



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 5



1. [4 балла] Решите уравнение

$$3 \operatorname{tg} 2x + 1 = \operatorname{tg} \left(x + \frac{3\pi}{4} \right).$$

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150} \cdot 3^{150}$?

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\ln^2 x - (x - 1) \ln(2x) + (\ln 2) \ln x \geq 0.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^3 - ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -4x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC . Лучи DE и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что $\frac{CF}{DF} = \frac{1}{2}$.

6. [5 баллов] Числа x , y и z не все равны между собой, и при этом

$$x^3 + \frac{7}{y^3} = y^3 + \frac{7}{z^3} = z^3 + \frac{7}{x^3}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения $x y z$.

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = BC = \sqrt{5}$, $AD = DC = \sqrt{2}$, $AC = 2$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA + SB = 2 + \sqrt{5}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB , SBC и ребра SD .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



131 Распишем $\operatorname{tg}(2x) = \operatorname{tg}(x+x)$ и $\operatorname{tg}(x + \frac{3\pi}{4})$ как сумму в tg :

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin(x+x)}{\cos(x+x)} = \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}; \quad \operatorname{tg}(x + \frac{3\pi}{4}) = \frac{\sin(x + \frac{3\pi}{4})}{\cos(x + \frac{3\pi}{4})} = \frac{\sin x \cos \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4} \cos x}{\cos x \cos \frac{3\pi}{4} - \sin x \sin \frac{3\pi}{4}}$$

$$= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x}{-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x}. \text{ Подставляем это в исходное уравнение:}$$

$$3 \operatorname{tg} 2x + 1 = \operatorname{tg}(x + \frac{3\pi}{4}) \Rightarrow \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x}{-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x} = \frac{6 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x)}{-\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x + \sin x)}$$

$$\Rightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x)(\sin x - \cos x) = (6 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x)(\cos x + \sin x). \text{ Принцип}$$

умножения на tg не 0 (у tg нет 0 в конце), а $\cos^2 x - \sin^2 x$ — разность квадратов.

$$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)(\sin x - \cos x) = (\cos x + \sin x)(6 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$\Rightarrow 1) \cos x + \sin x \neq 0 \Rightarrow \cos x = -\sin x \Rightarrow x_1 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k; x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Иногда сократили и раскрыли скобки:

$$(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) = 6 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x \Rightarrow$$

$$6 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x + 2 \sin x \cos x \Rightarrow 4 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0.$$

$$\Rightarrow 2 \cos x (2 \sin x + \cos x) = 0. \text{ Какая-то ошибка — с.}$$

$$2) 2 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ и } x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$3) 2 \sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \cos x \Rightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2} \text{ (т.к. } \cos x \neq 0 \text{ рассмотрим б.т.к.)}$$

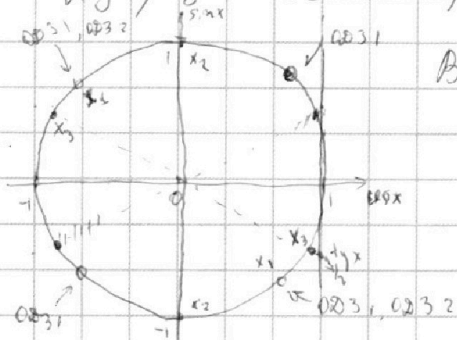
Проверим ОДЗ для tg :

$$1) \operatorname{tg} 2x - \text{существует} \Rightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ и } 2x \neq \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \text{ Тогда } x \neq \frac{\pi}{4} + \pi k \text{ и } x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \operatorname{tg}(x + \frac{3\pi}{4}) - \text{существует} \Rightarrow x + \frac{3\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ и } x + \frac{3\pi}{4} \neq \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \text{ и } x \neq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Изобразим все на триг. окружности.



