



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 7



1. [4 балла] Решите уравнение

$$5 \operatorname{tg} 2x - 1 = \operatorname{tg} \left(x - \frac{3\pi}{4} \right).$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{90} \cdot 19^{90}$?

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2(x+3) - (x+2) \ln(3x+9) + (\ln 3) \ln(x+3) \geq 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = \frac{x^3}{4} + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = \frac{2x}{5}$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC . Лучи DE и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что $\frac{CF}{DF} = \frac{2}{11}$.

6. [5 баллов] Числа x , y и z не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{6}{y^3} = y^3 + \frac{6}{z^3} = z^3 + \frac{6}{x^3}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения xyz .

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = 5$, $AD = DC = \sqrt{10}$, $AC = 2\sqrt{5}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 5 + 2\sqrt{5}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB , SBC и ребра SD .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1. $\sin 2x - 1 = \tan\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$

$$\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\tan\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\sin x \cos \frac{3\pi}{4} - \cos x \sin \frac{3\pi}{4}}{\cos x \cos \frac{3\pi}{4} + \sin x \sin \frac{3\pi}{4}}$$

$$= \frac{-\sin x - \cos x}{\sin x - \cos x} = \frac{-\tan x - 1}{\tan x - 1} = \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x}$$

$$\frac{10 + \tan x}{1 - \tan^2 x} - 1 = \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x}$$

$$\frac{10 + \tan x - 1 + \tan^2 x - (\tan x + 1)^2}{1 - \tan^2 x} = 0$$

$$\frac{10 + \tan x - 4}{1 - \tan^2 x} = 0$$

$$\tan x = \frac{1}{2}$$

$$x = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$1 - \tan^2 x \neq 0 \rightarrow \text{правда при нахождении } x$$

Ответ: $x = \arctan \frac{1}{2} + \pi k$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

Заметим, что $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ — это корень, $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ — тоже корень.

Поэтому далее будем полагать $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$

$$\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2. Заметим, что если

$$a = \frac{b}{9}$$

$$b = 6$$

$$c = 6q$$

$$\text{то } abc = b^3 = 2^{90} \cdot 19^{90}$$

$$b = 2^{30} \cdot 19^{30}$$

и
значит, a, b, c должны быть оба отриц
либо оба положитель.

$$a = \frac{b^2}{c} = \frac{2^{60} \cdot 19^{60}}{c}, \text{ тогда } 2^{60} \cdot 19^{60} : c, \text{ т.е. } c = 2^k \cdot 19^l$$

$$0 \leq k \leq 60$$

$$0 \leq l \leq 60$$

(если $c > 0$)

Тогда вариантов (61^2)

Если $c < 0$, то вариантов столько же

$$\text{Тогда ответ: } 2 \cdot 61^2 = 2 \cdot 3721 = 7442$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3. $\ln^2(x+3) - (x+2) \ln(3x+9) + (\ln 3) \ln(x+3) \geq 0$, $t = x+3$, $t > 0$, т.е. $x > -3$

$$\ln^2 t - (t-1)(\ln 3 + \ln t) + (\ln 3) \ln t \geq 0$$

~~$$\ln^2 t - (\ln 3)t + t \ln t + \ln 3 + \ln t + (\ln 3) \ln t \geq 0$$~~

$$\ln t (\ln t + \ln 3) - (\ln t + \ln 3)(t-1) \geq 0$$

$$(\ln t + \ln 3)(\ln t - t + 1) \geq 0$$

$$\ln(3t) (\ln t - t + 1) \geq 0$$

По методу рационализации $\ln(3t)$ можно заменить на $(3t-1)$,
т.к. $e > 1$, и знак будет таким же
 $(3t-1)(\ln t - t + 1) \geq 0$

~~$$\ln t - t + 1 \geq 0$$~~

~~$$\ln t + \ln e \geq t$$~~

~~$$\ln(et) \geq \ln e^t$$~~

~~$$et \geq e^t$$~~

~~$$t \geq e^{t-1}$$~~

$$\ln t - t + 1 \geq 0$$

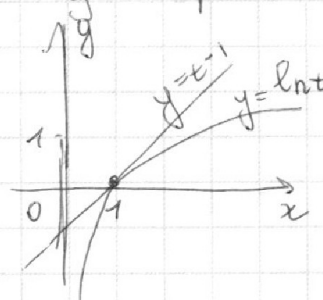
$$\ln t \geq t-1$$

$$\ln t = t-1$$

Замечим, что $t=1$ — корень.

$$(\ln t)' = \frac{1}{t} = 1 \text{ в } t=1$$

С другой стороны, тангенс
касательной $y=t-1$ — это 1 (угол 45°)
т.е. $y=t-1$ касается $y=\ln t$
в 1 , а значит других корней
нет; т.к. $y=t-1$ растет быстрее.



