



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 12



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $5^{360} \cdot 7^{90}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 3) - x(11y - 34) + 32y - 101 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC . Прямые ED и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника BCF в 25 раз больше площади треугольника DGF .

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -x^5 + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 2x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a , b и c не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения abc .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 19$, $XY = 36$.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 1.

$$x^3 - 9 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{9} : x^3 - 9 > 0 \text{ при } x > \sqrt[3]{9} \text{ и } x^3 - 9 < 0 \text{ при } x < \sqrt[3]{9}.$$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 0 \quad \begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ -1 \quad 1 \end{array} x \quad x^2 - 1 > 0 \text{ при } x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \text{ и}$$

$$x^2 - 1 < 0 \text{ при } -1 < x < 1.$$

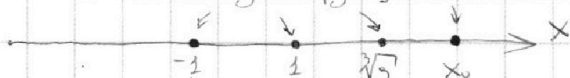
При $x \leq 0$, $x^3 - x^2 - 8 < 0$. В некоторый момент $f(x) = x^3$ начинает расти быстрее, чем $g(x) = x^2 + 8 \Rightarrow f(x) - g(x) > 0 \Rightarrow x^3 - x^2 - 8 > 0$, где

$x > x_0$, $f(x_0) = g(x_0)$, т.е. корень $x^3 - x^2 - 8 = 0$ единственный.

$$\text{При } x = 2,3 : x^3 - x^2 - 8 = -1,123, \text{ т.е. } x_0 > 2,3, \text{ т.к. } 2,3^3 = 12,167 > \sqrt[3]{9} \cdot 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{9} < 2,3, \text{ т.е. } x_0 > \sqrt[3]{9}.$$

нули функций



$x^3 - 9$	-	-	-	+	+
$x^2 - 1$	+	-	+	+	+
$x^3 - x^2 - 8$	-	-	-	-	+

знаки функций на промежутках знаков постоянны

③ $1 \leq x < \sqrt[3]{9}$

$$-x^3 + 9 + x^2 - 1 \leq -x^3 + x^2 + 8$$

$$8 \leq 8$$

$$x \in [1; \sqrt[3]{9}) - \text{решения пер-ва!}$$

④ $\sqrt[3]{9} \leq x < x_0$

$$x^3 - 9 + x^2 - 1 \leq -x^3 + x^2 + 8$$

$$2x^3 \leq 18 \Rightarrow x^3 \leq 9 \Rightarrow x \leq \sqrt[3]{9}$$

$$x = \sqrt[3]{9} - \text{решение пер-ва!}$$

⑤ $x > x_0$

$$x^3 - 9 + x^2 - 1 \leq x^3 - x^2 - 8$$

$$2x^2 - 2 \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) \leq 0$$

$$x \in [-1; 1], x_0 > 1$$

$x \in \emptyset$ для пер-ва на этом участке.

Собирая все полученные решения:

$$x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}].$$

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [1; \sqrt[3]{9}].$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 2.

$a = a, b = aq, c = aq^2$, q — знаменатель геом. прогрессии, пусть $q > 1$

Тогда $abc = a^3 q^3 = 5^{360} \cdot 4^{90} \Rightarrow aq = 5^{120} \cdot 4^{30}$; $a, q > 0$.

При $q > 1$: для $a = 5^{120-n} \cdot 4^{30-k}$ найдётся уникальное и единственное

$q = 5^{n-120} \cdot 4^{k-30}$, т.е. кол-во таких пар (a, q) соответствует кол-ву

вариантов выбрать n и k , где $0 \leq n \leq 120$; $0 \leq k \leq 30 \Rightarrow$ таких комбинаций

$121 \cdot 31 = 3751$ шт., при чём пара (a, q) даёт уникальную единственную

прогрессию $\Rightarrow$ таких прогрессий 3751 шт. Заметим, что a — натуральное,

т.е. и $q \in \mathbb{N}$.

