8 & u = \log_3 x \\ \log_3^4 y - \frac{7}{2} \log_y 3 = -8 & v = \log_3 y \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^4 + \frac{7}{2u} = -8 \\ v^4 - \frac{7}{2v} = -8 \end{cases} \quad \text{Вычтем из 1-го 2-е:}$$

$$u^4 - v^4 + \frac{7}{2} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} \right) = 0$$

$$(u - v) \left((u + v)(u^2 + v^2) + \frac{7}{2} \cdot \frac{u + v}{uv} \right) = 0$$

Заметим, что из исходных ур-в системы
следует: $u < 0, v > 0 \Rightarrow uv < 0, u - v < 0$

Тогда рав-ва $\underbrace{uv(u-v)(u^2+v^2)}_{<0} = -\frac{7}{2}$

невозможно, т.к. $\underbrace{uv}_{<0} \underbrace{(u-v)}_{<0} \underbrace{(u^2+v^2)}_{>0} > 0$

З-е множитель тем самым не обращается
в 0. Тогда $u + v = 0 \Rightarrow \log_3 x + \log_3 y = 0$

$$\log_3(xy) = 0 \quad xy = 1 \quad xy = \frac{1}{5}$$

Ответ: $xy = \frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} 2u^4 + \frac{7}{u} = -16 \\ 2v^4 - \frac{7}{v} = -16 \end{cases} \quad 2(u-v)(u+v)(u^2+v^2) + 7 \cdot \frac{u+v}{uv} =$$
$$u < 0, v > 0 \quad (u+v) \left(2(u-v)(u^2+v^2) + \frac{7}{uv} \right) = 0$$
$$7 \cdot \frac{v-u}{uv} + 2u^2 + 2v^4 = -32 \quad u-v = \frac{1}{7}(2u^4 + 2v^4 + 32)$$
$$\frac{1}{7}(2u^4 + 2v^4 + 32) \cdot (u^2 + v^2) + \frac{7}{uv} = 0$$
$$f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 8u^3 - \frac{7}{u^2} = 0 \quad u^5 = \frac{7}{8}$$
$$\frac{2}{7}((u^2 + v^2)^2 - 2u^2v^2 + 16)(u^2 + v^2) + \frac{7}{uv} = 0$$
$$\underbrace{uv(u-v)}_{\substack{\uparrow \\ 0}} (u^2 + v^2) = -\frac{7}{2} \quad \emptyset$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

$a, b, c \in \mathbb{N}$
 $abc: 2^{19} 3^{18} 5^{30}$ $ab: 2^9 3^{10} 5^{10}$ $bc: 2^{14} 3^{13} 5^{13}$
 $\min(abc) = \dots$

$a = 2^{x_1} 3^{y_1} 5^{z_1}$, $b = 2^{x_2} 3^{y_2} 5^{z_2}$, $c = 2^{x_3} 3^{y_3} 5^{z_3}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_2 + x_3 \geq 14 \\ x_3 + x_1 \geq 19 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 + y_2 \geq 10 \\ y_2 + y_3 \geq 13 \\ y_3 + y_1 \geq 18 \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 + z_2 \geq 10 \\ z_2 + z_3 \geq 13 \\ z_3 + z_1 \geq 30 \end{cases}$$

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 21$, $y_1 + y_2 + y_3 \geq 21$, $z_1 + z_2 + z_3 \geq 30$

$x_1 - x_3 = -5$, $x_2 = x_1 + 5$, $2x_1 + 5 = 19$, $x_1 = 7$, $x_2 = 12$, $x_3 = 2$

$y_1 = 7$, $y_2 = 3$, $y_3 = 11$

$z_1 = 15$, $z_2 = 15$, $z_3 = 0$
 $abc = 2^{21} 3^{21} 5^{30}$ ($a = 2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^{15}$, $b = 2^{12} \cdot 3^3 \cdot 5^{13}$, $c = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0$)

Задача 3

$\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\arcsin(\sin(x + \frac{\pi}{2})) = x + \frac{\pi}{2}$

$\arcsin t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\arcsin(\sin t) = t$

