



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 11



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150} \cdot 3^{300}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 2) - x(13y - 27) + 44y - 94 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC . Прямые ED и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника BCF в 16 раз больше площади треугольника DGF .

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^5 + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a , b и c не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения abc .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 17$, $XY = 31$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Продолжение:

$$3) x \in [a; -1):$$

$$x^3 + 4 + x^2 - 1 \leq x^3 - x^2 + 5$$

$$2x^2 \leq 2$$

$$x^2 \leq 1$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$\text{и}$$
$$[a; -1)$$

$$5) x \in (1; \infty):$$

$$x^3 + 4 + x^2 - 1 \leq x^3 - x^2 + 5$$

$$x \in [-1; 1]$$

$$\text{и}$$
$$(1; \infty)$$

$$\text{Об: } x \in (-\infty; -\sqrt[3]{4}] \cup [1; 1]$$

$$4) x \in [-1; 1]:$$

$$x^3 + 4 + x^2 + 1 \leq x^3 - x^2 + 5$$

$$5 \leq 5$$

всегда
↓

$$x \in [-1; 1]$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

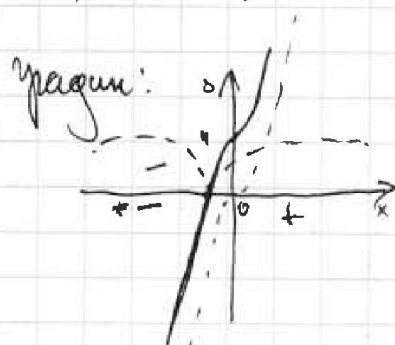
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

Решение:

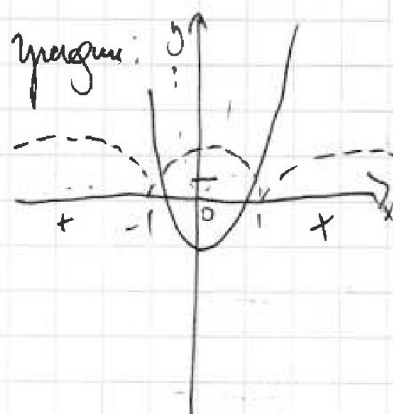
$$|x^3+4| + |x^2-1| \leq |x^3-x^2+5|$$

(1) (2) (3)

(1) $y = x^3+4$
 $y=0$:
 $x^3+4=0$
 $x = -\sqrt[3]{4}$



(2) $y = x^2-1$
 $y=0$:
 $x = \pm 1$



(3) $y = x^3-x^2+5$ график $y = x^3-x^2$ со смещ. вверх на 5

$y=0$:
 $x=a$

$x = -1$:
 $y = -1+1+5 = 3 > 0$
 $x = -\sqrt[3]{4}$:
 $y = -4 - (\sqrt[3]{4})^2 + 5 = 1 - (\sqrt[3]{4})^2 < 0$
 $\Downarrow$
 $a \in (-\sqrt[3]{4}, -1)$



1) $x \in (-\infty, -\sqrt[3]{4}]$

$$-x^3-4+x^2-1 \leq -x^3+x^2-5$$

$$-5 \leq -5$$

$\Downarrow$ верно

$$x \in (-\infty, -\sqrt[3]{4}]$$

2) $x \in (-\sqrt[3]{4}, a)$

$$x^3+4+x^2-1 \leq -x^3+x^2-5$$

$$2x^3 \leq -8$$

$$x^3 \leq -4$$

$$x \leq -\sqrt[3]{4}$$

решений по промежутку нет

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Печать QR-кода недопустима!