Видно, что остались только x_3 , где $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$

$$\text{Ответ: } x = \operatorname{arctg}(-\frac{1}{2}) + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

- №2) Рассмотрим 3 варианта не имея геом. прогрессии ($a=t, b=qt, c=q^2t$):
1. $a=b=c$ (т.е. прогр. с $q=1$), тогда $abc=2^{150} \cdot 3^{150} \Rightarrow a=b=c=2^{50} \cdot 3^{50}$ - т.е. один вариант.
 2. $q=1$, тогда $a=b=c$ (т.е. все одинаково)
 3. $q=-1 \Rightarrow a=-b=c \Rightarrow abc=a(-a)a=-a^3=2^{150} \cdot 3^{150} \Rightarrow a=-2^{50} \cdot 3^{50}, b=2^{50} \cdot 3^{50}, c=-2^{50} \cdot 3^{50}$ - т.е. еще 1 вариант.
 4. $q \neq \pm 1$ (т.е. $q \neq 1$) $(b=qt, c=q^2t \Rightarrow a > b > c)$ обозначим $b=x$, тогда $a=\frac{x}{q}, c=xq \Rightarrow abc=\frac{x}{q} \cdot x \cdot xq=x^3=2^{150} \cdot 3^{150} \Rightarrow b=x=2^{50} \cdot 3^{50}$, все. Тогда чтобы a получилось целым, нужно выбрать q так, чтобы $2^{50} \cdot 3^{50}$ делилось на это q . Показано, что все такие $q=2^d \cdot 3^p$, где $d, p \in \mathbb{Z}$ и $0 \leq d, p \leq 50$. Значит всего получится таких d и p 51^2 вариантов, но при $d=p=0$ имеем $q=1$, что мы уже рассматривали. Значит подходит $51^2 - 1$ вариантов на q . Очевидно, что при всех них все числа целые и имеют нужное произведение.
 5. $q < -1 \Rightarrow a < b < c$ Аналогично обозначениям a, b, c и q обозначим $a=x$. Тогда $b=xq, c=xq^2 \Rightarrow abc=x^3=2^{150} \cdot 3^{150} \Rightarrow b=x=2^{50} \cdot 3^{50}$. Тогда a и c - отрицательные целые $\Rightarrow$ какому такому набору (a, b, c) можно сопоставить $(-a, b, -c)$, где уже $q > 1$ и тогда мы получили в бр-т 3 уже подходит $51^2 - 1$ вариантов q .
 6. $-1 < q < 0$ Аналогично сопоставим $(a, b, c) \leftrightarrow (-a, b, -c)$ и сопоставим в вариант. А, где тоже $51^2 - 1$ вариантов q .
- Мы рассмотрели все варианты q , т.е. другие нет (осталось только $q=0$, но при нем числа (хотя бы 1) отсутствуют и их произведение $-c$). Все варианты, очевидно, различны.

Ответ: $2 + 4(51^2 - 1)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



144 Диагонали квадрата перпендикулярны и делятся точкой пересечения на равные части. Поэтому, если из центра $O(0,0)$, то $y = -4x \rightarrow$ уравнение $y = \frac{1}{4}x + t$ — ось l , но т.к. центр $O(0,0)$, то $y = \frac{1}{4}x + t$ проходит через центр квадрата $\Rightarrow t=0$ и $y = \frac{1}{4}x$. ($\frac{1}{4}$, т.к. y — линия, проведенная при коэф. -4 из скалярного произведения). Пусть на $y = -4x$ лежат ~~точки~~ вершины квадрата A и B , а на $y = \frac{1}{4}x$ — C и D . Тогда запишем, что эти точки на осях, и на прямой $y = x^2 - 4x$:

$$\begin{aligned} A: -4x_A &= x_A^2 - 4x_A & \text{Поскольку диагонали делятся точкой пересечения пополам, то, равны длины: } OA^2 = OB^2 = OC^2 = OD^2, \text{ где } O(0,0): \\ B: -4x_B &= x_B^2 - 4x_B & x_A^2 + 16x_B^2 = x_B^2 + 16x_A^2 = x_C^2 + \frac{1}{16}x_C^2 = x_D^2 + \frac{1}{16}x_D^2. \text{ Отсюда имеем} \\ C: \frac{1}{4}x_C &= x_C^2 - 4x_C & x_A = \pm x_B, x_C = \pm x_D, \text{ т.к. } x_A = \pm x_B, x_C = \pm x_D \text{ обозначим} \\ D: \frac{1}{4}x_D &= x_D^2 - 4x_D & x_B = t, \text{ тогда } x_C = -t \text{ или } x_D = t \text{ или } x_C = t \text{ и } x_D = -t, \text{ или } x_C = -t \text{ и } x_D = t, \text{ или } x_C = t \text{ и } x_D = t, \text{ или } x_C = -t \text{ и } x_D = -t, \text{ или } x_C = t \text{ и } x_D = t, \text{ или } x_C = -t \text{ и } x_D = -t, \text{ или } x_C = t \text{ и } x_D = -t, \text{ или } x_C = -t \text{ и } x_D = t. \end{aligned}$$

$x_C = kt$ и $x_D = -kt$, или $x_C = -kt$ и $x_D = kt$, или что равносильно (применяем теорему о параллельных), поэтому возьмем первый вариант. (или отменили $x_C = x_D$ и $x_C = x_D$, т.к. они ~~тоже~~ совпадают). Записываем систему: $\begin{cases} x_A = -t, & 4t = -t^3 + 4t \\ x_B = t, & -4t = t^3 - 4t \\ x_C = kt, & \frac{1}{4}t = k^3t^3 - 4kt \\ x_D = -kt, & -\frac{1}{4}t = -k^3t^3 + 4kt \end{cases}$

$$\begin{aligned} A: x_A &= -t, & 4t &= -t^3 + 4t \\ B: x_B &= t, & -4t &= t^3 - 4t \\ C: x_C &= kt, & \frac{1}{4}t &= k^3t^3 - 4kt \\ D: x_D &= -kt, & -\frac{1}{4}t &= -k^3t^3 + 4kt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{t^2} &= \sqrt{a-4} \Rightarrow \sqrt{8(a-4)} = -2k - \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{8(a-4)} = -2k - \frac{1}{2} \Rightarrow 16(a-4) = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow 4(a-4) = k^2 + k + \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \sqrt{4t^2} &= \sqrt{a-4} \Rightarrow \sqrt{8(a-4)} = -2k - \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{8(a-4)} = -2k - \frac{1}{2} \Rightarrow 16(a-4) = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow 4(a-4) = k^2 + k + \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \sqrt{4t^2} &= \sqrt{a-4} \Rightarrow \sqrt{8(a-4)} = -2k - \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{8(a-4)} = -2k - \frac{1}{2} \Rightarrow 16(a-4) = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow 4(a-4) = k^2 + k + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{4t^2} &= \sqrt{a-4} \Rightarrow \sqrt{8(a-4)} = -2k - \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{8(a-4)} = -2k - \frac{1}{2} \Rightarrow 16(a-4) = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow 4(a-4) = k^2 + k + \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \sqrt{4t^2} &= \sqrt{a-4} \Rightarrow \sqrt{8(a-4)} = -2k - \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{8(a-4)} = -2k - \frac{1}{2} \Rightarrow 16(a-4) = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow 4(a-4) = k^2 + k + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{4t^2} &= \sqrt{a-4} \Rightarrow \sqrt{8(a-4)} = -2k - \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{8(a-4)} = -2k - \frac{1}{2} \Rightarrow 16(a-4) = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow 4(a-4) = k^2 + k + \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \sqrt{4t^2} &= \sqrt{a-4} \Rightarrow \sqrt{8(a-4)} = -2k - \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{8(a-4)} = -2k - \frac{1}{2} \Rightarrow 16(a-4) = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow 4(a-4) = k^2 + k + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{4t^2} &= \sqrt{a-4} \Rightarrow \sqrt{8(a-4)} = -2k - \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{8(a-4)} = -2k - \frac{1}{2} \Rightarrow 16(a-4) = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow 4(a-4) = k^2 + k + \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \sqrt{4t^2} &= \sqrt{a-4} \Rightarrow \sqrt{8(a-4)} = -2k - \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{8(a-4)} = -2k - \frac{1}{2} \Rightarrow 16(a-4) = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow 4(a-4) = k^2 + k + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ответ: $a = \frac{257}{60}$; площадь квадрата $\frac{17^2}{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

