



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 11



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150} \cdot 3^{300}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 2) - x(13y - 27) + 44y - 94 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC . Прямые ED и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника BCF в 16 раз больше площади треугольника DGF .

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^5 + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a , b и c не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения abc .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 17$, $XY = 31$.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1. $|x^3+4|+|x^2-1|\leq|x^3-x^2+5|$
Пользуясь тем, что $|a|=|-a|$, заменим внутри
логотиповое выражение второго слагаемого левой час-
ти на противоположное по знаку:

$$|x^3+4|+|-x^2+1|\leq|x^3+4-x^2+1|$$

Пусть $x^3+4=a$, а $-x^2+1=b$:

$|a|+|b|\leq|a+b|$. Согласно известному неравен-
ству: сумма модулей всегда больше либо равна
модулю суммы $\Rightarrow |a|+|b|\geq|a+b|$. Отсюда можно сде-
лать вывод, что $|a|+|b|=|a+b|$, иначе одно из усло-
вий не будет выполнено. Если из чисел a и b одно
 >0 , а другое <0 , то равенство не достигается. Воз-
можны лишь случаи: 1) $a\geq 0, b\geq 0$ и 2) $a\leq 0, b\leq 0$.

Случай 1: $\begin{cases} a\geq 0 \\ b\geq 0 \\ |a|+|b|=|a+b| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3+4\geq 0 \\ -x^2+1\geq 0 \\ |x^3+4|+|-x^2+1|=|x^3-x^2+5| \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\geq -\sqrt[3]{4} \\ x\in[-1;1] \\ x^3+4-x^2+1=x^3-x^2+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq -\sqrt[3]{4} \\ x\in[-1;1] \end{cases}, \text{ но } -1\leq\sqrt[3]{4}\leq 2 \Rightarrow \Rightarrow -2\leq-\sqrt[3]{4}\leq -1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ у системы (1) нет решений. $\sqrt[3]{4}$
 $1<\sqrt[3]{4}<2 \Rightarrow -1>-\sqrt[3]{4}>-2 \Rightarrow$ у системы (1) решение нет.

Случай 2: $\begin{cases} a\leq 0 \\ b\leq 0 \\ |a|+|b|=|a+b| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3+4\leq 0 \\ -x^2+1\leq 0 \\ |x^3+4|+|-x^2+1|=|x^3-x^2+5| \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\leq -\sqrt[3]{4} \\ x\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty) \\ -x^3-4+x^2-1=-x^3+x^2-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\leq -\sqrt[3]{4} \\ x\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ у системы (2) $x\in[-\sqrt[3]{4};-1]$ - решение. $\sqrt[3]{4}$
Объединяя оба решения систем
в совокупность, получим: Ответ: $x\in[-\sqrt[3]{4};1]$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача: $(a; b; c)$ - геом. прогрессия; $abc = 2^{150} \cdot 3^{100}$.

Числа a, b, c можно представить в виде: $a = a; b = aq; c = aq^2$.

Тогда: $abc = a^3 q^3 = 2^{150} \cdot 3^{100} \Rightarrow aq = \sqrt[3]{2^{150} \cdot 3^{100}} = 2^{50} \cdot 3^{100/3}$, т.е. второй член прогрессии равен $2^{50} \cdot 3^{100/3}$, первый будет равен $\frac{2^{50} \cdot 3^{100/3}}{q}$, а третий равен $2^{50} \cdot 3^{100/3} q$, т.е. мы имеем тройку чисел:

$(\frac{2^{50} \cdot 3^{100/3}}{q}; 2^{50} \cdot 3^{100/3}; 2^{50} \cdot 3^{100/3} q)$. Знаменатель прогрессии q это какая-то дробь $\frac{m}{n}$, где обязательно $m = 2^i 3^j$, а $n = 2^k 3^l$, т.к. в противном случае числа a, b, c не будут принадлежать множеству натуральных чисел.

Таким образом: $q = \frac{m}{n} = \frac{2^i 3^j}{2^k 3^l} = 2^{i-k} \cdot 3^{j-l}$.

Знаменатель прогрессии q можно представить, как

(1) $q = \frac{1}{2^k 3^l}$ или (2) $q = 2^k 3^l$ или (3) $q = \frac{2^k}{3^l}$ или (4) $q = \frac{3^l}{2^k}$, где l, k -

- неотрицательные целые числа. Других простых множителей кроме 2 и 3 он содержать не может, так как либо 1ый член не будет целым, либо 3ий.