Решение:

Т.к. a, b, c - геом. прогрессия

$$a \cdot b \cdot c = b^3 = 2^{150} \cdot 3^{300}$$

$$b = 2^{50} \cdot 3^{100}$$

Если прогрессия возрастающая:

$$\text{Т.к. } a \in \mathbb{N} \Rightarrow a = \frac{b}{q} \Rightarrow b : q \quad \text{и т.к. } c \in \mathbb{N} \Rightarrow c = bq \Rightarrow q \in \mathbb{N}$$

получается, что q - делитель b

$$\text{Ко-во делителей } b = 51 \cdot 101 = 5151$$

Отв: 5151 Если прогрессия убывающая:

$$\text{Т.к. } c \in \mathbb{N} \Rightarrow b : q ; a \in \mathbb{N} \Rightarrow q \in \mathbb{N}$$

получается, что q - делитель b

$$\text{Ко-во делителей } 5151.$$

Тогда всего Троек:

$$5151 \cdot 2 - 2 = 10301$$

Итого 10301 т.к. для обеих случаев есть ситуация $a = b = c$

$$\text{Отв: } 10301$$

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

$$x^2(y-2) - x(13(y-2)-1) + 44(y-2) - 6 = 0$$

$$x^2(y-2) - 13x(y-2) + x + 44(y-2) - 6 = 0$$

$$(y-2)(x^2 - 13x + 44) = 6 - x$$

$$(y-2) = \frac{6-x}{x^2-13x+44}$$

Т.к. $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y-2 \in \mathbb{Z}$

$$(6-x) \mid (x^2-13x+44)$$

$$|6-x| \geq x^2-13x+44$$

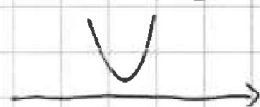
1) $6-x \geq x^2-13x+44$

$$0 \geq x^2-12x+38$$

решений
нет

$$x^2-12x+38$$

$$D = 144 - 152 < 0$$



$$x^2-12x+38 > 0$$

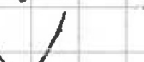
2) $x-6 \geq x^2-13x+44$

$$x^2-14x+50 \leq 0$$

решений
нет

$$x^2-14x+50$$

$$D = 196 - 200 < 0$$



$$x^2-14x+50 > 0$$

Т.к. $|6-x| < x^2-13x+44$

$\downarrow$

$$y-2 \notin \mathbb{Z}$$

$$\downarrow$$

нет решений в $\mathbb{Z}$

Ответ: решений нет

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

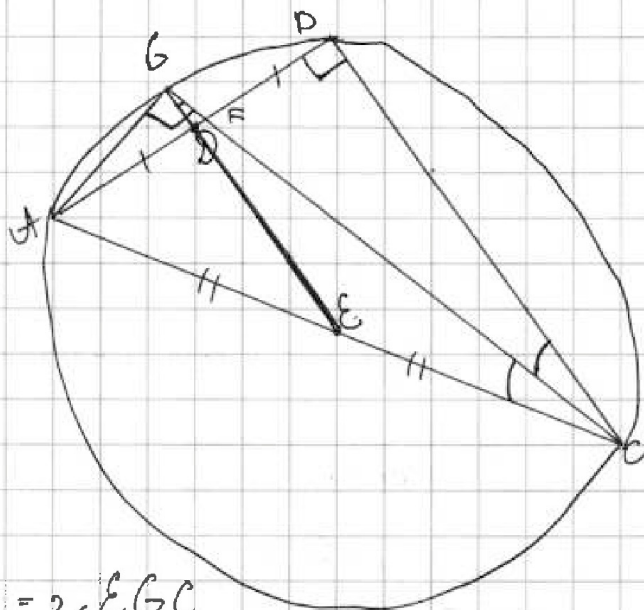
1) Т.к. DE — ср. линия $\triangle ABC \Rightarrow$

$$DE \parallel BC \Rightarrow \angle EGC = \angle GCB$$

как накрест лежащие при
 $DE \parallel BC$ и сек. GC

$$\angle EGC = \angle GCB = \angle GCE$$

$$\triangle GEC - \text{р/б} \Rightarrow GE = EC = AE$$



$$2) \angle AGE = \angle EGC + \angle ECG = 2\angle EGC$$

$$\text{Т.к. } AE = BE \Rightarrow \triangle AGE - \text{р/б} \Rightarrow \angle AGE = \frac{180 - \angle AEG}{2} = 90 - \angle EGC$$