Тогда при $t > 1$ $\ln t < t-1$;
 $t < 1$ $\ln t < t-1$
 $t = 1$ $\ln t = t-1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3 (продолжение)

отрезок выбранный t	$(-\infty, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3}, 1)$	1	$t = \frac{1}{3}$	$(1, +\infty)$
$3t-1$	-	0	+	+		+
$\ln t + 1$	-	-	-	0	HA	-
Итого	+	0	-	0		-

$$3t-1=0$$

$$t=\frac{1}{3}$$

Значит, нужно $t \in (-\infty, \frac{1}{3}] \cup \{1\}$

$$x+3 \leq \frac{1}{3}$$

$$x \leq -\frac{8}{3}$$

$$x+3=1$$

$$x=-2$$

Но по ОДЗ $x+3 > 0$

$$x > -3$$

Ответ: $(-3, -\frac{8}{3}] \cup \{-2\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

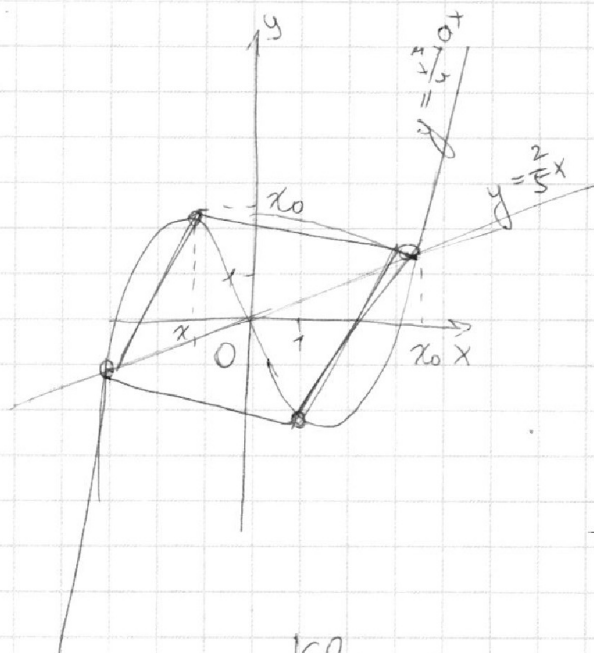
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4.



Пусть координата по x
верхней левой вершины
равна x_0 .

Тогда:

$$\frac{2}{5}x_0 = \frac{x_0^2}{4} + ax_0$$

$$x_0 \left(\frac{x_0^2}{4} + a - \frac{2}{5} \right) = 0$$

$x_0 = 0$
невозможно,
т.к. квадрат —
не точка

$$\frac{x_0^2}{4} + a - \frac{2}{5} = 0$$

$$4a = \frac{8}{5} - x_0^2$$

$$\text{Тогда } x_0^2 = \frac{8}{5} - 4a$$

Квадрат — фигура симметричная, поэтому
если x_1 — координата верхней правой вершины,
то

$$\frac{x_1^2}{4} + ax_1 = x_0$$

И более того, уравнение 2-ой диагонали:

$$y = -\frac{5}{2}x$$

$$\text{Тогда } -\frac{5}{2}x_1 = x_0 \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{5}x_0$$

Подставим:

$$\frac{\left(-\frac{2}{5}x_0\right)^2}{4} + a\left(-\frac{2}{5}x_0\right) = x_0$$

$$-\frac{8}{125} \frac{x_0^2}{4} \Rightarrow a \frac{2}{5} x_0 = x_0$$

$$\frac{2}{5}a = -x_0 \left(1 + \frac{2x_0^2}{125} \right)$$

$$\text{Подставим } x_0^2 = \frac{8}{5} - 4a$$

$$\frac{2}{5}a = -x_0 \left(1 + \frac{2}{125} \left(\frac{8}{5} - 4a \right) \right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



4 (продолжение)

$$-\frac{2}{125}x_0^3 + a\left(-\frac{2}{5}x_0\right) = x_0$$

$$-\frac{2}{5}a = \frac{2}{125}x_0^2 = \frac{2}{125}\left(\frac{8}{5} - 4a\right)$$

$$-\frac{2}{5}a = \frac{16}{5^4} - \frac{8}{125}a$$

$$-\frac{42}{125}a = \frac{16}{5^4}$$

$$a = \frac{16}{5^4} \cdot \frac{5^3}{(-42)} = -\frac{8}{105}$$

Найдем x_0 :

$$x_0 = \sqrt{\frac{8}{5} - 4a} = \sqrt{\frac{8}{5} + \frac{32}{105}} = \sqrt{\frac{200}{105}} = \sqrt{\frac{40}{21}}$$

$$\begin{aligned} \text{А значит } x_1 &= -\frac{2}{5}x_0 = -\frac{2}{5}\sqrt{\frac{40}{21}} = -\frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{400}}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{21}} \\ &= -\sqrt{\frac{32}{105}} \end{aligned}$$

Значит, теперь мы можем найти $\frac{1}{2}$ диагональ.

$$\frac{1}{2}d = \sqrt{\frac{32}{105} + \frac{40}{21}} = \sqrt{\frac{32 + 200}{105}} = \sqrt{\frac{232}{105}}$$

А площадь — это половина произведения диаг.

$$S = \frac{1}{2}d^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{232}{105} = \frac{116}{105}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{8}{105}; \quad \frac{116}{105}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

