



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 12



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 - 9| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 - 8|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $5^{360} \cdot 7^{90}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 3) - x(11y - 34) + 32y - 101 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC . Прямые ED и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника BCF в 25 раз больше площади треугольника DGF .

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -x^5 + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 2x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a , b и c не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}.$$

Найдите максимально возможное значение произведения abc .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 19$, $XY = 36$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$|x^3-9|+|x^2-1| \leq |x^3-x^2-8|$ Обе части ≥ 0 , а значит
мы можем возвести их в квадрат

$$x^3-x^2-8 = x^3-9 - (x^2-1)$$

$$(x^3-9)^2 + (x^2-1)^2 + 2(x^2-1)(x^3-9) \leq (x^2-1)^2 + (x^3-9)^2 - 2(x^2-1)(x^3-9)$$

$$4(x^2-1)(x^3-9) \leq 0$$

$$(x^2-1)(x^3-9) \leq 0$$

$$x^2-1=0$$

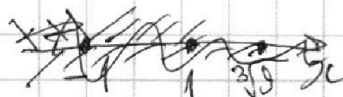
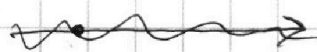
$$x^2=1$$

$$x=\pm 1$$

$$x^3-9=0$$

$$x=\sqrt[3]{9}$$

$$\begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq \sqrt[3]{9} \end{cases}$$



$$x \in [-1; 1]$$

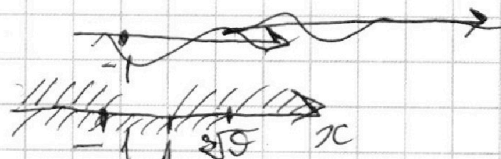


$$\begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x^3-9 \leq 0 \end{cases}$$

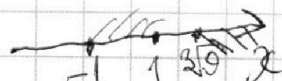
$$\begin{cases} x^2-1 \leq 0 \\ x^3-9 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-1 \leq 0 \\ x^3-9 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-1 \leq 0 \\ x^3-9 \geq 0 \end{cases}$$



$$x \in (-\infty; 1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$$



пересечение нет

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; 1] \cup [1; \sqrt[3]{9}]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a, b, c \in \mathbb{N}$ натуральные
 $a \cdot b \cdot c = a^3 \cdot 9 \Rightarrow$ можно извлечь куб

выходит тройка $5^{120}, 7^{30}, 5^{120} \cdot 7^{30} = a \cdot b \cdot c$. Отсюда

$5^{120} \cdot 7^{30}$ — это гарантировано число $b = a \cdot c$

$$5^{120} \cdot 7^{30} = 5^{120} \cdot 7^{30} \cdot 1 = 5^{120} \cdot 7^{30} \cdot 1$$

также удовлетворяет ус-вию

$$7^{1360}, 5^{120} \cdot 7^{30}, 7^{15} \cdot 5^{180}$$

$$7^2 \cdot 5^{120}, 7^{30} \cdot 5^{120}, 7^{58} \cdot 5^{120}$$

$$7 \cdot 5^{120}, 7^{30} \cdot 5^{120}, 7^{31} \cdot 5^{120}$$

$$7^{30} \cdot 5^{120}, 7^{30} \cdot 5^{120}, 7^{30} \cdot 5^{120}$$

Но беря какое-то a , равное $7^k \cdot 5^{120-k}$

$7^k \cdot 5^{120-k}$, мы доказали

что на $7^{30-n} \cdot 5^{120-k}$

и получаем $7^{30} \cdot 5^{120}$, а после это

все 7^{1200} но это мы уже доказали

что наш степенный делитель $7^{30} \cdot 5^{120}$

не мало доказано настолько же и

$$\text{получаем } 7^{30+30-n} \cdot 5^{120+120-k} = 7^{60-n} \cdot 5^{240-k}$$

$$\text{аналогично и получаем } 7^{60-n+1+30} \cdot 5^{240-k+k+120}$$

$$= 7^{91} \cdot 5^{360}$$

более 60 а k не может быть больше 240 иначе

степени будут > 360 и 360 состав $\Rightarrow$ всего троек может быть $61 \cdot 240$, ибо надо учитывать, что степеней 61 и 240 (или $61 \cdot 240$)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$$

$$\text{Или } x^2(y-3) - 11x(x-3) - 2 + 32(y-3) - 5 = 0$$

$$(y-3)(x^2 - 11x + 32) - x - 5 = 0$$

$$x^2 - 11x + 32 = 0 \quad \begin{cases} y=3 \\ x=-5 \end{cases}$$

$$D = 121 - 128 < 0$$

$$D = (11y-34)^2 - 4(y-3)(32y-101) = 121y^2 - 748y + 1156 - 128y^2 + 404y + 384y - 1212 = -56 - 7y^2 + 40y$$

$$-7y^2 - 56 + 40y = 0 \quad 7y^2 + 56 - 40y = 0$$

$$D = 1600 - 1568 = 32 \quad y = \frac{40 \pm \sqrt{32}}{14} = \frac{20 \pm 2\sqrt{2}}{7}$$

$$x = \frac{11y-34 \pm \sqrt{(11y-34)^2 - 4(y-3)(32y-101)}}{2(y-3)} - \text{из данного}$$