$$3) \angle AGE + \angle EGC = 90^\circ = \angle AGC$$

$$\angle AGC = \angle ABC \text{ т.к. они опираются на одну хорду} \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$$

$$4) \triangle FDC \sim \triangle DGF (\angle EGC = \angle GCB; \angle GFA = \angle BFC \text{ как верш.})$$

$$\frac{BC}{GD} = k = \sqrt{\frac{S_{FDC}}{S_{DGF}}} = 4 \Rightarrow GD = \frac{BC}{4}$$

$$5) AG = 2EC = 2GE = 2 \cdot (GD + DE) = 2 \left(\frac{BC}{4} + \frac{BC}{2} \right) = 1.5BC$$

$$6) \cos \angle ACB = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{3}$$

$$\angle ACB = \arccos \frac{2}{3}$$

$$\sin \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{3}$$

$$\angle BAC = \arcsin \frac{2}{3}$$

$$\text{Отв: } \angle ABC = 90^\circ; \angle ACB = \arccos \frac{2}{3}; \angle BAC = \arcsin \frac{2}{3}$$

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Решение:

$$x^5 + ax = 0$$

$$x(x^4 + a) = 0$$

$$x = 0; x^4 + a = 0 \\ x^4 = -a \\ x = \pm \sqrt[4]{-a}$$

$y = ax + x^5$ имеет лог. (рис. 1)

2) Рассмотрим точки A, C

$$x^5 + ax = -3x$$

$$x(x^4 + a + 3) = 0 \\ x = 0; x^4 = -a - 3 \\ x = \pm \sqrt[4]{-a - 3}$$

3) Т.к. ABCD - квадрат $\Rightarrow AC \perp BD \Rightarrow BD \in y = \frac{1}{3}x$
(прямые $\perp$ если $k_1 = -\frac{1}{k_2}$)

$$4) x^5 + ax = \frac{1}{3}x$$

$$x(x^4 + a - \frac{1}{3}) = 0 \\ x = 0; x = \pm \sqrt[4]{-a + \frac{1}{3}}$$

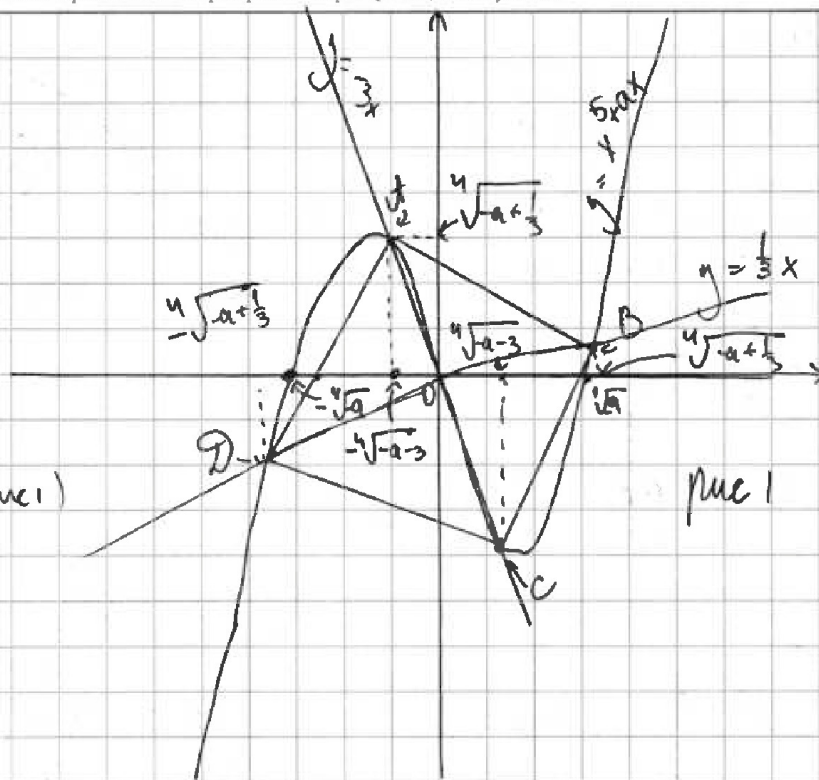
$$5) \text{Т.к. } \vec{OA} \perp \vec{OB} \Rightarrow \vec{OA}(x_1; y_1) \cdot \vec{OB}(x_2; y_2) = 0 \\ \vec{OA}(-\sqrt[4]{-a-3}; \sqrt[4]{-a-3})$$