Рассмотрим 1ый вариант (1). Если $k, l > 0$, то $k \in [1; 50]$, $l \in [1; 100] \Rightarrow 50 \cdot 100 = 5000$ вариантов образования q . Если $k=0, l>0$, то ещё 100 вар. Если $l=0, k>0$, то ещё 50 вар.

Рассмотрим вариант (2). Аналогично варианту (1) получим 5150 вариантов образования q .

Рассмотрим вариант (3). Здесь используем только случаи, когда $k>0, l>0$, т.к. случаи равенства k или l нулю мы уже рассмотрели в первых двух вариантах. Получим $50 \cdot 100 = 5000$ способов образ. q , где $k \in [1; 50]$, $l \in [1; 100]$.

Рассмотрим вариант (4). Аналогично варианту (3) здесь 5000 способов образования q . Итого имеем всего

$5150 \cdot 2 + 5000 \cdot 2 = 10300 + 10000 = 20300$ вар. $\Rightarrow$ существует 20300 троек таких чисел, т.к. q задаёт 1 тройку. Ответ: 20300 троек

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3. $x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$
Можно разглядеть это уравнение, как квадратное относительно x . Оно имеет решение в действ. числах, если его дискриминант неотрицателен.

$$D = (13y-27)^2 - 4 \cdot (y-2) \cdot (44y-94) \geq 0$$

$$169y^2 + 27^2 - 26 \cdot 27y - 4(44y^2 - 88y - 94y + 188) \geq 0$$

$$(169 - 4 \cdot 44)y^2 + y(88 + 94) \cdot 4 - 26 \cdot 27 + 27^2 - 4 \cdot 188 \geq 0$$

$$-7y^2 + 26y - 23 \geq 0$$

$$7y^2 - 26y + 23 \leq 0 \quad (1)$$

Каждому числу функции $f(y)$ в левой части неравенства:

$$7y^2 - 26y + 23 = 0$$

$$D = 26^2 - 4 \cdot 7 \cdot 23 = 26^2 - 28 \cdot 23 = 676 - 644 = 32 = 4\sqrt{2}$$

$$y_1 = \frac{26 + 4\sqrt{2}}{14} \quad y_2 = \frac{26 - 4\sqrt{2}}{14} \Rightarrow$$

неравенство (1) верно при $y \in \left[\frac{26 - 4\sqrt{2}}{14}; \frac{26 + 4\sqrt{2}}{14} \right]$. Определим границы данного отрезка:

$$\frac{26 - 4\sqrt{2}}{14} \quad 1 < \sqrt{2} < 2$$

$$\frac{26 - 4\sqrt{2}}{14} \quad 4 < 4\sqrt{2} < 8$$

$$\frac{26 - 4\sqrt{2}}{14} \quad 30 < 26 + 4\sqrt{2} < 34$$

$$2\frac{1}{7} = \frac{30}{14} < \frac{26 + 4\sqrt{2}}{14} < \frac{34}{14} = 2\frac{3}{7}. \text{ Т.к. } y \in \mathbb{Z}, \text{ то } y \leq 2 \quad (*)$$

$$-8 < -4\sqrt{2} < -4$$

$$18 < 26 - 4\sqrt{2} < 22$$

$$1\frac{2}{7} = \frac{18}{14} < \frac{26 - 4\sqrt{2}}{14} < \frac{22}{14} = 1\frac{4}{7}. \text{ Т.к. } y \in \mathbb{Z}, \text{ то } y \geq 2 \quad (**)$$

Из (*) и (**) следует, что $y = 2$, тогда исходное уравнение при подстановке примет вид:

$$-x(13 \cdot 2 - 27) + 44 \cdot 2 - 94 = 0$$

$$x + (-6) = 0 \Rightarrow x = 6. \text{ Т.е. подходит единствен-}$$

ная пара $(6; 2)$.

Ответ: $(6; 2)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

стороны в квадрата. По Теореме Пифагора:

$$b^2 = f^2 + f^2 \Rightarrow b = \sqrt{2}f. \text{ Остается найти расстояние}$$

f . Если воспользоваться Т. Пифагора для $\triangle AOK$:

$$\begin{aligned} f^2 &= m^2 + \left(\frac{1}{3}m\right)^2 \Rightarrow f^2 = m^2 + \frac{1}{9}m^2 = \frac{10}{9}m^2 \Rightarrow f = \frac{\sqrt{10}}{3}m = \\ &= \frac{\sqrt{10}}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{100}{24}} = \sqrt{\frac{50}{12}} = \sqrt{\frac{25}{6}} \Rightarrow b = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{25}{6}} = \\ &= \sqrt{4} \cdot \sqrt{\frac{25}{6}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 4}{6}} = \sqrt{\frac{100}{6}} - \text{сторона квадрата.} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } a = -\frac{13}{24}; \quad b = \sqrt{\frac{100}{6}} - \text{сторона квадрата}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача $a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$