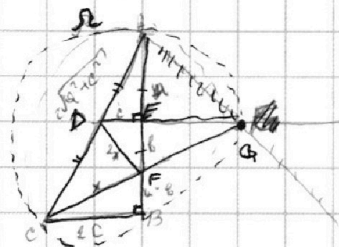
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5) CF пересекает Ω в середине AB , тогда CF перпендикулярна $AB \Rightarrow BE$ — диаметр $\Omega \Rightarrow BEF$ — тоже диаметр Ω , т.е. BEF — прямая линия, т.е. AB перпендикулярна BC .
Поскольку DE — средняя линия $\triangle ABC$, то $DE \parallel BC \Rightarrow BC \perp AB \Rightarrow \angle B = 90^\circ$. Пусть $CF = x$, тогда по условию $DF = 2x$.



Обозначим $AE = a$, $EF = b \Rightarrow FB = a - b$, $BC = 2c \Rightarrow$
 $\triangle CBF: x^2 = 4c^2 + (a - b)^2$; $\triangle DEF: 4x^2 = b^2 + c^2$ ($DE = \frac{1}{2}BC = c$, как средняя линия). Значит:

$$\begin{cases} x^2 = 4c^2 + (a - b)^2 \\ 4x^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \quad \text{Кроме этого, по св-ву биссектрисы:} \quad \frac{AF}{FB} = \frac{AC}{CB} = \frac{a}{2c} = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{c} = \frac{a + b}{a - b}$$

Нужно узнать лишь $\frac{a}{c}$ или $\frac{b}{c}$, поэтому введем переменную t :

$$\begin{cases} 16c^2 + 4(a - b)^2 = b^2 + c^2 \\ (a - b)\sqrt{a^2 + c^2} = c(a + b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16c^2 + 4(a^2 - 2ab + b^2) = b^2 + c^2 \\ (a - b)\sqrt{a^2 + c^2} = c(a + b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16c^2 + 4a^2 - 8ab + 4b^2 = b^2 + c^2 \\ (a - b)\sqrt{a^2 + c^2} = c(a + b) \end{cases}$$

$$16c^2 + 4a^2 - 8ab + 4b^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 16c^2 + 4a^2 - 8ab + 3b^2 = 0$$

