



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 12



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $5^{360} \cdot 7^{90}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 3) - x(11y - 34) + 32y - 101 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC . Прямые ED и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника BCF в 25 раз больше площади треугольника DGF .
5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -x^5 + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 2x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a , b и c не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения abc .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 19$, $XY = 36$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что неравенство имеет вид $|a| + |b| \leq |a - b|$, где $a = x^3 - 9$, $b = x^2 - 1$, а значит:

при $b > 0, a > 0$ нер-во равносильно

$$a + b \leq |a - b| \Leftrightarrow \begin{cases} a - b \geq a + b \\ a - b \leq -a - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq b \\ -a \geq a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{на выбор} \\ \text{на выбор} \end{cases}$$

при $b < 0, a < 0$ нер-во равносильно

$$-a - b \leq |a - b| \Leftrightarrow \begin{cases} a - b \geq -a - b \\ a - b \leq a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{на выбор} \\ \text{на выбор} \end{cases}$$

при $b > 0, a < 0$ нер-во $\Leftrightarrow b - a \leq |b - a|$ - верно

при $b < 0, a > 0$ нер-во $\Leftrightarrow a - b \leq |a - b|$ - верно

при $b = 0$ или $a = 0$:

$$|a| + 0 \leq |a - 0| \quad 0 + |b| \leq |0 - b|$$

$$|a| \leq |a| \quad |b| \leq |-b|$$

- верно

т.е. исходное неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x^3 - 9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 1 \\ x^3 < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| > 1 \\ x < \sqrt[3]{9} \quad (\sqrt[3]{9} > \sqrt[3]{1}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ x^3 - 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < 1 \\ x^3 > 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| < 1 \\ x > \sqrt[3]{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x^3 - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \sqrt[3]{9} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



прим. 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -1) \cup (1; \sqrt[3]{9}) \\ x \in \emptyset \\ x = \pm 1 \\ x = \sqrt[3]{9} \end{cases}$$

$$x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$$

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2) a, b, c — геом. прогр. Обозначим её знаменатель как q ,
 $q \neq 0, |q| \neq 1$. Так как $abc = 5^{120} \cdot 7^{30}$, $a, b, c \neq 0$
 $a, b, c \in \mathbb{N}$, $b = aq, c = aq^2$, то
 $abc = a \cdot aq \cdot aq^2 = a^3 q^3 = (5^{120} \cdot 7^{30})^3$
 $\Rightarrow aq = 5^{120} \cdot 7^{30}$.

Пара $(a; q)$ однозначно определяет всю геометрическую
прогрессию $(a; b; c)$ и каждой прогрессии соотв. ~~ет~~
~~различная~~ уникальная пара $(a; q) \Rightarrow$ кол-во троек
 $(a; b; c)$ равно кол-ву пар $(a; q)$. Найдём его:

рассмотрим возможные значения q :

т.к. $aq = \overset{(5^{120} \cdot 7^{30})}{const}$, a определяется однозначно как $\frac{5^{120} \cdot 7^{30}}{q}$,
из этого следует, что натуральным ($a \in \mathbb{N}$)
 q является делителем числа $5^{120} \cdot 7^{30}$,

таких делителей (не считая $q=1$)

$121 \cdot 31 - 1$, т.к. число $5^{120} \cdot 7^{30}$ имеет
в своём разложении на простые множители 120 пятерок и 30 семёрок.