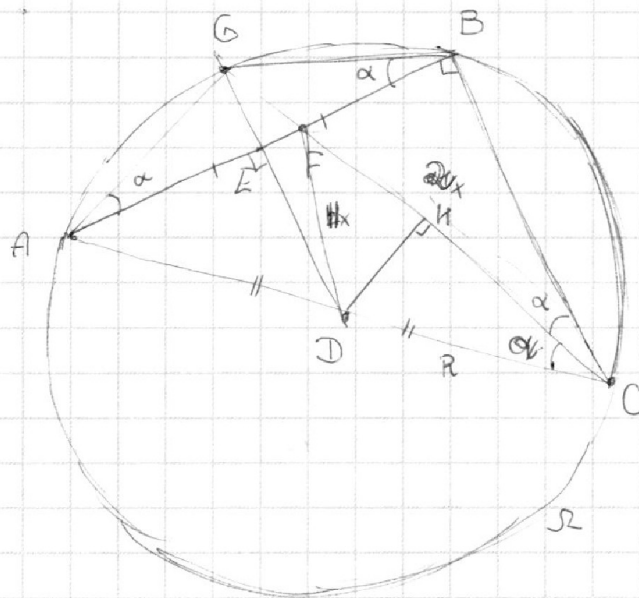
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



5.



Дано:
 $AE = EB$
 $AD = DC$
 CF — биссектриса
 $G \in \Omega$
 $CF/DF = 2/1$
 Найти:
 $\angle A, \angle B, \angle C$

Решение:

Т.к. $G \in \Omega$, то $\angle GCB = \angle GAB = \angle ACG = \angle ABG$, но CF — биссектриса, тогда $\angle GAB = \angle GBA \Rightarrow \triangle AGB$ — равнобедренный

Тогда $GE \perp AB$ (т.к. GE — медиана) $\Rightarrow AB \perp BC$, т.к. $BC \parallel DE$ (как средняя линия) Тогда $\angle B = 90^\circ$

Заметим, что AC — диаметр, т.к. $\angle B = 90^\circ$ и опирается на него

Тогда посмотрим на $\triangle DHC$, где $DH \perp GC$ и $H \in GC$.

DC — диаметр окружности, описанной вокруг этого треугольника.

$$\frac{DH}{\sin \alpha} = \frac{DC}{2} = \frac{HC}{\sin(90^\circ - \alpha)}$$

$\parallel$
 $\cos \alpha$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$T_{\text{орга}} \frac{DN}{\sin \alpha} = \frac{DC}{2} = \frac{HC}{\cos \alpha}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$6. \quad x^3 + \frac{6}{y^3} = y^3 + \frac{6}{z^3} = z^3 + \frac{6}{x^3}$$

$$x^3 + \frac{6}{y^3} = y^3 + \frac{6}{z^3}$$

$$x^3 - y^3 = 6 \left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{y^3} \right) = 6 \left(\frac{y^3 - z^3}{y^3 z^3} \right)$$

$$y^3 + \frac{6}{z^3} = z^3 + \frac{6}{x^3}$$

$$y^3 - z^3 = 6 \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{z^3} \right) = 6 \left(\frac{z^3 - x^3}{z^3 x^3} \right) \text{ по аналогии}$$

$$x^3 - y^3 = 36 \frac{z^3 - x^3}{x^3 y^3 z^6}$$

$$x^3 + \frac{6}{y^3} = z^3 + \frac{6}{x^3}$$

$$z^3 - x^3 = 6 \left(\frac{1}{y^3} - \frac{1}{x^3} \right) = 6 \frac{x^3 - y^3}{x^3 y^3}$$

$$x^3 - y^3 = 216 \frac{x^3 - y^3}{x^6 y^6 z^6}$$

$$(x^3 - y^3) \left(1 - \frac{216}{x^6 y^6 z^6} \right) = 0$$

$$x^3 - y^3 = 0 \quad \text{или} \quad 1 - \frac{216}{x^6 y^6 z^6} = 0$$

$$x^3 = y^3 \\ x = y - \text{невозможно по укл.}$$

$$x^6 y^6 z^6 = 216$$

$$(xyz)^2 = 6$$

$$xyz = \sqrt{6} \quad \text{или} \quad xyz = -\sqrt{6} //$$

Ответ: $-\sqrt{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

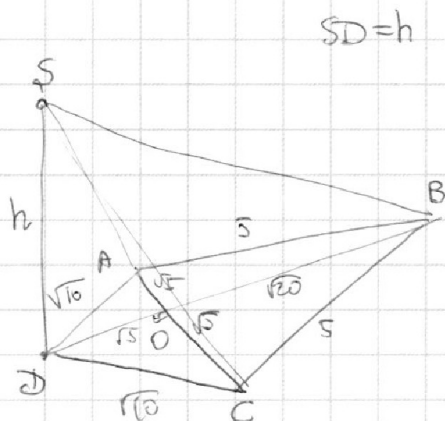
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



7.



$$SD=h$$

$ABCD$ — ромб.