$y > \frac{20+2\sqrt{2}}{7}$ и $y < \frac{20-2\sqrt{2}}{7}$ — это не целые числа, так что y не остается только пара 3 и -5

Ответ: $(-5; 3)$



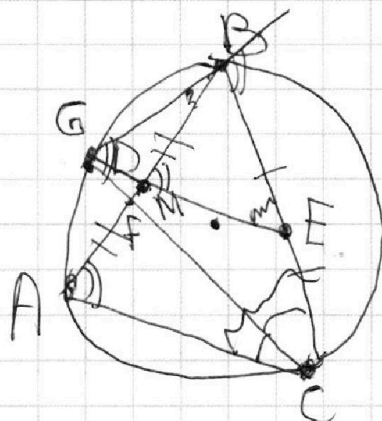
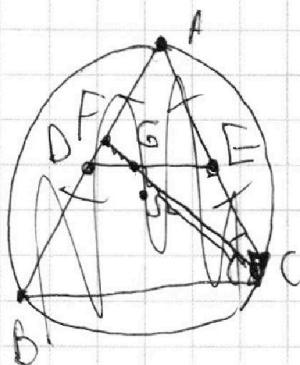
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{BCF} = 2.5 S_{GDF}$$

$$\angle DFE = \angle$$

$$\angle GFM = \angle B - \frac{\angle C}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

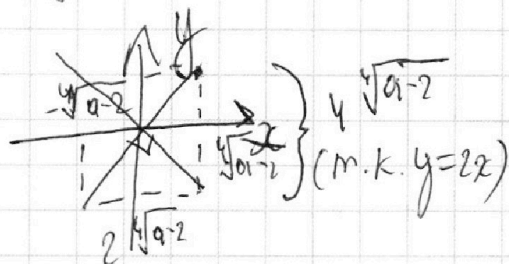


$$y = -x^5 + ax$$

$$y = 2x$$

$$2x = -x^5 + ax$$

$$x^2 = -x^4 + a \quad \text{Найдем диагональ из прямоугольного \Delta}$$



$$\text{диагональ} = \sqrt{4(a-2) + 16(a-2)} =$$

$$= 2\sqrt{5(a-2)} = 2\sqrt{5a-10}$$

$$\text{сторона} = \frac{\text{диагональ}}{\sqrt{2}} =$$

$$= \sqrt{2} \sqrt{5a-10} =$$

$$= \sqrt{10a-20}$$

Можно сказать, что
вторая диагональ лежит

на стороне квадрата $y = -\frac{1}{2}x$, т.к. при нем
образуется прямой угол между диагонале
ми, что нам и нужно, ибо у нас квадрат

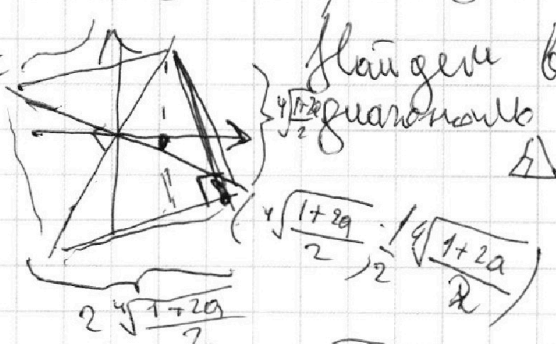
$$-\frac{1}{2}x = -x^5 + ax$$

$$-1 = -2x^4 + 2a$$

$$1 = 2x^4 - 2a$$

$$\frac{1+2a}{2} = x^4$$

$$x = \pm \sqrt[4]{\frac{1+2a}{2}}$$



$$\text{диагональ} = \sqrt{5 \cdot \frac{1+2a}{2}} = \sqrt{5 \cdot \frac{1+2a}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{25+50a}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{25+50a}{2}} = 2\sqrt{5a-10} / \sqrt{2}$$