При $q < 1$: будем говорить, что $q = \frac{1}{q'}$, где $q' > 1 \Rightarrow abc = \frac{a^3}{q'^3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a}{q'} = 5^{120} \cdot 4^{30}$, при чём $a : q'^2$ и $k \in \mathbb{N}$, т.е. $a = kq'^2 \Rightarrow \frac{a}{q'^2} \cdot kq' = 5^{120} \cdot 4^{30}$,

т.е. $q' \in [1; 5^{120} \cdot 4^{30}] : (5^{120} \cdot 4^{30}) : q'$, т.е. $q' \in [1; 5^{120} \cdot 4^{30}]$

$\frac{a^3}{q'^3} = 5^{360} \cdot 4^{90} \Rightarrow a = q' \sqrt[3]{5^{360} \cdot 4^{90}} = q' \cdot 5^{120} \cdot 4^{30}$

$abc = kq'^2 \cdot kq' \cdot k = k^3 q'^3 \Rightarrow kq' = 5^{120} \cdot 4^{30}$. Аналогично первому вариан-

ту найдем ~~3751~~ вариантий для (k, q') . При чём все пары уникальны

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 3.

$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y-101=0$$

При $y \neq 3$ мы имеем квадратное уравнение относительно x :

$$y=3: -x \cdot (-1) + 96 - 101 = 0 \rightarrow x=5. \text{ Есть пара } (3; 5).$$

Запишем Теорему Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{11y-34}{y-3} \\ x_1 x_2 = \frac{32y-101}{y-3} \end{cases}$$

Поскольку корни целые, числитель делится на знаменатель в обоих случаях.

$$11y-34 = 11(y-3) - 1 \Rightarrow x_1 + x_2 = 11 - \frac{1}{y-3}$$

$$32y-101 = 32(y-3) - 5 \Rightarrow x_1 x_2 = 32 - \frac{5}{y-3}$$

$$\frac{1}{y-3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} y-3=1 \\ y-3=-1 \end{cases}$$

$$\frac{5}{y-3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} y-3=5 \\ y-3=-5 \\ y-3=1 \\ y-3=-1 \end{cases}$$

Условия выполняются одновременно! ^{для проверки}

$$\begin{cases} y-3=1 \\ y-3=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=4 \checkmark \\ y=2 \checkmark \end{cases}$$

$$\text{При } y=4: x^2 - 10x + 24 = 0; D = 100 - 27 \cdot 4 < 0 \Rightarrow \text{нет.к.}$$

$$\text{При } y=2: -x^2 + 12x - 34 = 0; D = 144 - 4 \cdot 34 < 0 \Rightarrow \text{нет.к.}$$

Т.е. пара $(3; 5)$ единственная ^{дающая} ~~имеет~~ целые корни.

Ответ: $(3; 5)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$EC = EG = 4l$$

$$\text{Для } \triangle ADE: \frac{7l}{\sin(\alpha+2\alpha)} = \frac{5l}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha+2\alpha)} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{\sqrt{7} \sin \alpha}{\sin(\alpha+2\alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow \sqrt{7} \sin \alpha = \sin \alpha \cos 2\alpha + \sin(\alpha+2\alpha)$$

(из формулы EG)

$$\text{Рассмотрим } \triangle AGC: AE = EC = GE = 4l \Rightarrow \angle AGC = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC - \text{диаметр} \Rightarrow E - \text{центр окружности} \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$$

$$\sin \angle BAC = \sin \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{10l}{14l} = \frac{5}{7} \Rightarrow \angle BAC = \arcsin\left(\frac{5}{7}\right)$$

$$\sin \angle ACB = \cos \angle CAB, \text{ по ОТД: } \sin \angle ACB = \sqrt{1 - \sin^2 \angle BAC} = \sqrt{1 - \frac{25}{49}} = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{\sqrt{24}}{7} = \frac{2\sqrt{6}}{7} \Rightarrow \angle ACB = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)$$

$$\text{Ответ: } \angle ABC = 90^\circ; \angle CAB = \arcsin\left(\frac{5}{7}\right); \angle ACB = \arccos\left(\frac{5}{7}\right).$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
□