$$121 \cdot 31 - 1 = 3750$$

Ответ: 3750

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3

$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$$

$$\Delta = (11y-34)^2 - 4(y-3)(32y-101) =$$

$$= 121y^2 - 748y + 1156 - 128y^2 + 404y + 384y - 1212 =$$

$$= -7y^2 + 40y - 56 \geq 0$$

$$x, y \in \mathbb{Z}$$

$$y = 3, \text{ однако}$$

$$\text{при } y-3=0$$

уравнение вырождается в линейное

$$x^2 \cdot 0 - x(33-34) + 32 \cdot 3 - 101 = 0$$

$$x = 101 - 96$$

$$x = 5$$

$$\text{Ответ: } (5; 3)$$

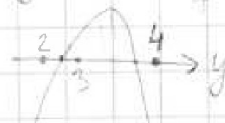
Рассмотрим

$$-7y^2 + 40y - 56 = 0$$

$$7y^2 - 40y + 56 = 0$$

$$\Delta = 400 - 56 \cdot 7 = 8$$

$$y_{1,2} = \frac{20 \pm 2\sqrt{2}}{7}$$



$$\frac{20-2\sqrt{2}}{7} > 2$$

$$\frac{20-2\sqrt{2}}{7} > 14$$

$$6 > 2\sqrt{2}$$

$$36 > 8$$

$$\frac{20-2\sqrt{2}}{7} < 3$$

$$\frac{20-2\sqrt{2}}{7} < 21$$

$$-1 < 2\sqrt{2}$$

$$\frac{20+2\sqrt{2}}{7} > 3$$

$$\frac{20+2\sqrt{2}}{7} > 21$$

$$2\sqrt{2} > 1$$

$$\frac{20+2\sqrt{2}}{7} < 4$$

$$\frac{20+2\sqrt{2}}{7} < 28$$

$$2\sqrt{2} < 8$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

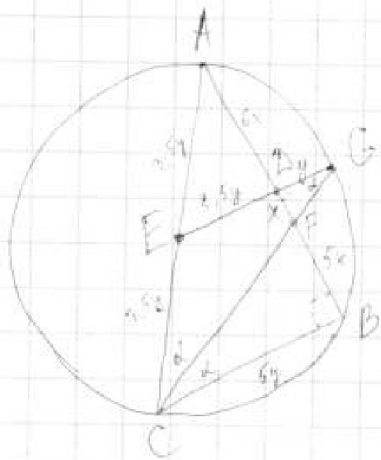
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

4



~~Иск.~~

Пусть $\angle ACF = \angle BCF = \alpha$, тогда

т.к. E - с-р AC, D - с-р AB, ED - с-р линии,
ED $\parallel$ BC

$$\angle EGC = \angle GCB = \alpha \text{ (накр. пер.)}$$

$$\Rightarrow \triangle GEC - \text{р/б}, GE = EC = EA$$

$$\Rightarrow E - \text{центр окр-ти}, \angle AGC = 90^\circ$$

$\angle CBA = \angle AGC = 90^\circ$, т.к. оп-ся на диаметр AC

$$\cancel{EG \parallel BC} \Rightarrow \cancel{EG} \quad \left. \begin{array}{l} \angle DFG = \angle CFB \text{ (верт.-ные)} \\ \angle AGF = \angle BCF = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle DGF \sim \triangle BCF$$

$$\Rightarrow \frac{DF}{BF} = \frac{DG}{BC} = \sqrt{\frac{S_{\triangle DGF}}{S_{\triangle BCF}}} = \frac{1}{5}$$

(Пусть $DF = x$, тогда $BF = 5x$, $AD = BD = 6x$)

Пусть $GD = y$, тогда $BC = 5y$, $ED = \frac{1}{2}BC = 2.5y$,

$$EC = EG = 3.5y = EA$$

$$\Rightarrow \sin \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7} \Rightarrow \angle BAC = \arcsin\left(\frac{5}{7}\right)$$

$$\sin \angle BCA = \sqrt{1 - \frac{25}{49}} = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2\sqrt{6}}{7} \Rightarrow \angle BCA = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)$$

$\uparrow \sqrt{1 - \sin^2 \angle BAC}$

$$\text{Ответ: } \angle ABC = 90^\circ; \angle BAC = \arcsin\left(\frac{5}{7}\right); \angle BCA = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

5. Так как ~~у~~ $y = -x^5 + ax$ диагонали квадрата
перпендикулярны, вторая диагональ будет лежать
на прямой $y = -\frac{1}{2}x$ ($k_1 \cdot k_2 = -1$)
 $k_1 = 2$ (все вершины в одной полуплоскости)

Координаты вершин будут иметь вид (положим $x_0 > 0, x_1 > 0$)

$(x_0; 2x_0), (-x_0; -2x_0), (x_1; -\frac{1}{2}x_1), (-x_1; \frac{1}{2}x_1)$; т.к.

точка пересечения диагоналей делит их пополам
(в параллелограмме).