$$7) AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} \quad \vec{AC}(-\sqrt[4]{-a-3}; \sqrt[4]{-a+\frac{1}{3}})$$

$$AC = 2AO = 2\sqrt{\sqrt[4]{-a+\frac{1}{3}} + \sqrt[4]{-a-3}}$$

$$AB = 2\sqrt{\frac{\sqrt[4]{\frac{1}{24}} + \sqrt[4]{\frac{1}{24}}}{2}} = 2\sqrt{\frac{9+1}{2\sqrt{24}}} = 2\sqrt{\frac{10}{4\sqrt{6}}} = \sqrt{\frac{10}{\sqrt{6}}} = \sqrt{10\sqrt{6}}$$

$$\text{Отв. } a = -\frac{73}{24}; AB = \sqrt{\frac{10}{\sqrt{6}}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c}$$

$$a - b = \frac{5}{c} - \frac{5}{b}$$

$$a - b = \frac{5(b-c)}{bc}$$

$$b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$

$$b - c = \frac{5}{a} - \frac{5}{c}$$

$$b - c = \frac{5(c-a)}{ac}$$

$$c + \frac{5}{a} = a + \frac{5}{b}$$

$$c - a = \frac{5}{b} - \frac{5}{a}$$

$$c - a = \frac{5(a-b)}{ab}$$

$$a - b = \frac{25(c-a)}{abc^2}$$

$$a - b = \frac{125(a-b)}{a^2b^2c^2}$$

$$b - c = \frac{25(a-b)}{a^2bc}$$

$$b - c = \frac{125(b-c)}{a^2b^2c^2}$$

$$c - a = \frac{25(b-c)}{ab^2c}$$

$$c - a = \frac{125(c-a)}{a^2b^2c^2}$$

Т.к. очевидно не все числа равны и/л след $\Rightarrow$
минимум одно из чисел: $(a-b)$; $(b-c)$; $(c-a) \neq 0$

$$\frac{125}{a^2b^2c^2} = 1$$

$$125 = (abc)^2$$

$$abc = \pm 5\sqrt{5}$$

$$abc = -5\sqrt{5}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a, b, c

$\frac{b^a}{a}, b, b^c$

$$abc = b^3 = 2^{150} \cdot 3^{300}$$

$$b = 2^{50} \cdot 3^{100}$$

$$\begin{array}{r} \times 38 \\ 4 \\ \hline 152 \end{array}$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\frac{b}{a} \in \mathbb{N} \Rightarrow b : a$$

$$q = 51 \cdot 100$$

$$2(22y - 47)$$

$$\begin{array}{r} \times 51 \\ 101 \\ \hline 5151 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 51 \\ \hline 5158 \end{array}$$

$$\frac{3 \cdot 2}{6}$$

$$2^2 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 12 \end{array}$$

$$\textcircled{13} x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

$$x^2y - 2x^2 - 13xy + 27x + 44y - 94 = 0$$

$$\textcircled{14} y^2 - 4y + 4 - 4(13y - 27) +$$

$$16y^2 - 2 \cdot 27 \cdot 13y + 27^2 + (y-8)(44y-94) =$$

$$= 16y^2 - 2 \cdot 13y^2 - 2 \cdot 3 \cdot 13y + 3^6 + 2 \cdot 11y^2 - 2^5 \cdot 11y - 2 \cdot 47y + 2 \cdot 47 =$$