2
□

3
□

4

5

☐

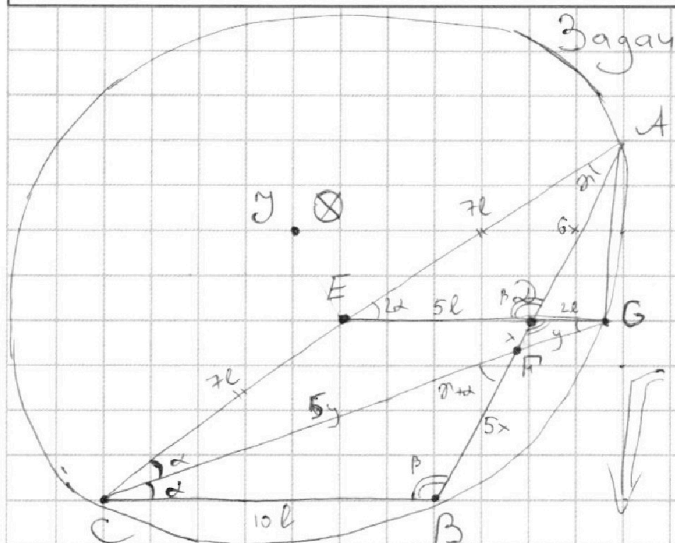
6
□

7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.



$$\angle ACG = \angle GCB \text{ (CF - биссектр.)}$$

~~$\angle EGC = 2$~~

$\angle GCB = \angle EGC$ (т.к. при $EG \parallel BC$,
 $\angle EGD$ - смежные $\angle ABC$)

$$\left(\begin{array}{l} \angle ABC = \angle ADE \Rightarrow \angle ADE = \angle FDG \\ \text{(соответств. углы)} \quad \text{(вертикал.)} \end{array} \right.$$

$\Delta FBC \cap \Delta FDG$ (по двум углам)

$$\frac{S_{DCF}}{S_{DFP}} \cdot k^2 = 25 \Rightarrow k=5; BF=5x, DF=x; CF=6y, GF=y.$$

$$A \cap B = G_X$$

Durch xopp GC u AB: $FG \cdot CF = BF \cdot AF \Rightarrow y \cdot 5y = 5x \cdot 7x \Rightarrow$
 $\Rightarrow 5y^2 = 35x^2 \Rightarrow y^2 = 7x^2 \Rightarrow \frac{y}{x} = \sqrt{7}$

$BC = 10 \text{ л}$; $ED = 5 \text{ л}$ (ср. мин.), $DG = 2 \text{ л}$ (из погов.).

~~2nd~~ ~~xy~~ $\angle ACB = 2\alpha$, $\angle ACG = \angle GCB = \alpha$, $\angle CAB = \gamma$, $\angle CBA = \beta$

На рисунке граб $\triangle FCB$ и $\triangle ABC \Rightarrow \angle CFB = \alpha + \alpha$

По Теореме синусов, для $\triangle ABC$: $\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{102}{\sin 30^\circ} = \frac{12x}{\sin 20^\circ} \Rightarrow \frac{52}{\sin 30^\circ} = \frac{6x}{\sin 20^\circ}$

По Теореме синусов для $\triangle CEF$: $\sin \angle CEF = \frac{CF}{CE}$

$$\Rightarrow \frac{G_x}{\sin 2\alpha} = \frac{52}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \sin \alpha = \sin (90^\circ - 2\alpha) \text{ (aus } \Delta AFC): \frac{5y}{\sin \alpha} = \frac{7x}{\sin \alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{\sin x} = \frac{5y}{7x} = \frac{5\sqrt{7}x}{7x} = \frac{5\sqrt{7}}{7} \quad \text{Dus } \Delta \textcircled{2} \text{FG: } \frac{x}{\sin x} = \frac{2k}{\sin(p+d)}$$

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{6x}{5l} \quad \text{1.2} \quad \Delta \text{ ECG - равнобедренный (углы при основании равны)}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