$\Rightarrow$ Точки лежат на окр-ти с радиусом $\sqrt{5x_0^2} = x_0\sqrt{5}$

значит, $x_1^2 + (-\frac{1}{2}x_1)^2 = 5x_0^2$

$$\frac{5x_1^2}{4} = 5x_0^2$$

$$x_1^2 = 4x_0^2$$

$$x_1 = 2x_0$$

$\Rightarrow$ координаты $(x_0; 2x_0), (-x_0; -2x_0), (2x_0; -x_0), (-2x_0; x_0)$
удовлетворяют условию $y = -x^5 + ax$:

$$\begin{cases} 2x_0 = -x_0^5 + ax_0 \\ -2x_0 = x_0^5 - ax_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_0 = -32x_0^5 + 2ax_0 \quad | \cdot 2 \\ x_0 = 64x_0^5 - 4ax_0 \quad | \cdot 2 \end{cases}$$

$$64x_0^5 + x_0^5 - 5ax_0 = 0$$

$$-x_0^5 + ax_0 = 64x_0^5 - 4ax_0$$

$$x_0^5 - ax_0 = -64x_0^5 + 4ax_0$$

$$\begin{cases} 65x_0^5 = 5ax_0 \\ 65x_0^5 = 5ax_0 \end{cases} \quad | : 5x_0 \neq 0$$

$$13x_0^4 = a$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

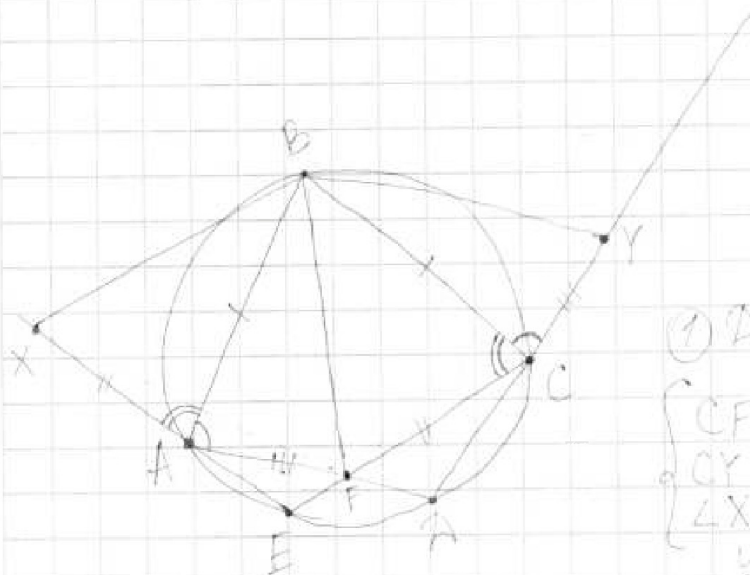
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

7



$$AB = BC$$

$$AX = CF$$

$$CY = AF$$

$$BF = 19$$

$$XY = 36$$

S_{xy} = ?

① Докажем, что $\triangle AFX = \triangle CYF$
и, следовательно, $FX = FY$:

$$\begin{aligned} \text{CF} &= \text{AX} \\ \text{CY} &= \text{AF} \end{aligned}$$

$\angle XAF = \angle FCY$ т.к. смежные углы
углы EAD и FCE опп-д на одной
гугу DE , $\Rightarrow$ равны

(2) Докажем, что $BX = BY$:

$$\angle BCF = 180^\circ \rightarrow \angle BCD = \angle BAF$$

$$\angle AB = BC$$

$$\{ AF = CY$$

$$\Rightarrow \triangle AEF = \triangle CBY$$

$$\Rightarrow BF = BY$$

$$\angle BCF = 180^\circ - \angle BAE = \angle BAX$$

$$\{ AB = BC$$

$$AX = FC$$

$$\Rightarrow \triangle BAX = \triangle BCF \quad \checkmark$$
$$\Rightarrow \underline{BX} = BF = BY$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

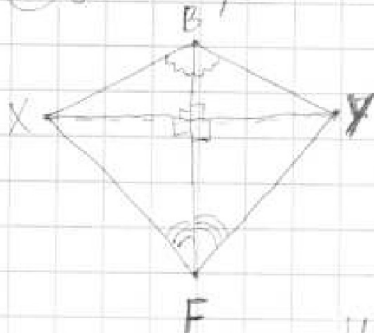
☐☐☐☐☐☐☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