Поэтому в силу симметрии $AO=OC \Rightarrow$

$$BO \perp AC$$

$$\text{Тогда } BO = \sqrt{25-5} = \sqrt{20}$$

$$DO = \sqrt{10-5} = \sqrt{5}$$

$$SA = \sqrt{10+h^2}$$

$$(\sqrt{5} + \sqrt{20})^2 = (\sqrt{5} \cdot 3)^2 = 45$$

$$SB = \sqrt{45+h^2}$$

$$SA + SB = 5 + 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{10+h^2} + \sqrt{45+h^2} = 5 + 2\sqrt{5}$$

$$45+h^2 = (5+2\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{10+h^2}(5+2\sqrt{5}) + 10+h^2$$

$$35 = 25 + 20\sqrt{5} + 20 - 2\sqrt{10+h^2}(5+2\sqrt{5})$$

$$2\sqrt{10+h^2}(5+2\sqrt{5}) = 10 + 20\sqrt{5}$$

$$4(10+h^2)(25+20\sqrt{5}+20) = 100$$

$$+ 400\sqrt{5} + 2000 + 2000$$

$$(40+h^2)(25+20\sqrt{5}+20) = 2100 + 400\sqrt{5}$$

$$h^2 = \frac{2100 + 400\sqrt{5} - 40}{45 + 20\sqrt{5}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда площадь основания:

$$S = \frac{1}{2} (\sqrt{20} + \sqrt{5}) \cdot \sqrt{5} = 10 + 5 = 15$$

$$2h = \sqrt{\frac{2100 + 400\sqrt{5}}{45 + 20\sqrt{5}}} - u_0 = \sqrt{20 - 40}$$



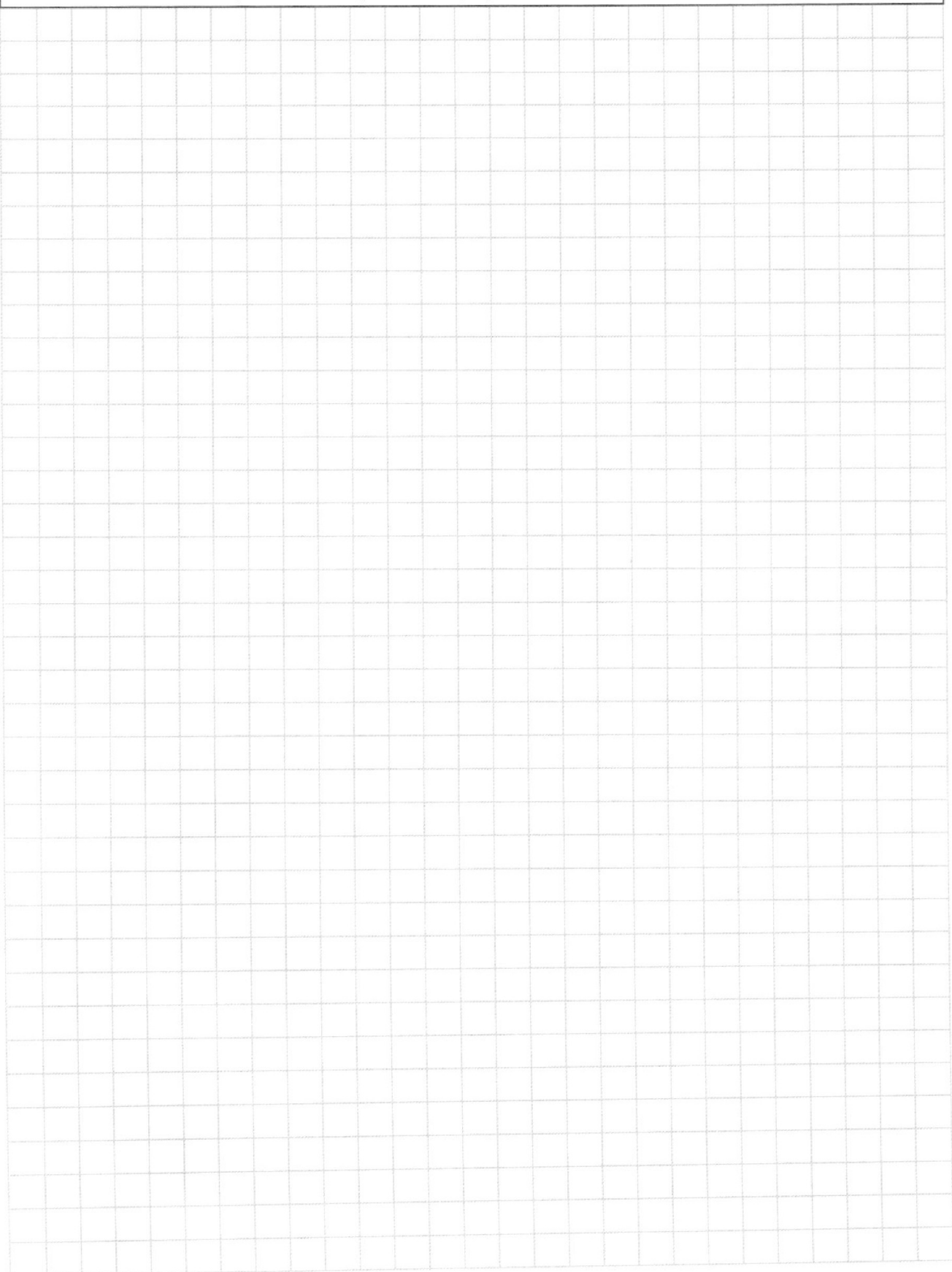
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