$$\text{cm} = \sqrt[4]{100 \cdot \frac{13}{6} - 200} =$$

$$= \sqrt[4]{100 \cdot \frac{1}{6}} = \sqrt[4]{\frac{100}{6}} =$$

$$\frac{25+50a}{2} = 16(25a-50a) / 25$$

$$\frac{1+2a}{2} = 16a - 32a / 2$$

$$a = \frac{65}{30} = 2\frac{1}{6}$$

$$= \sqrt[4]{16(6)} \approx 2$$

$$1+2a = 32a - 64 \quad 30a = 65$$

$$\text{Ответ: } 2\frac{1}{6}; \sqrt[4]{16(6)}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}$$

$$a = b - \frac{7}{b} + \frac{7}{c} = c - \frac{7ab - 7ac - 7bc - 7ac + 7ab}{abc}$$

$$b = c - \frac{7}{c} + \frac{7}{b} + \frac{7}{a} = c - \frac{7ab - 7ac - 7bc - 7ac + 7ab}{abc}$$

$$= c - \frac{14ab - 14ac - 7bc}{abc} = \frac{abc^2 - 14ab + 14ac + 7bc}{abc} = a$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$$

$$D = (11y-34)^2 - 4(y-3)(32y-101) =$$

$$= 121y^2 - 748y + 1156 - 128y^2 + 404y + 384y - 1212 =$$

$$= -7y^2 + 40y - 56$$

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} 11y-34 \\ \times 32 \\ \hline 748 \\ 1024 \\ \hline 352 \end{array} \quad \begin{array}{r} 34 \\ \times 32 \\ \hline 1024 \\ 1156 \end{array} \quad \begin{array}{r} 32 \\ \times 4 \\ \hline 128 \end{array} \quad \begin{array}{r} 32 \\ \times 12 \\ \hline 384 \end{array} \\ \begin{array}{r} 56 \\ \times 4 \\ \hline 224 \end{array} \quad \begin{array}{r} 32 \\ \times 4 \\ \hline 128 \end{array} \end{array}$$

$$-7y^2 + 40y - 56 = 0$$

$$7y^2 - 40y + 56 = 0$$

$$D = 1600 - 4 \cdot 32 \cdot 56 = 1600 -$$

$$1568 = 32$$

$$y = \frac{40 \pm \sqrt{32}}{14} =$$

$$= \frac{40 \pm 4\sqrt{2}}{14} = \frac{20 \pm 2\sqrt{2}}{7}$$

$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$$

$$x^2(y-3) - x(11y-34) + 32y - 101 = 0$$

$$(y-3)(x^2 - 11x + 32) - x - 5 = 0$$

$$(y-3)$$

$$x^2 - 11x + 32 = 0$$

$$(y-3)(x^2 - 11x + 32) - x - 5 = 0$$

$$D = 121 - 128 = 9$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = 5 \end{cases}$$

$$34 \cdot \frac{32}{11} = 2 \frac{10}{11}$$

$$\begin{array}{r} 32 \overline{) 11} \\ - 22 \\ \hline 100 \\ - 88 \\ \hline 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 340 \overline{) 11} \\ - 33 \\ \hline 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 340 \\ - 33 \\ \hline 340 \end{array}$$