проб. 7

3) Рассмотрим четырехугольник $BXFY$:



т.к. $BX = BY$, $FX = FY$, BF — общая сторона

$$\Delta BTX = \Delta BTY \Rightarrow \angle XBT = \angle YBT, \angle XTB = \angle YTB$$

$\Rightarrow BT$ — бисс., мед., высота ΔBXY и ΔFXY

$$\text{т.е. } \angle(BT; XY) = 90^\circ$$

Найдем площадь четырехугольника $BXFY$

по формуле $\frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \angle(d_1, d_2)$:

$$S_{BXFY} = \frac{1}{2} \cdot BF \cdot XY \cdot \sin 90^\circ = \frac{1}{2} \cdot 19 \cdot 36 \cdot 1 = 342$$

Ответ: 342

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$$

$$\Delta = (11y-34)^2 - 4(y-3)(32y-101) =$$

$$= 121y^2 - 748y + 1156 - 128y^2 + 404y + 384y - 1212 =$$

$$= -7y^2 + 40y - 56 \geq 0$$

$$x, y \in \mathbb{Z}$$

$$y = 3$$

$$\Delta = 7 \cdot 9 + 40 \cdot 3 - 56 = 1$$

$$x = \frac{11y-34 \pm \sqrt{\Delta}}{2(y-3)}$$

численник Δ делится на 2, следовательно, в линейном:

$$x^2 \cdot 0 - x(33-34) + 32 \cdot 3 - 101 = 0$$

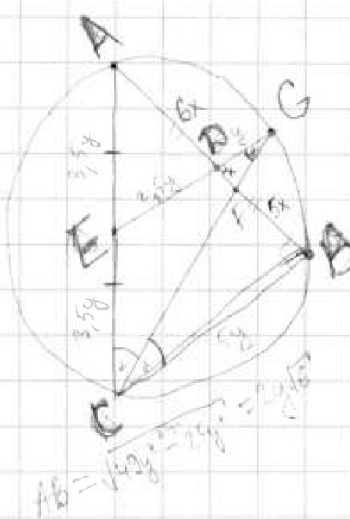
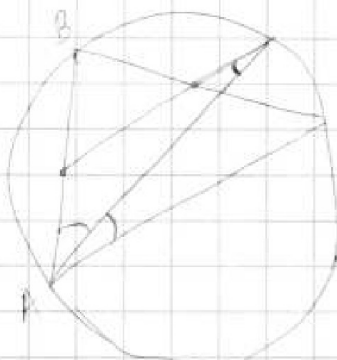
центр делит отрезки пополам

$$x - 5 = 0$$

$$x = 5$$

$$A(5; 3)$$

$$(x_2 - \frac{1}{2}x_1), (x_4 - \frac{1}{2}x_1)$$



$$\angle AGC = 90^\circ$$

$$\angle ABC = 90^\circ$$

$$\sin \angle A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$AB = \sqrt{4 \cdot 8 - 2 \cdot 8} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 12 \\ \hline 64 \\ 320 \\ \hline 384 \end{array}$$

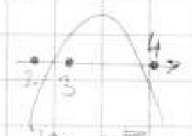
$$\begin{array}{r} 101 \\ \times 12 \\ \hline 202 \\ 1010 \\ \hline 1212 \end{array}$$

$$-7y^2 + 40y - 56 = 0$$

$$7y^2 - 40y + 56 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 400 - 7 \cdot 56 = 8$$

$$y = \frac{20 \pm 2\sqrt{2}}{7}$$



$$\frac{20-2\sqrt{2}}{7} > 3$$

$$20-2\sqrt{2} > 21$$

$$6 > 2\sqrt{2}$$

$$3 > \sqrt{2}$$

$$\frac{20+2\sqrt{2}}{7} > 3$$

$$20+2\sqrt{2} > 21$$

$$1 > \sqrt{2}$$

$$\frac{20-2\sqrt{2}}{7} < 4$$

$$20-2\sqrt{2} < 28$$

$$2\sqrt{2} < 8$$

$$8 < 4\sqrt{2}$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ - 56 \\ \hline 44 \\ - 84 \\ \hline 1 \end{array}$$