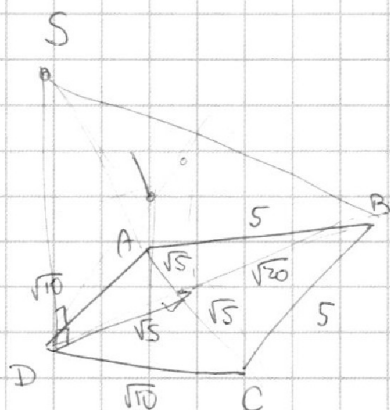
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(\sqrt{5} + 2\sqrt{5})^2 = (\sqrt{5} + 2\sqrt{5})^2 + 20\sqrt{5}$$

$$SA + SB = 5 + 2\sqrt{5}$$

$$SA = \sqrt{10 + h^2}$$
$$SB = \sqrt{45 + h^2}$$

$$\sqrt{10 + h^2} + \sqrt{45 + h^2} = 5 + 2\sqrt{5}$$

$$\cos X = 0$$

$$X = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\tan \pi$$

$$-1 = \tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$-1 = \left(\frac{2\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\begin{array}{r} 2 \ 6 \ 1 \\ 6 \ 1 \\ \hline 6 \ 1 \\ 3 \ 6 \ 6 \\ \hline 3 \ 7 \ 2 \ 1 \\ 2 \\ \hline 7 \ 4 \ 4 \ 2 \end{array}$$

$$45 + h^2 = (5 + 2\sqrt{5})^2 - 10 + h^2$$

$$(25 + 20\sqrt{5} + 20)$$

$$45 + h^2 = -2(5 + 2\sqrt{5})\sqrt{10 + h^2} + 10 + h^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

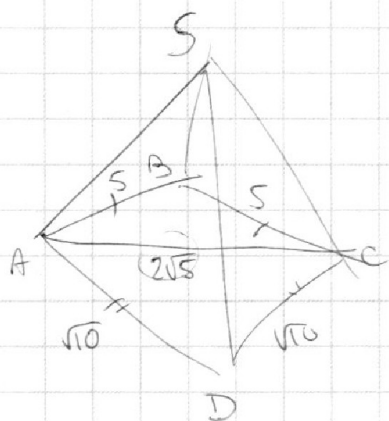
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^3 + \frac{6}{y^3} = y^3 + \frac{6}{z^3} = z^3 + \frac{6}{x^3}$$

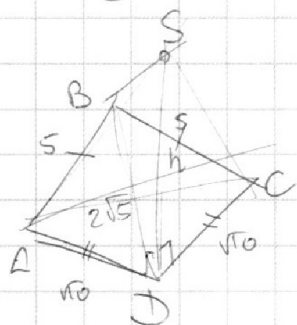
$$xyz \rightarrow \min$$



$$x^3 - y^3 = 6 \left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{y^3} \right)$$

$$= 36 \left(\frac{\frac{1}{x^3} - \frac{1}{z^3}}{z^3 y^3} \right)$$

$$\sqrt{10 + h^2} + \sqrt{45 + h^2} = 5 + \sqrt{10}$$



$$z^3 - y^3 = 6 \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{z^3} \right)$$

$$(\sqrt{5} + \sqrt{20})^2 = 25 + 2 \cdot 10 = 45$$

$$x^3 - y^3 = 36 \left(\frac{z^3 - x^3}{x^3 z^6 y^3} \right)$$

$$x^2 z^2 y^2 = 6$$

$$SA + SB = 5 + 2\sqrt{5}$$

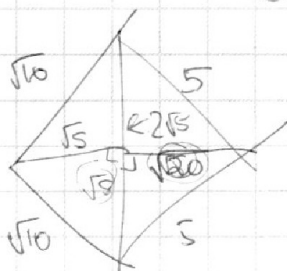
$$z^3 - x^3 = \frac{6}{y^3} - \frac{6}{x^3}$$

$$25 = 5$$

$$10 = 5 +$$

$$(x^3 - y^3) \left(1 - \frac{216}{x^6 z^6 y^6} \right)$$

$$216 \frac{(x^3 - y^3)}{x^3 y^3}$$



$$x^3 - y^3 = 216 \frac{(x^3 - y^3)}{x^6 z^6 y^6}$$



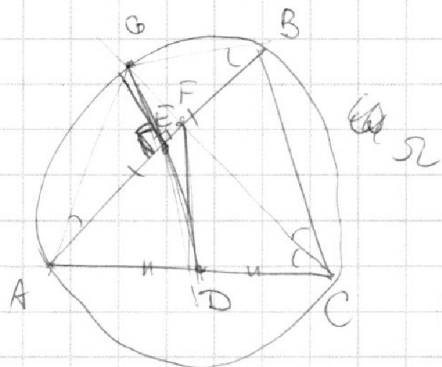
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