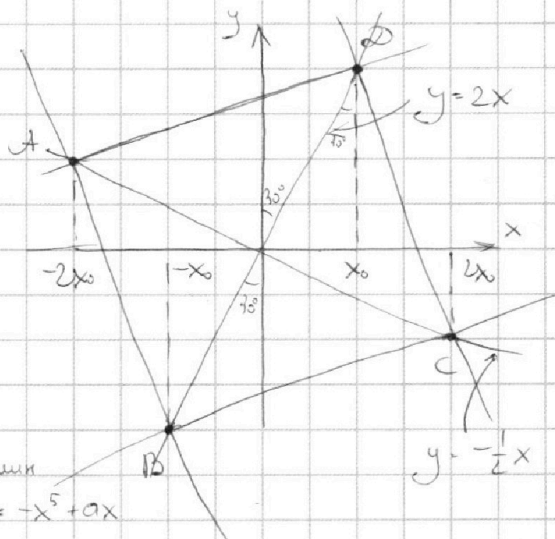
Задача 5.

$$y = -x^5 + ax$$

Пусть вершина B имеет координату $-x_0 = x_B$, $x_0 = x_D$ (из симметрии).

$$AC \in f(x) = -\frac{1}{2}x, \text{ т.к. } AC \perp BD.$$

$$\text{Тогда } x_A = -2x_0, x_C = 2x_0.$$



$$\begin{aligned} & \text{В) } -x_0^5 + ax_0 = -2x_0 \quad (3) \text{ (в) Условие} \\ & \text{2) } x_0^5 + ax_0 = 2x_0 \quad (2) \text{ (в) попарная вершина} \\ & \text{3) } -(2x_0)^5 + 2ax_0 = -\frac{1}{2} \cdot 2x_0 \quad (3) \text{ на графике } y = -x^5 + ax \\ & \text{4) } (2x_0)^5 - 2ax_0 = \frac{1}{2} \cdot 2x_0 \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{т.к. } x_0^5 = (a+2)x_0 \quad (1), (2) \quad (3) / (4): 2^5 = \frac{2a+1}{a+2} \Rightarrow 2a+1 = 2a+1 \\ & (2x_0)^5 = x_0(2a+1) \quad (3), (4) \quad 32a + 64 = 2a+1 \rightarrow 30a = -63 \Rightarrow a = -\frac{63}{30} = -\frac{21}{10} \end{aligned}$$

$$x_0^4 = a+2 \Rightarrow x_0 = \sqrt[4]{a+2} = \sqrt[4]{-\frac{21}{10}+2} = \sqrt[4]{\frac{9}{10}} = \sqrt[4]{\frac{3}{10}}$$

$$\text{Ответ: } a = -\frac{21}{10}; l_1 = \sqrt[4]{\frac{3}{10}}.$$

$$\begin{aligned} & \text{Сторона } \triangle \text{ Диагональ } d = 2 \cdot x_0 = 4x_0; l_2 = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{4x_0}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}x_0 = \\ & = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{10}} = \sqrt[4]{\frac{64}{10}} = \sqrt[4]{\frac{32}{5}} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.

$$a + \frac{4}{b} = b + \frac{4}{c}$$

$$a = b - \frac{4}{b} + \frac{4}{c} = \frac{bc - 4c + 4b}{bc}$$

$$b + \frac{4}{c} = c + \frac{4}{a} \Rightarrow b = c + \frac{4}{a} - \frac{4}{c} = \frac{ac + 4c - 4a}{ac}$$

$$c + \frac{4}{a} = a + \frac{4}{b} \Rightarrow c = a + \frac{4}{b} - \frac{4}{a} = \frac{ab + 4a - 4b}{ab}$$

$$\underbrace{\frac{bc - 4c + 4b}{bc}}_a + \frac{4}{b} = \underbrace{\frac{ab + 4a - 4b}{ab}}_c + \frac{4}{a}$$

$$\frac{bc + 4b}{bc} = \frac{ab + 4a}{ab} \Rightarrow 1 + \frac{4}{c} = 1 + \frac{4}{b} \Rightarrow \frac{4}{c} = \frac{4}{b} \Rightarrow b = c$$