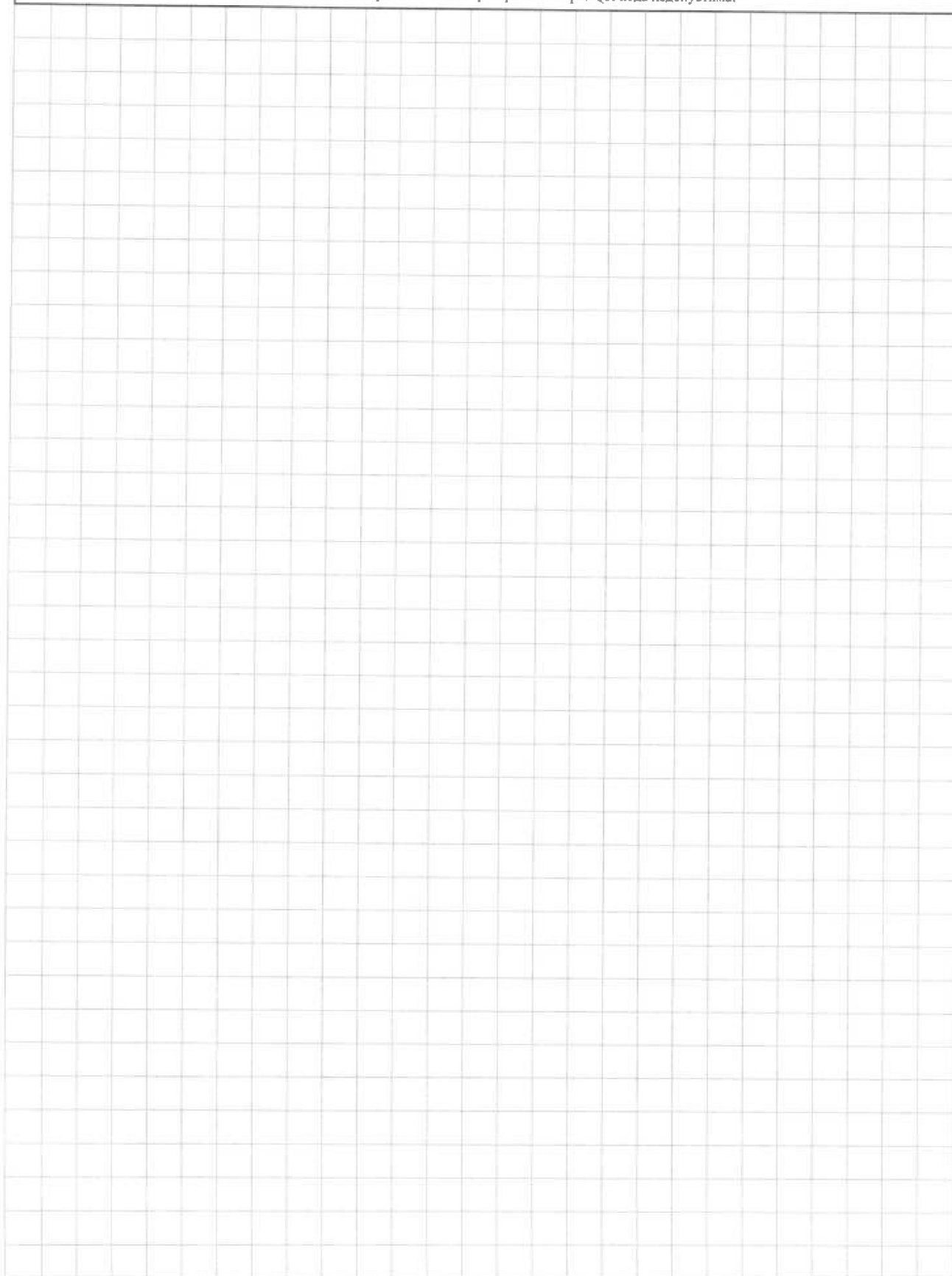
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