$$= y(13^2 + 2 \cdot 11) - y(2 \cdot 3 \cdot 13 + 2 \cdot 11 + 2 \cdot 47) + 3^6 + 2 \cdot 47 > 0$$

$$0 < x^2 - 13x + 44$$

$$x^2 - 12x + 35$$

$$x^2(y-2) - x(13(y-2)-1) + 44(y-2) - 8 = 0$$

$$x^2(y-2) - 13x(y-2) + x + 44(y-2) - 8 = 0$$

$$(y-2)(x^2 - 13x + 44) + y - 8 = 0$$

$$(y-2)(x^2 - 13x + 44) = 8 - y$$

$$(y-2) = \frac{8-y}{x^2 - 13x + 44}$$

$$(y-2) = \frac{6-x}{x^2 - 13x + 44}$$

$$x^2 - 13x + 44 > 6 - x \Rightarrow \frac{6-x}{x^2 - 13x + 44} > 0$$

$$x^2 - 13x + 44 > 6 - x \Rightarrow \frac{6-x}{x^2 - 13x + 44} > 0$$

$$\begin{array}{r} y-2 \\ x^2 - 13x + 44 \\ x^2 - 14x + 50 \\ \hline 64 - 80 - 2x + 44 \end{array}$$

$$64 - 80 - 2x + 44$$

$$64 - 80 - 2x + 44$$

$$64 - 80 - 2x + 44$$

$$64 - 80 - 2x + 44$$

$$64 - 80 - 2x + 44$$

$$64 - 80 - 2x + 44$$

$$64 - 80 - 2x + 44$$

$$64 - 80 - 2x + 44$$

$$64 - 80 - 2x + 44$$

$$64 - 80 - 2x + 44$$

$$64 - 80 - 2x + 44$$

$$64 - 80 - 2x + 44$$

$$64 - 80 - 2x + 44$$

$$64 - 80 - 2x + 44$$

$$64 - 80 - 2x + 44$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$b + 5 + 4 + 5 + 5 + 4 + 4$$

10

$$28 + 5 = 33$$

$$18$$

$$27$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 8 \quad 11 \quad 33 \end{array}$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c}$$

$$a - b = \frac{5}{c} - \frac{5}{b} = \frac{5(b-c)}{bc}$$

$$b - c = \frac{5(c-a)}{ab}$$

$$c - a = \frac{5(a-b)}{ab} = \frac{25(b-c)}{a^2 b^2 c^2} = \frac{125(c-a)}{a^2 b^2 c^2}$$

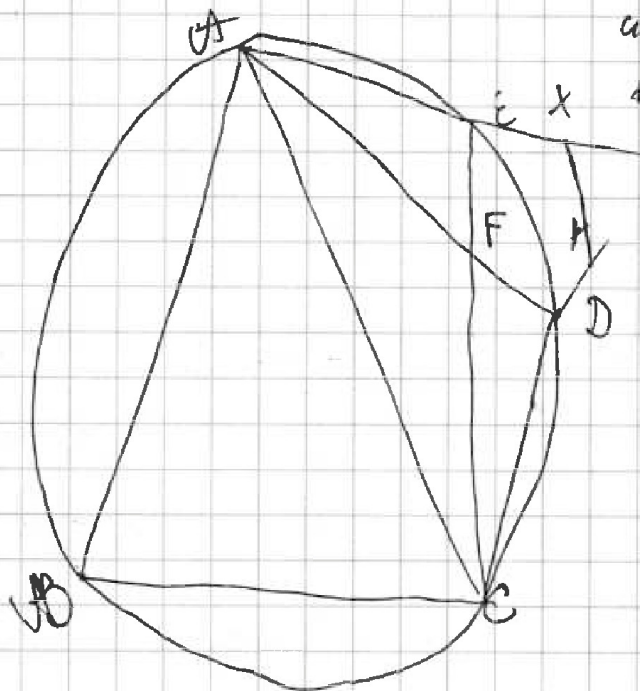
$$c - a = \frac{125(c-a)}{a^2 b^2 c^2}$$