$$16c^2 + 4a^2 - 8ab + 3b^2 = 0 \Rightarrow 16c^2 + 4a^2 - 8ab + 3b^2 = 0$$

$$16c^2 + 4a^2 - 8ab + 3b^2 = 0 \Rightarrow 16c^2 + 4a^2 - 8ab + 3b^2 = 0$$

Ответ: 90° и

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6 Рассмотрим ~~систему~~ ^{систему} ~~первое равенство~~ ^{первое и второе} и ~~второе~~ ^{второе и третье} и выразим z в
 них $z^3: \begin{cases} x^3 + \frac{7}{y^3} = y^3 + \frac{7}{z^3} \\ x^3 + \frac{7}{y^3} = z^3 + \frac{7}{x^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{z^3} = \frac{x^3}{y^3} + \frac{1}{y^3} - \frac{y^3}{z^3} = \frac{x^3 y^3 + 7 - y^6}{7 y^3} \\ \frac{1}{z^3} = \frac{x^3}{z^3} + \frac{1}{y^3} - \frac{y^3}{x^3} = \frac{x^3 y^3 + 7 - y^6}{7 y^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{7}{x^3 + y^3 - \frac{7}{y^3}} \\ z = \frac{7}{x^3 + \frac{7}{y^3} - \frac{7}{x^3}} \end{cases}$
 Приравняв, имеем: $\frac{7}{x^3 + y^3 - \frac{7}{y^3}} = \frac{7}{x^3 + \frac{7}{y^3} - \frac{7}{x^3}} \Rightarrow \frac{7}{x^3 + y^3 - \frac{7}{y^3}} = \frac{7}{x^3 + \frac{7}{y^3} - \frac{7}{x^3}} \Rightarrow (y^3 - x^3) + 14 \frac{y^3 - x^3}{x^3 y^3} = 0 \Rightarrow (y^3 - x^3) (1 + \frac{14}{x^3 y^3}) = 0$ Решая для этих вы-
 ражений, имеем $y = x$ или $y = -\sqrt[3]{14}/x$. Попробуем это можно изобразить
 взять другие равенства (выразить x или y) и получаются аналогичные вы-
 ражения (т.к. все симметрично). Тогда:
 $\begin{cases} y = x \\ y = -\sqrt[3]{14}/x \end{cases}$ и $\begin{cases} y = z \\ y = -\sqrt[3]{14}/z \end{cases}$ и $\begin{cases} z = x \\ z = -\sqrt[3]{14}/x \end{cases}$ Рассмотрим все варианты, возь-
 $x = t$:
 • В первом $y = x \Rightarrow z \neq y \Rightarrow \begin{cases} z = -\sqrt[3]{14}/z \\ z = x \end{cases} \Rightarrow z = -\sqrt[3]{14}/t \Rightarrow (x, y, z) = (t, t, -\sqrt[3]{14}/t)$
 • В первом $y = -\sqrt[3]{14}/x$, во втором $y = z \Rightarrow z = -\sqrt[3]{14}/x \Rightarrow (x, y, z) = (t, -\sqrt[3]{14}/t, -\sqrt[3]{14}/t)$
 • В первом $y = -\sqrt[3]{14}/x$, во втором $y = -\sqrt[3]{14}/z \Rightarrow z = x \Rightarrow (x, y, z) = (t, -\sqrt[3]{14}/t, t)$.
 Проверим, что теперь все подходит:
 1) $(x, y, z) = (t, t, -\sqrt[3]{14}/t) \Rightarrow t^3 + \frac{7}{t^3} = t^3 - \frac{7t^3}{14} = -\frac{14}{t^3} + \frac{7}{t^3} = -\frac{7}{t^3}$ ~~не подходит~~
 $\Rightarrow t^6 = -14$ - такого не бывает. $7/t^3 = -t^3/2 \Rightarrow -t^6 = 14$ - такого не бывает.
 2) $(x, y, z) = (t, -\sqrt[3]{14}/t, -\sqrt[3]{14}/t) \Rightarrow t^3 + \frac{7t^3}{14} = -\frac{14}{t^3} + \frac{7t^3}{14} = -\frac{14}{t^3} + \frac{7}{t^3} \Rightarrow t^3 = -\frac{14}{t^3}$
 $\Rightarrow t^6 = -14$ - такого не бывает.
 3) $(x, y, z) = (t, -\sqrt[3]{14}/t, t) \Rightarrow t^3 - \frac{7t^3}{14} = -\frac{14}{t^3} + \frac{7}{t^3} = t^3 + \frac{7}{t^3} \Rightarrow -\frac{14}{t^3} = t^3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow t^6 = -14$ - такого не бывает.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

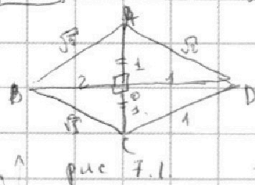
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№7



Рассмотрим основание $ABCD$. $AB=BC \Rightarrow B$ — на сепере к AC , $AD=DC \Rightarrow D$ на сепере к $AC \Rightarrow$ биссектриса $AC \perp BD$ и в точке пересечения O . $AO=OC=\frac{AC}{2}=1$. Основаниями являются прямоугольные треугольники $\Rightarrow BO^2=AB^2-AO^2=5-1=4 \Rightarrow BO=2$; $OD^2=AD^2-AO^2=DC^2-CO^2=2-1=1 \Rightarrow OD=1$. Введем координаты так, что $O(0;0;0)$.