$t \in [-2\pi - \frac{\pi}{2}, 2\pi + \frac{\pi}{2}]$

$\arcsin t = \arcsin(\sin(\pi - t))$

1) $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \arcsin(\sin t) = t$ $st = t$ $t = 0$

2) $t \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi - \frac{\pi}{2}]$ $\arcsin(\sin t) = \pi - t$ $\pi - st = t$

3) $t \in [2\pi - \frac{\pi}{2}, 2\pi + \frac{\pi}{2}]$ $\arcsin(\sin t) = t - 2\pi$ $t = \frac{5\pi}{6}$

4) $t \in [-2\pi + \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$ $\arcsin(\sin t) = -t - \pi$ $t = \frac{5\pi}{6}$

$\arcsin(\sin t) = \arcsin(\sin(t + 2\pi))$ $st + 2\pi = t$ $t = -\frac{5\pi}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5) \downarrow \in [-2\pi - \frac{\pi}{2}, -2\pi + \frac{\pi}{2}] \quad \sin(\sin t) = \sin(\sin(t + 2\pi)) = \sin t$$

$$t + 10\pi = t \quad t = -\frac{5\pi}{2}$$

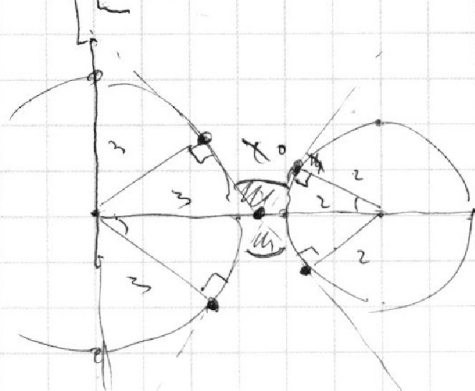
$$x = t - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \in \left\{ -3\pi, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 2\pi \right\}$$

Задача 4

a: $\exists b: \begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$ 4 рещ.

$$y = -\frac{1}{2}ax + \frac{3}{2}b$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & - \text{окр. } O_1(0,0), R=3 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 & - \text{окр. } O_2(6,0), R=2 \end{cases}$$



$$y = kx + b$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = kx + b \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$(k^2 + 1)x^2 + 2kbx + b^2 - 9 = 0$$

$$\Delta_x = k^2 b^2 - (k^2 + 1)(b^2 - 9) = 9k^2 - b^2 + 9 = 0$$

$$b^2 = 9(k^2 + 1)$$

$$(k^2 + 1)x + 2(kb - 6)x + b^2 + 32 = 0$$

$$\Delta_y = k^2 b^2 - 12kb + 36 - k^2 b^2 - 12k^2 b^2 - 32 = 0$$

$$-32k^2 - b^2 - 12kb + 4 = 0 \quad b^2 = 9(k^2 + 1)$$

$$32k^2 + 9b^2 + 12kb + 4 = 0 \quad 48k^2 + 12kb + 5b^2 = 0$$

$$32k^2 + b^2 + 12kb - 4 = 0 \quad (k \sim \sqrt{b})$$

$$\Delta = 36b^2 - 128 = 32(b^2 - 4) = 4b^2 + 4 \cdot 32 = 4(b^2 + 32)$$

$$x_0 = \frac{3}{2} \quad (из\ начальных\ данных) \quad x_0 = \frac{18 - 3x_0}{5} = \frac{18}{5} = 3.6$$

$$y = kx + b, \quad 0 = 3.6k + b \quad b = -3.6k \quad y = kx - 3.6k$$

$$17.96k^2 = 9k^2 + 9 \quad 8.96k^2 = 9$$

$$k = \pm \frac{3}{\sqrt{4.48}} = \pm \frac{10\sqrt{11}}{43}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_{x^2} 273 - 8 & x > 0, x \neq 1 \\ \log_3^4(5y) + 2 \log_3 5y = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8 & y > 0, y \neq \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\log_{x^2} 243 = \frac{5}{2} \log_x 3 \quad \log_3 x + \frac{7}{2} \log_3 3 = -8$$

$$24^{\frac{5}{2}} + \frac{7}{2} + 6 = -8 \quad 24^{\frac{5}{2}} = \frac{7}{2} - 16$$