$$\frac{125}{a^2 b^2 c^2} = 1$$

$$125 = (abc)^2$$

$$abc = \pm 5\sqrt{5}$$

$$abc = -5\sqrt{5}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

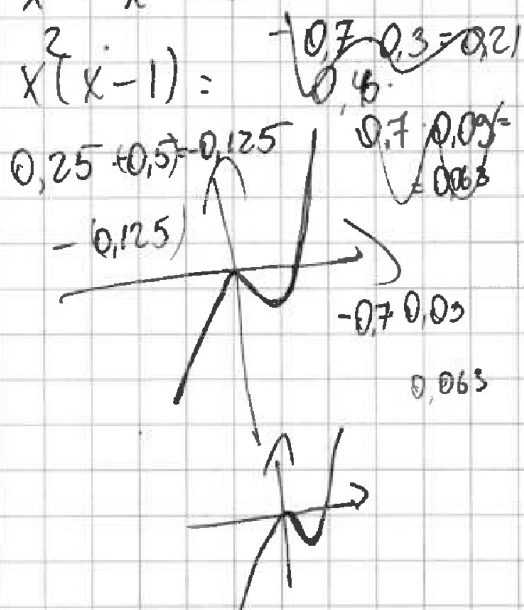
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 - x^2 + 5 = 0$$

$$x^3 - x^2 = 0$$

$$x^2(x-1) = 0$$





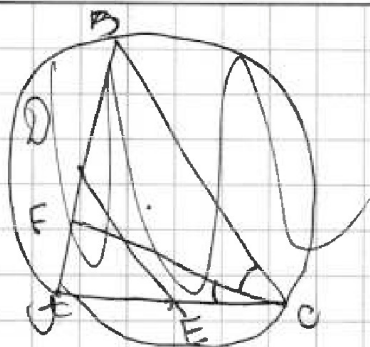
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

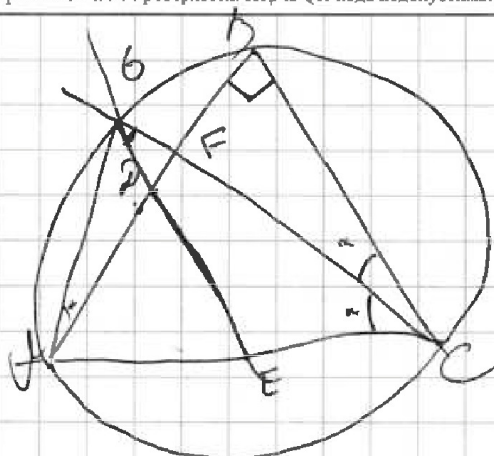
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = 16$$
$$\Downarrow$$
$$k = \frac{1}{4}$$