$D(1;0;0)$, $B(-2;0;0)$, $C(0;-1;0)$, $A(0;1;0)$, $S(1;0;h)$ (S над D , т.к. $SD \perp ABCD$ по условию). Из координат, числен $SA^2=1^2+1^2+h^2=2+h^2$;

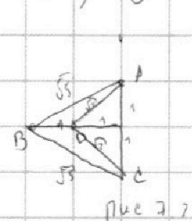
$SB^2=3^2+0^2+h^2=9+h^2 \Rightarrow SA+SB=2+\sqrt{5}=\sqrt{2+h^2}+\sqrt{9+h^2}$. Возвращаем в квадрат:

$4+5+4\sqrt{5}=2+h^2+9+h^2+2\sqrt{(2+h^2)(9+h^2)} \Rightarrow 4\sqrt{5}=2h^2+7+2\sqrt{(2+h^2)(9+h^2)} \Rightarrow \sqrt{(2+h^2)(9+h^2)}=2\sqrt{5}-1-h^2$

Возвращаем еще раз: $(2+h^2)(9+h^2)=20+4\sqrt{5}-4\sqrt{5}h^2+2h^2 \Rightarrow h^4+h^2(2-4\sqrt{5})+(21-4\sqrt{5})=0$

$\Rightarrow h^4+11h^2+18 \Rightarrow h^2(2-4\sqrt{5}-11)=(4\sqrt{5}-3) \Rightarrow h^2=\frac{4\sqrt{5}-3}{-4\sqrt{5}-9}$. Видно,

что получается $h^2 < 0 \Rightarrow$ картинка выглядит не так, а B и D по одну сторону от AC . Тогда правильный рисунок — 7.2.



Пусть $D(0;0;0)$, $A(1;1;0)$, $C(1;-1;0)$, $B(-1;0;0)$, $S(0;0;h)$

$\Rightarrow SA^2=h^2+2$, $SB^2=h^2+1 \Rightarrow 2+\sqrt{5}=\sqrt{2+h^2}+\sqrt{1+h^2}$. Возвращаем

к числу выводим, что такое h всего одно, а $h=\sqrt{3}$ — подходит.

Тогда: S — площадь $ABCD$: $2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1) = 1$, в $SABCD$ $h=\sqrt{3} \Rightarrow$ объем $SABCD$: $1 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Пусть R — центр шара из пункта б. Тогда очевидно, что

пусть $R(R_x, R_y, R_z)$, но пометки, что $|R_x|=r$, где r — радиус шара (из касания SD

и $|R_z|=r$ — из касания $ABCD$, а $R_y=0$, т.к. картинка сим. отн. BDS

Тогда имеем $R(-r, 0, r)$, но нужно учесть касание SAD и SBC . Тогда

используем формулу касания шара к плоскости: $\frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=r$

Рассмотрим пирамиды $BASR$, $BCSR$, $BAOR$ и $SABR$ и $SCBR$. Показано, что все эти пирамиды имеют

равный объем всей пирамиды, а высоты из R на BA , BC и BD равны r . Высоты на SA и SC получим по

$r/\sqrt{2}$ (из-за того, что они лежат в сечении по $r=r$ и они

ARD — $1/2$ площади с $r=r$). Считаем площади

треугольников: $S_{BAS}=\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$; $S_{BCS}=\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