$$\begin{cases} a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} \quad | \cdot abc \\ b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} \quad | \cdot abc \\ a + \frac{5}{b} = c + \frac{5}{a} \quad | \cdot abc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(abc) + 5ac = (abc) \cdot b + 5ab \\ b(abc) + 5ab = (abc) \cdot c + 5bc \\ c(abc) + 5bc = (abc) \cdot a + 5ac \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (abc)(a-b) = 5a(b-c) \\ (abc)(b-c) = 5b(c-a) \\ (abc)(c-a) = 5c(a-b) \end{cases} \quad \div : (abc)$$

Перемножим: $(abc)^3 \cdot (a-b)(b-c)(c-a) = 5^3 \cdot abc(b-c)(c-a)(a-b)$

Если ≥ 1 из скобок равна 0, то $a=b=c$, что

противоречит условию $\Rightarrow (abc)^3 = 5^3 \cdot abc \Rightarrow$

$$\Rightarrow abc = \sqrt[3]{5^3} = 5\sqrt{5}$$

Ответ: $abc_{\min} = 5\sqrt{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$

5.

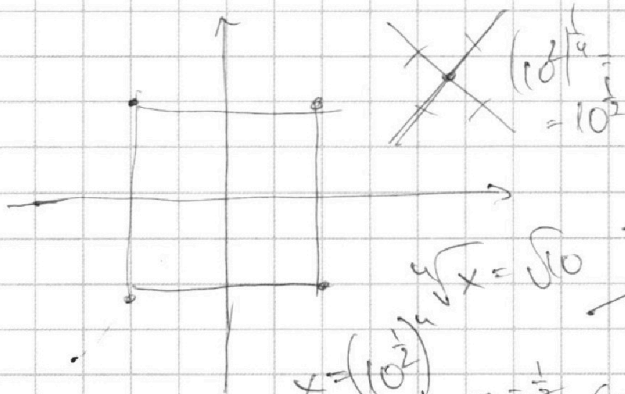
$$y = x^5 + ax \quad y'(x) = 5x^4 + a$$

$$y = -3x$$

$$x^4 = \sqrt{10}$$

$$y = \frac{1}{3}x \cdot \sqrt{10}$$

$$\sqrt[4]{100^2} = 100^{2 \cdot \frac{1}{4}} = 100^{\frac{1}{2}} = 10$$

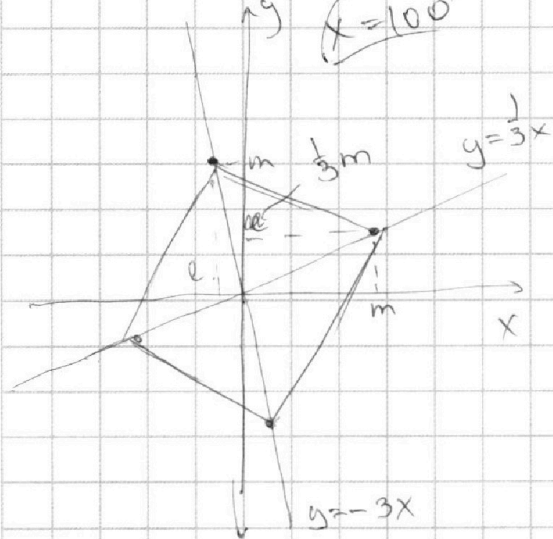


$$x = (10^2)^{\frac{1}{4}} = 100^{\frac{1}{4}}$$

$$m = \frac{1}{3}$$

$$(m = -3l, l = \frac{1}{3}m)$$

$$l = -\frac{1}{3}3l = -l$$



$$y = x^5 + ax \quad l = m^5 + am$$

$$l = m^5 + ax \quad m = l^5 + al$$

$$m = l^5 + ax$$

$$l = m^5 + am = \frac{1}{3}m$$

$$m^4 + a = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{3} - m^4$$

$$y = x^5 + (\frac{1}{3} - m^4)x$$

$$2^4 = 16$$

$$m = (\frac{1}{3}m)^5 + (\frac{1}{3} - m^4) \cdot (\frac{1}{3}m)$$

$$1 = -(\frac{1}{3})^5 \cdot m^4 + (m^4 - \frac{1}{3}) \cdot \frac{1}{3}$$

$$1 = -\frac{1}{3^5} + m$$

$$1 = (\frac{1}{3})^5 m^4 + \frac{1}{3}m^4 - \frac{1}{9}$$

$$243 : 3 = 81$$

$$12 : 3 = 24$$

$$\frac{1}{3} - \frac{81}{24} =$$

$$m^4 (\frac{1}{3^5} + \frac{1}{3}) = \frac{10}{9}$$

$$m^4 = \frac{10 \cdot 3^5}{9 \cdot (3^4 + 1)}$$

$$= \frac{8 \cdot 81}{24} = -\frac{12}{24} = -\frac{1}{2}$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{3^5} =$$