$$BC \parallel GE$$

$$\Delta BFC \sim \Delta GFD$$

$$k = \frac{BF}{GD} = \frac{BC}{GC}$$

$$\frac{DF}{FB} = \frac{1}{4}$$

$$90 - 2\alpha - 90 -$$

$$90 - 2 - 90 =$$

$$+ DE = \frac{1}{2} BC$$

$$GD = \frac{1}{4} BC$$

$$GE = \frac{3}{4} BC$$

$$EC = \frac{3}{4} BC$$

$$\frac{1}{2} AC = \frac{3}{4} BC$$

$$\angle G C = 90^\circ$$

$$\angle B C = 90^\circ$$

$$\cos 2\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3}$$

$$\angle B C \alpha = \arccos \frac{2}{3}$$

$$\angle B \alpha C = \arcsin \frac{2}{3}$$

$$y(x^4 + a)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☒	☒	☐	☐

МФТИ

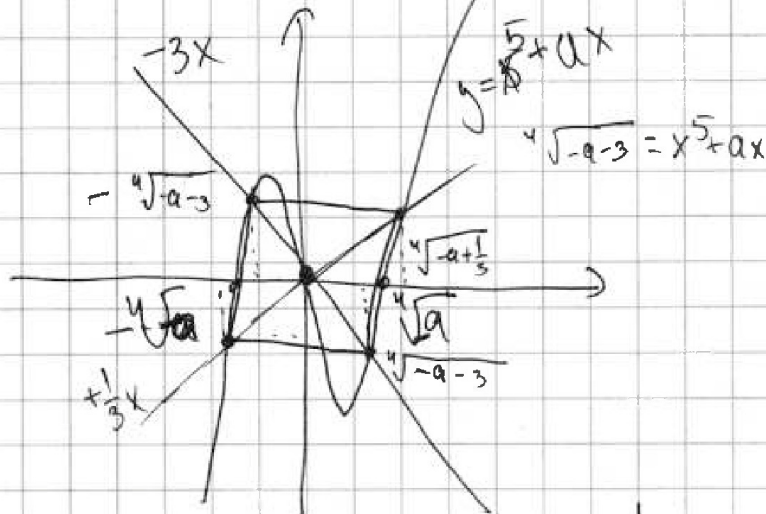
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^5 + ax = -3x$$

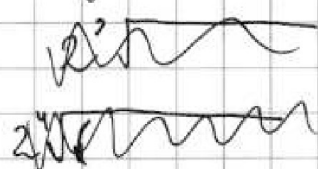
$$x^5 + x(a+3) = 0$$

$$x(x^4 + a + 3) = 0$$

$$y=0 \quad x = \sqrt[4]{-a-3}$$



диагональ!



$$2\sqrt{(a-3)^2 + (-a+\frac{1}{3})^2}$$

$$2\sqrt{a^2 + 6a + 9 + a^2 - \frac{2}{3}a + \frac{1}{9}} = 2\sqrt{2a^2 + \frac{16}{3}a + \frac{82}{9}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \sqrt{18a^2 + 48a + 82} = \frac{2}{3} \sqrt{18a^2 + 48a + 82}$$

$$\text{свойства} = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{18a^2 + 48a + 82}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10} \sqrt{6}}{3} = \sqrt{\frac{5 \sqrt{6}}{3}}$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{9a^2 + 16a + 41}$$

$$2 \sqrt{\frac{\sqrt{1-a-3} + \sqrt{-a+\frac{1}{3}}}{2}} = 2 \sqrt{\frac{1 + \sqrt{82}}{4 \sqrt{3}}}$$

$$2 \sqrt{\frac{\frac{1}{24} + \sqrt{\frac{82}{24}}}{2}}$$

$$2 \sqrt{\frac{1 + \sqrt{82}}{2 \sqrt{24}}} = 2 \sqrt{\frac{1 + \sqrt{82}}{4 \sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{82}}{\sqrt{3}}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 + \sqrt{82}}{\sqrt{3}}}$$

$$\frac{73+5}{24} = \frac{82}{24}$$

$$3 \frac{1}{24} - 3 = \frac{3 \frac{1}{24} + \frac{8}{24} + \frac{9}{24}}{3 + \frac{24}{24}}$$

$$\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$+ \frac{73}{24} - 3$$

$$+ \sqrt[4]{\frac{1}{3}} = \sqrt[4]{-3x}$$

$$(-a + \frac{1}{3}) = 81(a-3)$$

$$-a + \frac{1}{3} = -81a - 243$$

$$\frac{73}{24} + \frac{8}{24} - 80a = 243 + \frac{1}{3}$$

$$-240a = 729 + 1$$

$$-240a = 730$$

$$a = \frac{73}{24}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