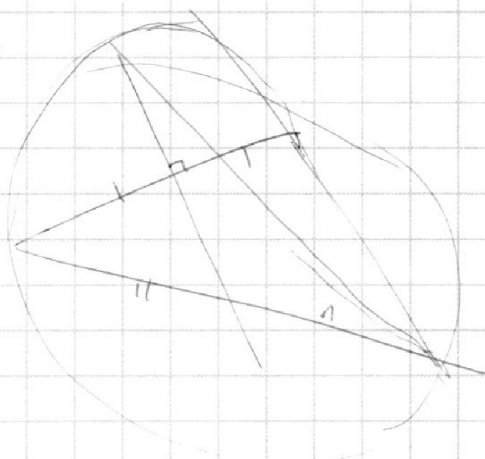
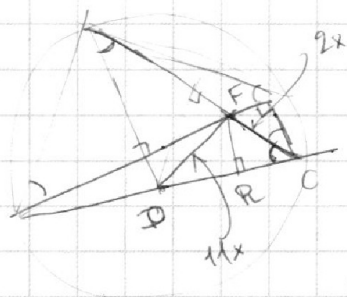
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

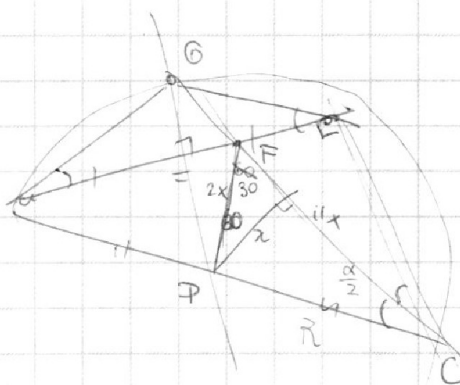
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{CF}{DE} = \frac{2}{11}$$



$$\frac{CF}{DF} = \frac{DC}{DE}$$



$$\frac{2x}{\sin \frac{\alpha}{2}} = 2R$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{x}{11x - \frac{5}{2}x}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$x^3 + \frac{6}{y^3} = y^3 + \frac{6}{z^3} = z^3 + \frac{6}{x^3}$$

$$(xyz)^3$$

$$x \frac{6}{y^3} + \frac{6}{z^3} = y^3$$

$$x^3 + \frac{6}{y^3} - y^3 - \frac{6}{z^3} = 0$$

$$y^3 + \frac{6}{z^3} - z^3 + \frac{6}{x^3} = 0$$

$$x^3 - y^3 = 6 \left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{y^3} \right)$$

$$(x^3 - y^3) + 6 \left(\frac{1}{y^3} - \frac{1}{z^3} \right) = 0$$

$$\checkmark (y^3 - z^3) + 6 \left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{x^3} \right) = 0$$

$$xyz \rightarrow \min$$

1/2/3/6/2

✓

$$\frac{z^3 - y^3}{z^3 y^3} = 6 \left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{x^3} \right)$$

$$6 \frac{6 \left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{x^3} \right)}{z^3 y^3} + x^3 - y^3 = 0$$

$$\frac{36}{z^6 y^3} - \frac{36}{x^3 y^3 z^3} + x^3 - y^3 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{2}{125}x^3 + a\left(-\frac{2}{5}x\right) = x$$

$$-\frac{2}{5}a = \frac{2}{125}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ 1 \overline{) 3} \\ \underline{16} 8 \\ 1 \overline{) 32} \end{array}$$

$$\frac{40}{21}$$

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2}d\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1. $5 \operatorname{tg} 2x - 1 = \operatorname{tg} \left(x - \frac{3\pi}{4} \right)$ Заметим, что $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ — корень

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \quad 2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$

$$\operatorname{tg} \left(x - \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{\sin \left(x - \frac{3\pi}{4} \right)}{\cos \left(x - \frac{3\pi}{4} \right)} = \frac{\sin x \cos \frac{3\pi}{4} - \cos x \sin \frac{3\pi}{4}}{\cos x \cos \frac{3\pi}{4} + \sin x \sin \frac{3\pi}{4}}$$

$\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

сокращаем, т.к. $\cos x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$,

$$= \frac{-\sin x - \cos x}{\sin x - \cos x} = \frac{-\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x - 1} = -\frac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x - 1} = \frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x}$$

$$5 \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} - 1 = \frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x}$$

$$\frac{10 \operatorname{tg} x - 1 + \operatorname{tg}^2 x - (\operatorname{tg} x + 1)^2}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 0$$

$$\frac{10 \operatorname{tg} x - 1 + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 1}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 0$$

$$\frac{10 \operatorname{tg} x - 4}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 0$$

$$\begin{cases} 10 \operatorname{tg} x - 4 = 0 \\ 1 - \operatorname{tg}^2 x \neq 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