S_{ABD} и S_{BCD} по рис. 7.4: $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$. Запишем уравнение:

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{r \cdot 2 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} + \frac{r \cdot 2 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} + \frac{r \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}}{2} + \frac{r \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}}{2} + \frac{r \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} + \frac{r \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{2}{3}r + \frac{2}{3}r + \frac{1}{3}r + \frac{1}{3}r + \frac{1}{\sqrt{3}}r + \frac{1}{\sqrt{3}}r$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = r \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \Rightarrow r = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{5}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1/\sqrt{3}}{5/\sqrt{3} + 1/\sqrt{3}} = \frac{1/\sqrt{3}}{6/\sqrt{3}} = \frac{1}{6}$

Ответ: а) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ б) $\frac{\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}$

Рис. 7.3: A 3D coordinate system showing a tetrahedron ABCD with vertices A(1,1,0), B(-1,0,0), C(1,-1,0), and D(0,0,0). A point S(0,0,h) is shown above D. The base is a rhombus with side length 2. The height of the tetrahedron is h.

Рис. 7.4: A 3D coordinate system showing a tetrahedron ABCD with vertices A(1,1,0), B(-1,0,0), C(1,-1,0), and D(0,0,0). A point S(0,0,h) is shown above D. The base is a rhombus with side length 2. The height of the tetrahedron is h.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



(a, b, c) $abc = 2^{150} \cdot 3^{150} = \frac{x}{q} \cdot x \cdot q = x^3 \rightarrow x = 2^{50} \cdot 3^{50}$
 $a=b=c=2^{50} \cdot 3^{50} \parallel a > b > c \approx a < b < c \quad q \in \mathbb{N} \cdot 2^{50} \cdot 3^{50} \Rightarrow q = 2^x \cdot 3^y$
 $\text{Ans: } 1 + 2(51^2 - 1) = 2 \cdot 51^2 - 2 = 2 \cdot 51^2 - 1$
 $\text{10) } \frac{1}{2} \sin 6x + \frac{1}{2} \cos 6x = \sin(x + \frac{3\pi}{4}) = \sin x \cos \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4} \cos x$
 $= \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x$
 $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x)$
 $\frac{\sin x + \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} + 1 = \frac{-\sin x \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x}{-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x}$
 $= (\sin x + \cos x) (6 \sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x) = (\cos x - \sin x) (\cos x + \sin x) (\sin x - \cos x)$
 $1) \sin x + \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k; x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$
 $2) \cos^2 x + 6 \sin x \cos x - \sin^2 x = -\cos^2 x - \sin^2 x + 2 \cos x \sin x$
 $4 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0 \Rightarrow 2 \cos x (2 \sin x + \cos x) = 0$
 $2) \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$
 $3) 2 \sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \tan x = -\frac{1}{2}$
 $3) \ln^2 x - (x-1) \ln(2x) + (\ln 2) \ln x \geq 0$
 $\ln^2 x - x \ln 2 \ln x + \ln 2 \ln x \geq 0$
 $\ln x (\ln x - x \ln 2 + \ln 2) \geq 0$
 $y = x^2 - 4x \quad (x, y) \rightarrow \text{карта}$
 $x(x^2 - 4) = 5$
 $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = -2$
 $y_1 = -3, y_2 = -5, y_3 = -4, y_4 = -4$
 $\text{11) } \frac{x^3 y^3 + 7 - y^6}{y^3} = \frac{1}{y^3}$
 $x^3 y^3 + 7 - y^6 = \frac{1}{y^3}$
 $(x-y)(x^2 + xy + y^2) + 14 \frac{x^2 - y^3}{y^3 x^3} = 0$
 $(x^3 - y^3) (1 + \frac{14}{y^3 x^3}) = 0$
 $(y^3 - z^3) (1 + \frac{14}{y^3 z^3}) = 0$
 $(x^3 - z^3) (1 + \frac{14}{x^3 z^3}) = 0$
 $x^3 - 14 = x \cdot x \cdot \frac{y^3 - 14}{x}$
 $x^3 - 14 = x \cdot x \cdot \frac{y^3 - 14}{x}$
 $x^3 - 14 = x \cdot \frac{y^3 - 14}{x}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