$$a + \frac{5}{b} = \frac{5}{c}$$

$$ab + 5 = b^2 + \frac{5}{c}b$$

$$ab + 5 = b^2 + \frac{5}{c}b \quad -5 = 0$$

$$b^2 + (\frac{5}{c} - a)b - 5 = 0$$

$$c^2 + (\frac{5}{a} - b)c - 5 = 0$$

$$a^2 + (\frac{5}{b} - c)a - 5 = 0$$

$$100 =$$

$$= 100^{\frac{1}{4}} =$$

$$(10^2)^{\frac{1}{4}} = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2(y-2) + x(13y+27) + 44y-94=0$$

$$x^2y - 2x^2 - 13xy + 27x + 44y - 94 = 0$$

$$(xy(x-13) + (13y+27)^2 - 4(y-2)(44y-94) \geq 0$$

$$(13y+27)^2 - 4(y-2)(44y-94) \geq 0 = 146$$

$$(13y+27)^2 - 4(y-2)(44y-94) \geq 0$$

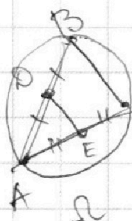
$$169y^2 + 27^2 - 2 \cdot 13 \cdot 27 - 4 \cdot (44y^2 - 88y - 94y + 94 \cdot 2) \geq 0$$

$$169y^2 + 27^2 - 26 \cdot 27 - 4 \cdot (44y^2 - 182y + 188) \geq 0$$

$$169y^2 + 27^2 - 26 \cdot 27 - 4 \cdot 44y^2 + 4 \cdot 182y - 4 \cdot 188 \geq 0$$

$$y^2(169 - 4 \cdot 44) + y(4 \cdot 182 - 26 \cdot 27) + 27^2 - 4 \cdot 188 \geq 0$$

$$-7y^2 + 26y - 146 \geq 0 \quad y \in \mathbb{C} \dots$$



$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 128 - 26 \cdot 27 \\ 128 - 702 = -574 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ -176 \\ \hline -7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 44 \\ \times 4 \\ \hline 176 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 182 \cdot 4 \\ \times 4 \\ \hline 728 \end{array}$$

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

$$4 < 4\sqrt{2} < 8$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 23 \\ \hline 184 \\ 56 \\ \hline 644 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 27 \\ \hline 189 \\ 54 \\ \hline 729 \end{array}$$

$$-(729 - 729) = 0$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 27 \\ \hline 182 \\ 52 \\ \hline 702 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 182 \\ \times 4 \\ \hline 728 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 188 \\ \times 4 \\ \hline 752 \end{array}$$

$$abc \geq$$

$$a \neq b \neq c$$

$$abc \rightarrow \min$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} \neq c + \frac{5}{a}$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c}$$

$$ab + 5 = bc + 5$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$

$$26 \quad 30 < 4\sqrt{2} + 26 < 34 = -23$$

$$26^2 - (4 \cdot 7 \cdot 23)$$

$$\frac{30}{14} < \frac{4\sqrt{2} + 26}{14} < \frac{34}{14}$$

$$\frac{34}{14} = 2 \frac{8}{7} \quad 26^2 - 28 \cdot 23$$

$$30 < \frac{4\sqrt{2} + 26}{14} < 2$$

$$\frac{30}{14} \quad 2 \quad 3$$

$$2 < \frac{4\sqrt{2} + 26}{14} < 3$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$

$$88 - 94 = -6$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(a, b, c) \in \mathbb{N} \quad abc = 2^{150} \cdot 3^{300}$$

$$\begin{aligned} a &= a \\ b &= aq \\ c &= aq^2 \end{aligned}$$

$$(a; aq; aq^2)$$

$$(a; 2^{50} \cdot 3^{100}; aq^2)$$

$$aq^3 = 2^{150} \cdot 3^{300}$$

$$aq = 2^{50} \cdot 3^{100}$$

$$q = \frac{2^{50} \cdot 3^{100}}{a}$$

Способ
для a :