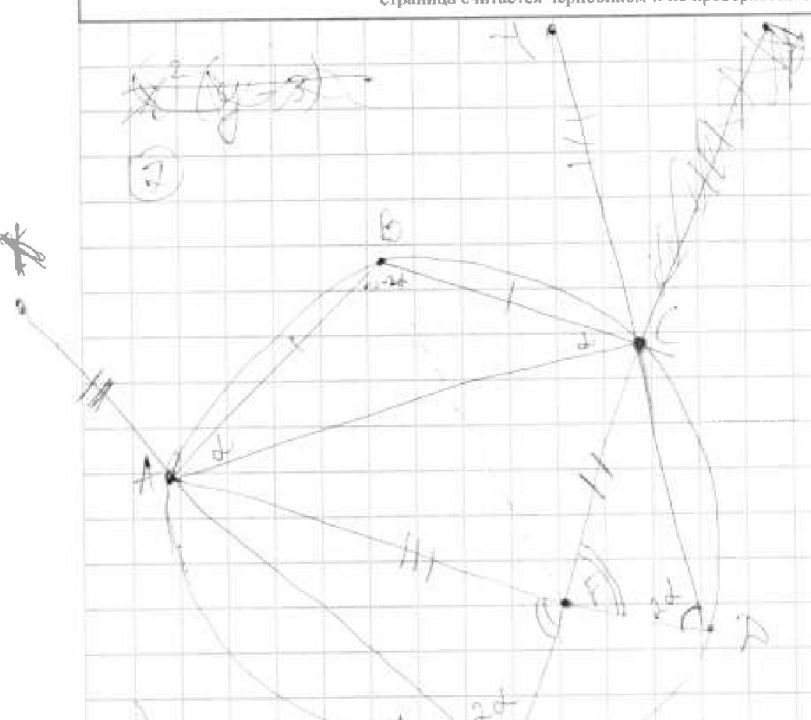
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$x^2 + y^2 = 36$
(7)



$\angle EFD = 2\alpha$
($S_{BXY} = ?$)
($BF = 19, XY = 36$)

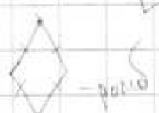
$3 \cdot 18$
 $\times 19$

 162
 18

 $2 \cdot 342$
 19

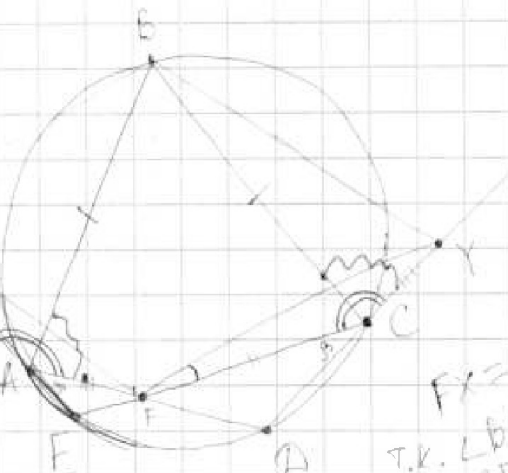
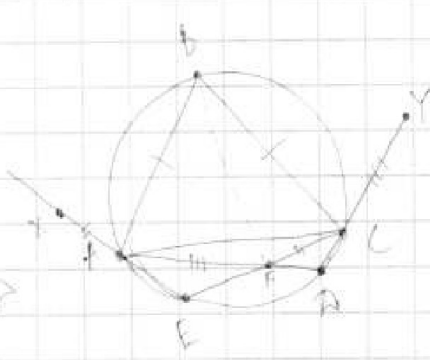
 152
 19

 342

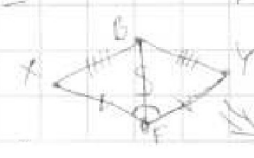


$$S_{BXY} = \frac{19 \cdot 36}{2} = 19 \cdot 18 = 342$$

Ответ: 342



$FX = FY$
 т.к. $\angle BCY = \angle BAF$,
 $BF = BY$,
 и $\angle BCF = \angle BAX$
 $\Rightarrow BF = BX$
 $\Rightarrow$ биссектриса





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(ЧЕРНОВИК)