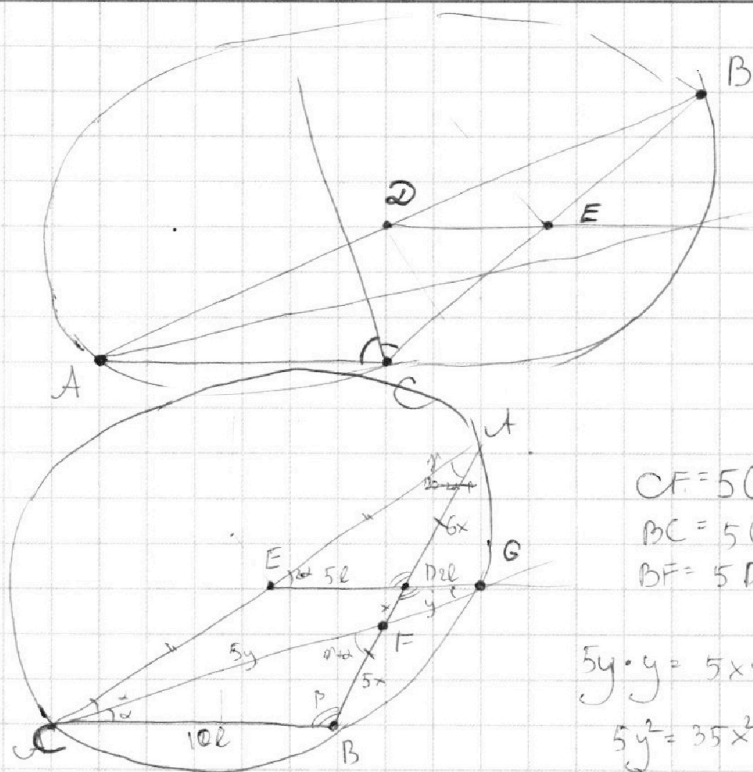
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$CF = 5GF$$

$$BC = 5GD$$

$$BF = 5DF$$

$$5y \cdot y = 5x \cdot 7x$$

$$5y^2 = 35x^2$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin \beta = \sin(180 - \alpha - \gamma) = \sin(\alpha + \gamma)$$

$$-x_0^5 + ax_0 = 2x_0$$

$$-5x_0^5 + 2ax_0 = -x_0$$

$$\frac{10l}{\sin 7\alpha + \cos 7\alpha} = \frac{12x}{\sin 2\alpha}$$

$$-x_0^5 = x_0 \left(\frac{a-1}{2-a} \right)$$

$$-5x_0^4 = x_0(2a+1)$$

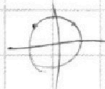
$$\frac{5l}{\sin \alpha} = \frac{6x}{\sin 2\alpha}$$

$$2^5 = \frac{2a+1}{a-1}$$

$$\sin \alpha + \beta = \sin \alpha - \beta = 2\alpha + 1$$

$$2\alpha = 65$$

$$a = \frac{65}{20} = \frac{13}{4}$$



$$\frac{5x}{\sin \alpha} = \frac{10l}{\sin(7\alpha)}$$

$$2^4 \cdot 2^2 = 2^6$$

$$\frac{64}{6}$$

$$\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{2l}{\sin(7\alpha)}$$

$$\frac{6x}{\sin(2\alpha)} = \frac{5l}{\sin \alpha}$$

$$\frac{2^4}{3}$$

$$\frac{5y}{\sin \alpha} = \frac{7x}{\sin \alpha}$$

$$2^4 \cdot 2^2 = 2^6 = 64$$

$$\frac{64}{7}$$

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{6x}{5l}$$

$$\frac{x}{l} = \frac{5 \sin 2\alpha}{6 \sin \alpha}$$

$$\frac{x}{l} = \frac{2 \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

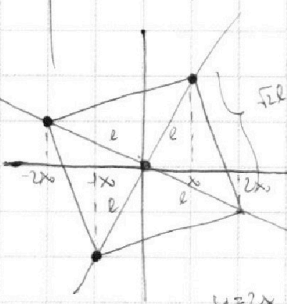
$$5 \cos \alpha = 6 \sin \alpha (\sin(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \sin \alpha \cos \beta$$

$$\frac{5 \sin 2\alpha}{6 \sin \alpha} = \frac{2 \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{5 \cos \alpha}{6 \sin \alpha} = \frac{2}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$1.5x$$



$$y = 2x \quad y = -\frac{1}{2}x$$