$$-3x^2 + 34x - 101 = 0$$

$$D = 1156 - 1212 = 56$$



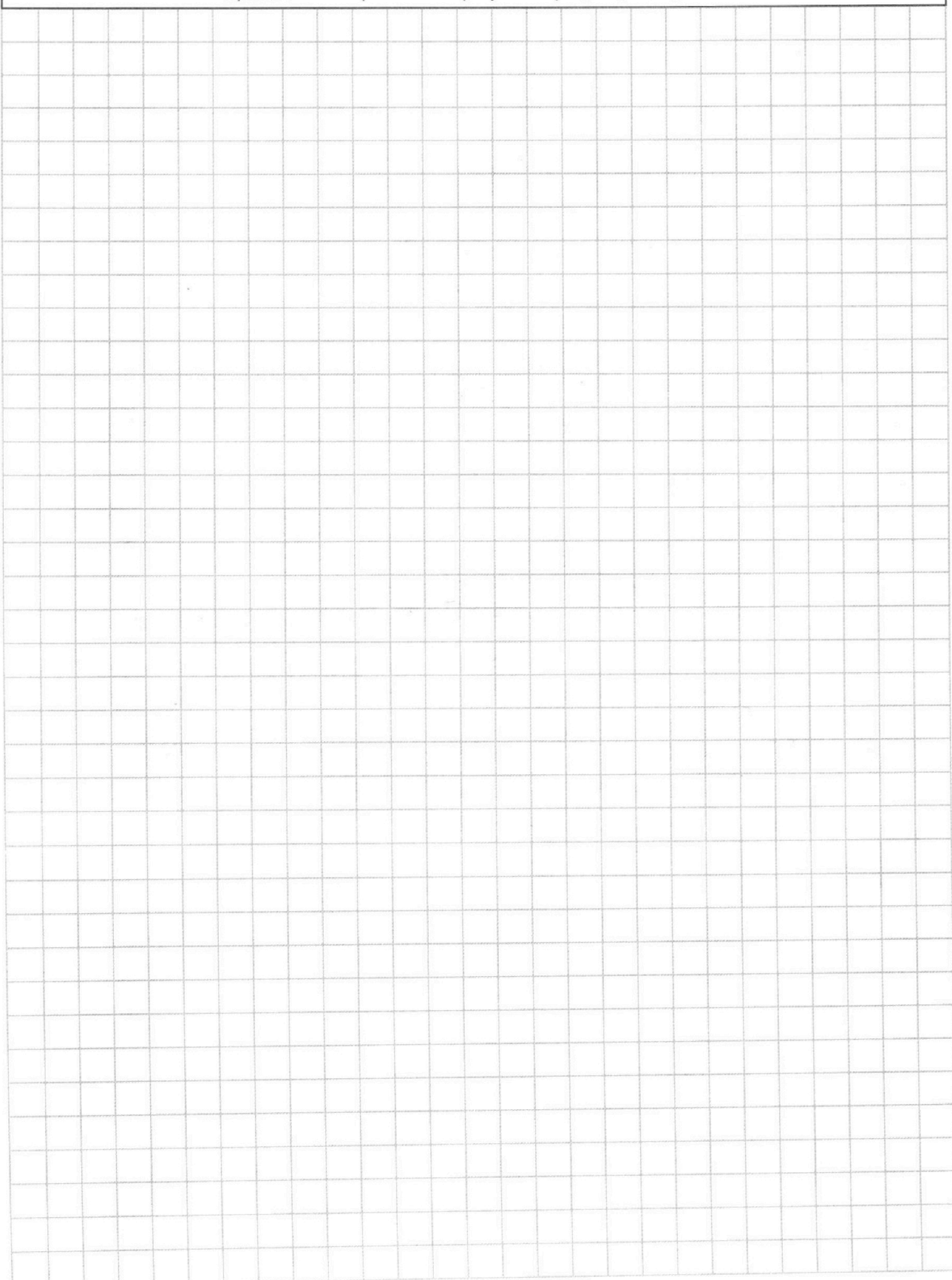
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = -x^5 + ax$$

$$y = 2x$$

$$\begin{cases} -x^5 + ax = 2x \\ -x^5 + ax = -2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^5 + a = 2 \\ -x^5 + a = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 + x^5 \\ a = -2 - x^5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \sqrt[5]{a-2} \\ x = -\sqrt[5]{a+2} \end{cases}$$

$$-x^5 + (-x^5 + a)x = 2x$$

$$-x^5 + (a-2)x = 0$$

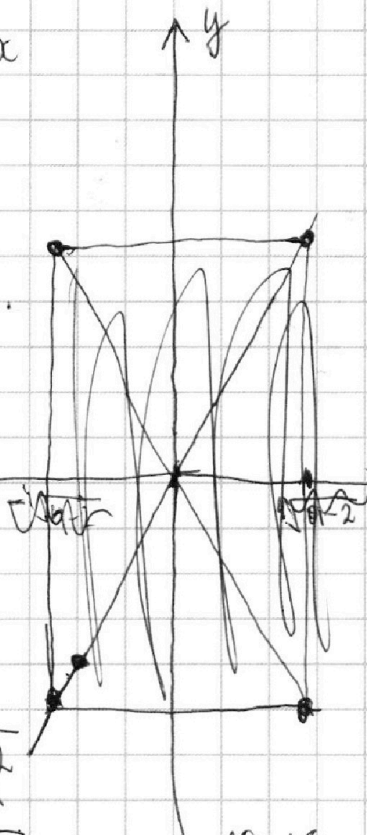
$$x(x^4 + a - 2) = 0$$

$$x = 0, \text{ но это невозможно для } x = \pm \sqrt[5]{a-2} \Rightarrow \text{длина стороны}$$

$$-x^4 + a - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt[5]{a-2} \Rightarrow \text{длина стороны квадрата } = 2\sqrt[5]{a-2}$$

$$4 \cdot 20 \cdot 2\sqrt[5]{a-2} = \text{длина диагонали } 2\sqrt{5}\sqrt[5]{a-2}$$

$$a = \frac{2\sqrt{25a-10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\sqrt{25a-10} = \sqrt{10a-40}$$



III. к все вершины квадрата лежат на графике $-x^5 + ax$ и при этом одна из диагоналей лежит на $2x$, а значит x оно пересекает $-x^5 + ax$.

Но также можно сказать, что другая диагональ будет пересекать на $-x^5$

$$\begin{cases} -x^5 \\ -2x(a-2) \end{cases}$$