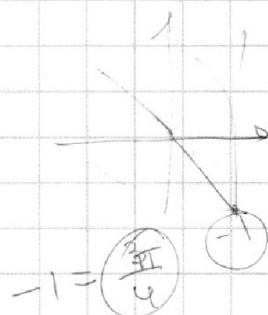
$$x = \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{5} \right) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x \neq 1$$

$$x \neq \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$\operatorname{tg} x \neq -1$$

$$x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi k$$



$$\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \tan 2x = 1 = \tan\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$5 \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 5 \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} : \cos^2 x = 5 \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$5 \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} - 1 = \tan\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\frac{10 \tan x - 1 + \tan^2 x}{1 - \tan^2 x} = \frac{\tan\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)(1 + \tan^2 x)}{1 - \tan^2 x}$$



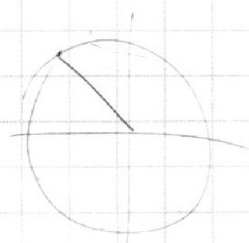
$$\frac{\sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\sin x \cos \frac{3\pi}{4} - \cos x \sin \frac{3\pi}{4}}{\sin x \cos \frac{3\pi}{4} + \cos x \sin \frac{3\pi}{4}}$$

$$-(\tan x + 1) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x}{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x}$$

$$\frac{-(\tan x + 1)}{\tan x - 1} = \frac{(1 - \tan x)(1 + \tan x)}{(1 + \tan x)^2}$$

$$10 \tan x - 1 = -(1 + \tan x)^2$$

$$\cos \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6}$$



$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{4} =$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a, b, c

$a \neq 19$

$$b = aq$$

$$c = aq^2 = bq$$

$$a = \frac{b}{q}$$

$$b =$$

$$c = qb$$

$$abc = 2^{90} \cdot 19^{90}$$

$$a \cdot aq \cdot aq^2$$

$$a^3 q^3 = 2^{90} \cdot 19^{90}$$

$$b = \frac{a^3}{q^3} = 2^{30} \cdot 19^{30}$$

$$ac = 2^{60} \cdot 19^{60}$$

$$- - +$$

$$- -$$

$$- -$$

$$- + -$$

$$+ + +$$

$$b = 2^{30} \cdot 19^{30}$$

$$c \sim [b,$$

$$\frac{b^2}{c} = a$$

$$c = \frac{b^2}{a} = 2^{30} \cdot 19^{30}$$

$$\frac{b^2}{c} = 2^2 \cdot 19^2$$



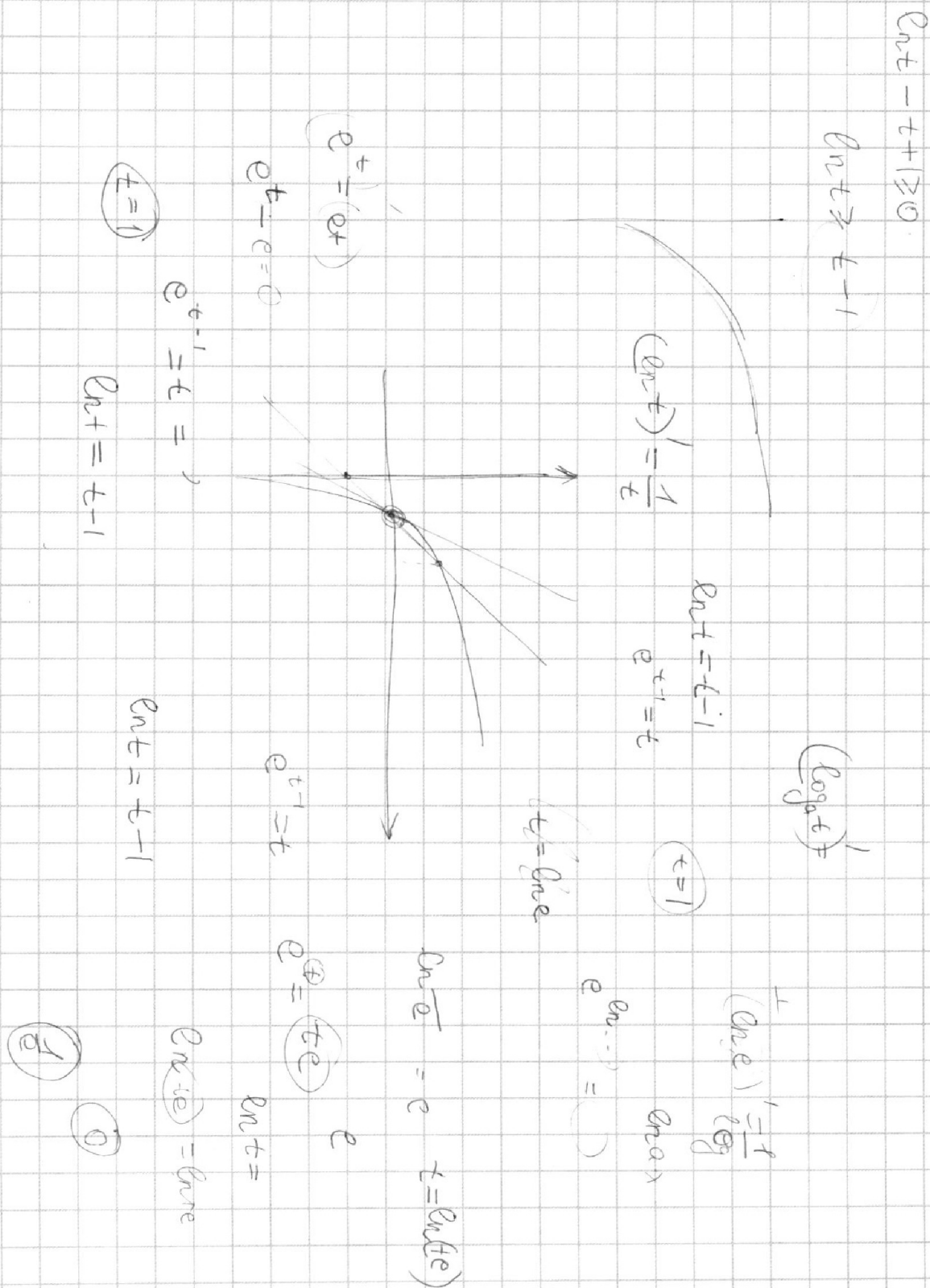
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\ln^2(x+3) - (x+2)\ln(3x+9) + (\ln 3)\ln(x+3) \geq 0$$