$$\log_{25y^2} (3^{11}) = \frac{11}{2} \log_{5y} 3 \quad \log_3 x = 4$$

$$\log_3^4(5y) - \frac{7}{2} \log_{5y}^4 3 = -8 \quad \log_{5y} 3 = v$$

$$\log_3(5xy) = \log_3(5y) + \log_3 x \quad u + v = ?$$

$$\begin{cases} u^4 + \frac{7}{2}u = -8 \\ uv^4 - \frac{7}{2}v = -8 \end{cases} \quad \begin{aligned} &u^4 - v^4 + \frac{7}{2}(u+v) = \\ &= (u-v)(u+v)(u^2+v^2) + \frac{7}{2}(u+v) = \\ &= (u+v)((u-v)(u^2+v^2) + \frac{7}{2}) = 0 \end{aligned}$$

$$u \neq v \Rightarrow \frac{2}{7}(u^4 + v^4 + 16) \quad u-v = \frac{2}{7}(u^4 + v^4 + 16)$$

$$u^4 + v^4 + \frac{7}{2}(u-v) = -16 \quad -\frac{2}{7}(u^4 + v^4 + 16)(u^2 + v^2) + \frac{7}{2}$$

$$(u^4 + v^4 + 16)(u^2 + v^2) = \frac{49}{4} \quad 12 < \frac{49}{4} < 13 \quad \geq 0$$

$$\begin{cases} 2u^4 + 7u = -16 \\ 2v^4 - 7v = -16 \end{cases} \quad (u+v)(2(u-v)(u^2+v^2) + 7) = 0$$

$$2(u^4 + 16) + 7(u+v) = -16$$

$$u^3 + \frac{8}{u} = -\frac{7}{2}$$

$$-(2u^4 + \frac{16}{u}) = 7$$

$$f(x) = x^4 + \frac{8}{x} + \frac{7}{2}x + 8$$

$$g(x) = x^4 - \frac{7}{2}x + 8$$

$$f(x) = 2x^4 + 7x + 11$$

$$g(x) = 2x^4 - 7x + 16$$

$$f'(x) = 4x^3 + 7$$

$$g'(x) = 4x^3 - 7$$

$$f(x) = 2x^4 + 7x + 11$$

$$g(x) = 2x^4 - 7x + 16$$



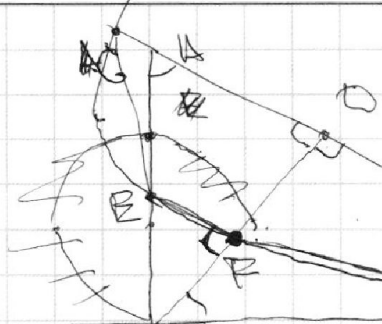
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

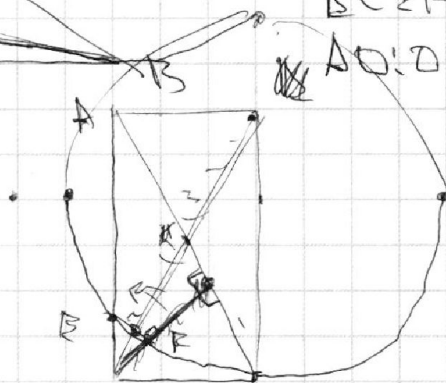
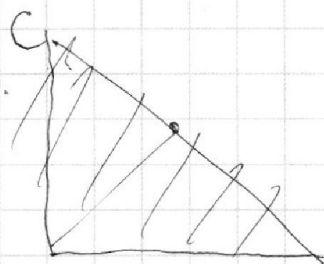


$$AB \parallel EF, AD:DB = 3:1$$

$$S_{\triangle ABC} = ?$$

$$\triangle CEF \sim \triangle CDA$$

$$AD:DB = 3:1$$



$$\triangle ADC \sim \triangle ADB$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB} = \frac{AE}{EB}$$

$$AD = \frac{3}{4} AB, DB = \frac{1}{4} AB$$

$$k = \frac{EF}{AD} \quad BC = 0$$