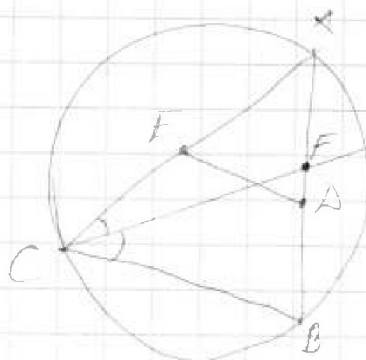
$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|$$

$$x^3 - 9 = 0, x^2 - 1 = 0$$

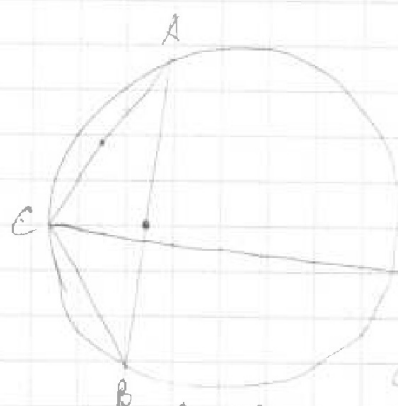
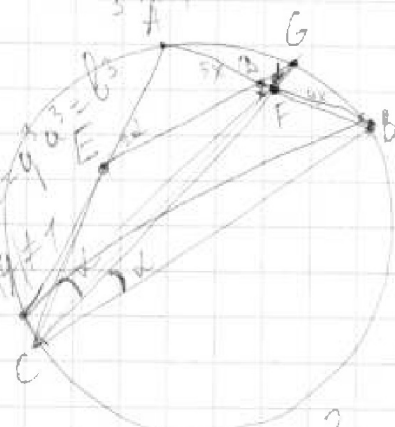
$$|a| + |b| \leq |a - b|$$

просто раскрыть модули.

$$\begin{array}{r} 12.1 \\ - 42.1 \\ \hline 30.2 \\ - 32.5.1 \\ \hline \end{array}$$



a, b, c - г. прогр. $\rightarrow$
 $b = qa$
 $c = q^2a$
 $abc = a \cdot qa \cdot q^2a = q^3 a^3 = b^3$
 $|q| \neq 0, q \neq 1$



$a, b, c \in \mathbb{N}$
 a, b, c - геом. прогр.
 $abc = 5^{360} \cdot 7^{90}$
 $\rightarrow 0$

$$b^3 = 5^{360} \cdot 7^{90}$$

$$b^3 = (5^{120} \cdot 7^{30})^3$$

$$b = 5^{120} \cdot 7^{30}$$

$\angle A, \angle B, \angle C - ?$
 CF - бисс.

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AF}{BF} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$CE = EG (2+1)$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{CE}{BC} = \frac{3}{2}$$

$$CE = \frac{1}{2}BC + \frac{1}{5}BC = \frac{7}{10}BC$$

$$\frac{3}{4}BC = \frac{7}{10}BC$$

$$\frac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle GCF}} = 25$$

$$\frac{GD}{BC} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{GD}{EA} = \frac{2}{5}$$

$a = \frac{b}{q} = 5^{120} \cdot 7^{30}$
 $c = \frac{b}{q^2} = 5^{120} \cdot 7^{30}$

определяют сл. для геом. прогрессии, сл. для задачи -

МФТИ кол-во возможных сочетаний a и b при $a > 0$ (по хл. лк. ист.), $a^3 b^3 > 0 \rightarrow a^3 > 0$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}$$

max(abc) - ?

$$\begin{cases} a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} & | \cdot bc \neq 0 \\ b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a} & | \cdot ac \neq 0 \end{cases}$$

$$abc + 7c = b^2c + 7b$$

$$bc(a - b) = 7(b - c)$$

$$abc + 7a = ac^2 + 7c$$

$$ac(b - c) = 7(c - a)$$

$$(a + \frac{7}{b}) \cdot \frac{b}{a} = b + \frac{7}{a}$$

$$c - \frac{7}{c} = b - \frac{7}{a} \Rightarrow \frac{c^2 - 7}{c} = \frac{ab - 7}{a}$$