$$a = 2^k \cdot 3^m$$

$$0 \leq k \leq 50$$

$$0 \leq m \leq 100$$

$$a; 2^{50} \cdot 3^{100}; 2^{50} \cdot 3^{100}$$

$$1; 2^{50} \cdot 3^{100}; 2^{100} \cdot 3^{200}$$

Если a простое $\rightarrow$
 $\rightarrow$ простое $q \rightarrow$

$$6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

$$51 \cdot 101$$

Бот
стабильно
амер

$$0 \leq p \leq 50 \quad a = \frac{2^{50} \cdot 3^{100}}{q^{50}}$$

$$0 \leq r \leq 50$$

$$\begin{aligned} b(q-1) & \quad 2 \in [0; 50] \\ 5 & \quad k \in [0; 50] \\ 2 & \quad t \in [0; 100] \\ 2 & \quad m \in [0; 100] \end{aligned}$$

$$(x; 2^{50} \cdot 3^{100}; y)$$

$$2^{2k} \cdot 3^{2m}$$

$$q = \frac{2^k \cdot 3^m}{2^{2k} \cdot 3^{2m}}$$

$$\frac{2^{2k} \cdot 3^{2m}}{2^{2k} \cdot 3^{2m}} \in \mathbb{N}$$

Справедливо

$$2 \cdot 50 = 100 \quad 49 \cdot 50 = 2450$$

$$1$$

$$2^{2k} \cdot 3^{2m}$$

$$50 \cdot 50 = 2500 \quad 50 \cdot 100$$

$$+ 51 + 51 = 2500 + 102 = 2602$$

$$= 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}$$

$$q = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}}$$

$$\frac{2^{50} \cdot 3^{100}}{q} \quad \alpha, \beta \geq 0$$

$$\frac{1}{2} \cdot 50 + 50$$

$$\begin{aligned} \alpha, \beta < 0 & \quad \left\{ \begin{aligned} 2^{50} \cdot 3^{100} \cdot 2^{-\alpha} \cdot 3^{-\beta} &= \frac{1}{2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}} \\ 2^{50} \cdot 3^{100} \cdot 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} &= 1 \end{aligned} \right. \\ 50 \cdot 50 = & \quad \left\{ \begin{aligned} 2^{50} \cdot 3^{100} \cdot 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} &= 1 \\ 0 \leq \alpha \leq 50 \\ 0 \leq \beta \leq 100 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$2 \cdot 50 \cdot 100 + 100 + 200 = 100^2 + 300 = 10300$$

$$\alpha, \beta > 0 \quad \frac{1}{2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}}$$

$$50 \cdot 100 + 100 + 50$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Задача 6.~~ $a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} \quad | \cdot b \quad a = b + \frac{5}{c} - \frac{5}{b}$$

$$ab + 5 = b^2 + \frac{5b}{c}$$

$$b + \frac{5}{c} = c + \frac{5bc}{b^2c + 5b - 5c} \quad b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{b + \frac{5}{c} - \frac{5}{b}}$$

$$\frac{bc + 5}{c} = \frac{b^2c^2 + 5bc - 5c^2 + 5bc}{b^2c + 5b - 5c} = \frac{b^2c^2 + 10bc - 5c^2}{b^2c + 5b - 5c}$$

$$b^2c^3 + 10bc^2 - 5c^3 = b^3c^2 + 5b^2c - 5c^2b + 5b^2c + 25b - 25c$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} \quad abc = z$$

$$\frac{z}{bc} + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c}$$

$$\frac{z}{ab} + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$

$$z = z + 5c = b^2c + 5b \quad abc \rightarrow \min$$

$$z + 5a = b^2a + 5c$$

$$z + 5b = a^2b + 5a$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c}$$

$$z = b^2c + b \cdot 5 - 5c$$

$$z = \frac{25}{4c^2} - \frac{25}{2c} - 5c$$

$$x_{\min} = -\frac{5}{2c}$$

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$

$$abc + 5c = b^2c + 5b$$

$$1) a \cdot (abc) + 5ac = (abc) \cdot b + 5ab$$

$$b \cdot (abc) \cdot$$

$$2) b \cdot (abc) + 5ab = (abc) \cdot c + 5bc$$

$$3) c \cdot (abc) + 5bc = (abc) \cdot a + 5ac$$

$$(abc)^3 = 5^3 abc$$

$$abc = 5^3$$

$$b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$

$$abc + 5a = b^2a + 5c$$

$$b \cdot (abc) + 5ab = (abc) \cdot c + 5bc$$

$$(abc)(a-b) = 5a(b-c)$$

$$a=b$$

$$(abc)(b-c) = 5b(c-a)$$

$$(abc)(c-a) = 5c(a-b)$$

$$(abc) \cdot$$

$$(abc) = \begin{matrix} a = 5a(a-c) \\ a = 0 & a = c \\ & b = c \end{matrix}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