$$t = x+3$$

$$t-1 = x+2$$

$$\ln^2 t - (x+2)(\ln 3 + \ln t) + (\ln 3)\ln t \geq 0$$

$$\ln^2 t - (t-1)(\ln 3 + \ln t) + (\ln 3)\ln t \geq 0$$

$$\ln^2 t - (\ln 3)t + \ln 3 - \ln t + t + \ln t + \ln 3 \ln t \geq 0$$

$$\ln t + \ln e \geq t$$

$$-t(\ln 3 + \ln t) - (\ln 3 + \ln t) + \ln t(\ln t + \ln 3)$$

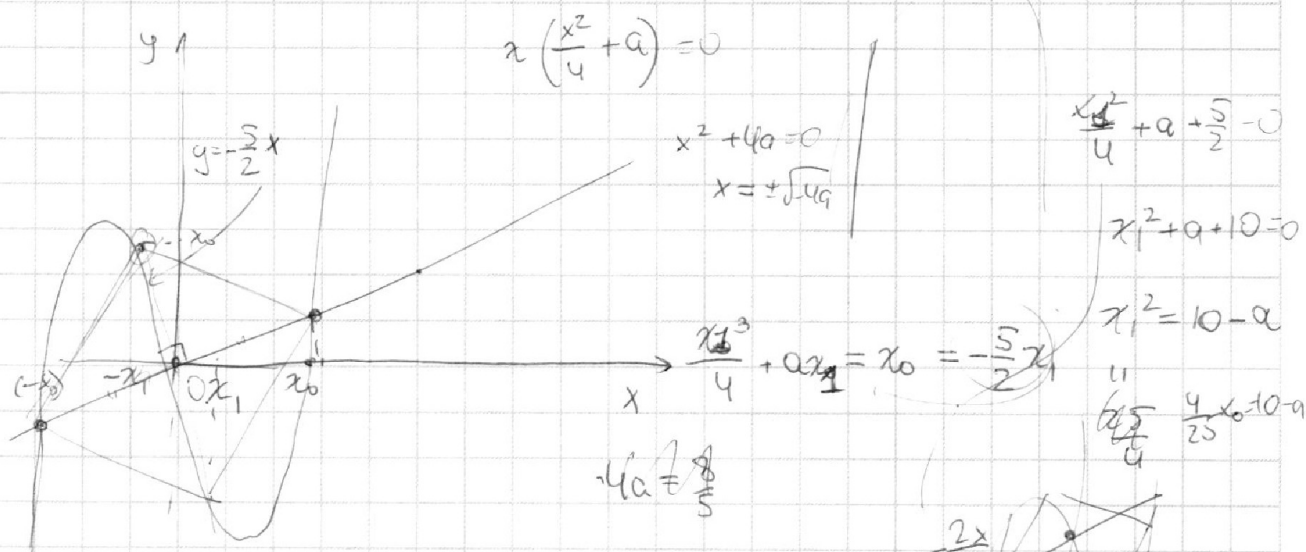
$$(et \geq e^t)$$

$$3t > 1 \quad \oplus$$

$$3t-1$$

$$3t=1 \quad \ominus$$

$$\ln^2(t+1) - \ln 3t - \ln(t+1) \cdot t + (\ln 3)\ln(t+1) \geq 0$$



$$\frac{(-x_0)^3}{4} + a(-x_0) = \frac{2}{5}(-x_0)$$

$$\frac{x_0^3}{4} + ax_0 = \frac{2}{5}x_0$$

$$x_0 \left(\frac{x_0^2}{4} + a - \frac{2}{5} \right) = 0$$

$$x_0^2 = \frac{8}{5} - 4a$$

$$4a = \frac{8}{5} - x_0^2$$