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c}$$

$$b = c + \frac{7}{a} - \frac{7}{c}$$

$$a + \frac{7}{c + \frac{7}{a} - \frac{7}{c}} = c + \frac{7}{a} - \frac{7}{c} + \frac{7}{c}$$

$$a(c + \frac{7}{a} - \frac{7}{c}) + 7$$

$$c + \frac{7}{a} - \frac{7}{c}$$

$$ac + 7 - \frac{7a}{c} + 7 = (c + \frac{7}{a})(c + \frac{7}{a} - \frac{7}{c}) \quad | \cdot a^2 c$$

$$a^3 c^2 + 14a^2 c - 7a^3 = a^2 c^3 + 14a^2 c^2 - 7a^2 c + 49c - 49a$$

не все равны между собой

$$a \neq b \neq c, a \neq c, b \neq c$$

$$a, b, c \neq 0$$

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} \Rightarrow ac^2 = a^2 c + 7c - 7a$$

$$a^2 bc + 7ac = ab^2 c + 7ab = abc^2 + 7bc$$

$$(a + \frac{7}{b})^2 = (a + \frac{7}{b})(b + \frac{7}{c})(c + \frac{7}{a}) =$$

$$= abc + 7b + 7a + \frac{49}{c} +$$

$$+ 7c + \frac{49}{a} + \frac{49}{b} + \frac{343}{abc} +$$

$$= abc + 7(a + b + c) + 49(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) + \frac{343}{abc}$$

$$= a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot \frac{7}{b} + 3 \cdot a \cdot \frac{49}{b^2} + \frac{343}{b^3}$$

$$abc = a^3 + 7(\frac{3a^2}{b} - a - b - c) + 49(\frac{a}{b^2} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c})$$

$$a + \frac{7}{b} = c + \frac{7}{a} \quad | \cdot a$$

$$a^2 + 7 = bc + \frac{7a}{b}$$

$$a^2 + \frac{7a}{c} = ac + 7$$

$$\begin{aligned} b &\neq c \\ c + \frac{7}{a} - \frac{7}{c} &\neq c \\ \frac{7}{a} - \frac{7}{c} &\neq 0 \\ \frac{7}{a} &\neq \frac{7}{c} \\ a &\neq c \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} abc = a^2b + 7a - 7b \\ abc = b^2c + 7b - 7c \\ abc = ac^2 + 7c - 7a \end{cases}$$

$$3abc = a^2b + b^2c + c^2a + 7b - 7a + 7c - 7a$$

$$3abc = a^2b + b^2c + c^2a$$

$$6abc = a^2b + b^2c + b^2c + ac^2 + ac^2 + a^2b$$

$$b(a^2 + bc) + c(b^2 + ac) + a(c^2 + ab)$$

$$bc + 7 = c^2 + \frac{7c}{a}$$

$$bc + 7 = ac + \frac{7c}{b}$$

$$b = c + \frac{7}{a} - \frac{7}{c}$$

$$-7a^3 + a^3c^2 + 21a^2c - a^2c^3 - 14ac^2 + 49a - 49c = 0$$

~~при a=1, c=1~~

~~при a=1, c=1~~

положим $a > b > c$:

предположим $a > 7, c > 7$, тогда

$$b = c + \frac{7}{a} - \frac{7}{c}$$

$$\left| \frac{x^3 - 9}{x^2 - 1} \right| \leq \left| \frac{x^3 - x^2 - 9 + 1}{x^3 - 9 - (x^2 - 1)} \right|$$

~~при x=3~~

$$x^2 - 1 \geq 0 \text{ или } x^2 - 1 < 0$$

$$x^3 - 9 \geq 0 \text{ или } x^3 - 9 < 0$$

$$(x^3 \geq 9) \quad (x^3 < 9)$$

$$\frac{ab+7}{b} = \frac{bc+7}{c} = \frac{ac+7}{a}$$

$$\frac{b}{ab+7} = \frac{c}{bc+7} = \frac{a}{ac+7}$$

$$|a+b| \leq |a-b|$$

при $b > 0, a > 0$

$$a+b \leq |a-b| \Leftrightarrow \begin{cases} a-b \leq a-b \\ a+b \leq b-a \end{cases}$$

$$\text{при } \begin{cases} a > 0, a < 0 \Rightarrow b-a \leq b-a - \text{верно} \\ a > 0, b < 0 \Rightarrow a-b \leq |a+b| - \text{верно} \end{cases}$$

при $b < 0, a < 0$:

$$|a-b| \geq -a-b$$

$$|a-b| \geq -a-b \Leftrightarrow \emptyset$$