00 3 4 5 6 7



$$1^2 + 4 = -4 + 2 = -1/4$$

$$5^2 = -4,25$$

$$\frac{320}{17} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{array}{r} 320 \\ \times 4 \\ \hline 1280 \\ + 1280 \\ \hline 2560 \end{array}$$

$$x^6$$

$$x_B^2 + 4x_B^2 = x_C^2 + \frac{1}{16}x_C^2$$

$$x_B^2 \cdot 5 = x_C^2 \cdot \frac{17}{16}$$

$$\frac{80}{17} = 1 \quad x_C = x_B \cdot \pm \sqrt{\frac{17 \cdot 5}{16}}$$

$$\begin{array}{r} 1257 \\ \times 7 \\ \hline 8799 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 59 \\ - 36 \\ \hline 23 \end{array}$$

$$x_B^2 + 16x_B^2 = x_C^2 + \frac{1}{16}x_C^2$$

$$x_C = 4x_B$$

$$\frac{1}{3} + \frac{7}{13} = -\frac{3\sqrt{14}}{4}$$

$$t^3 + \frac{7}{t^3} = 1^3 + \frac{7}{1^3} = 1^3 - \frac{13}{2}$$

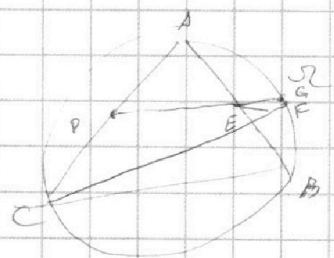
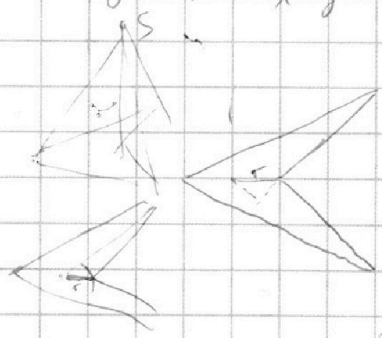
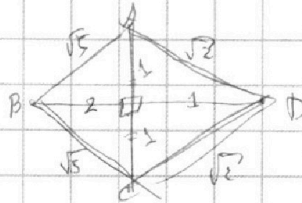
$$= 1^3 - \frac{14}{2} + \frac{7}{t^3} = -\frac{7}{t^3}$$

$$x^3 + \frac{7}{y^3} = z^3 + \frac{7}{x^3} \Rightarrow \frac{1}{y^3} = \frac{z^3}{7} + \frac{1}{x^3} - \frac{x^3}{7} = \frac{x^3x^3 + 7 - x^6}{7x^3}$$

$$y^3 + \frac{7}{z^3} = z^3 + \frac{7}{x^3} \Rightarrow y^3 = z^3 + \frac{7}{x^3} - \frac{7}{z^3}$$

$$x^3y^3 + 7 - y^6 = 7y^3 \quad x^3 + \frac{7}{y^3} - \frac{7}{x^3} = \frac{7y^3}{x^3y^3 + 7 - y^6}$$

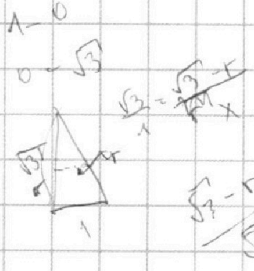
$$3/5/6$$



$$\begin{array}{l} 3 + \sqrt{2} \sqrt{2 + \sqrt{5}} \\ 1 + \sqrt{2} \sqrt{5} \\ 3 + 2\sqrt{2} \sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} \sqrt{2} \end{array}$$

$$c = 2a$$

$$(c, d) - (d, c) = 2c$$





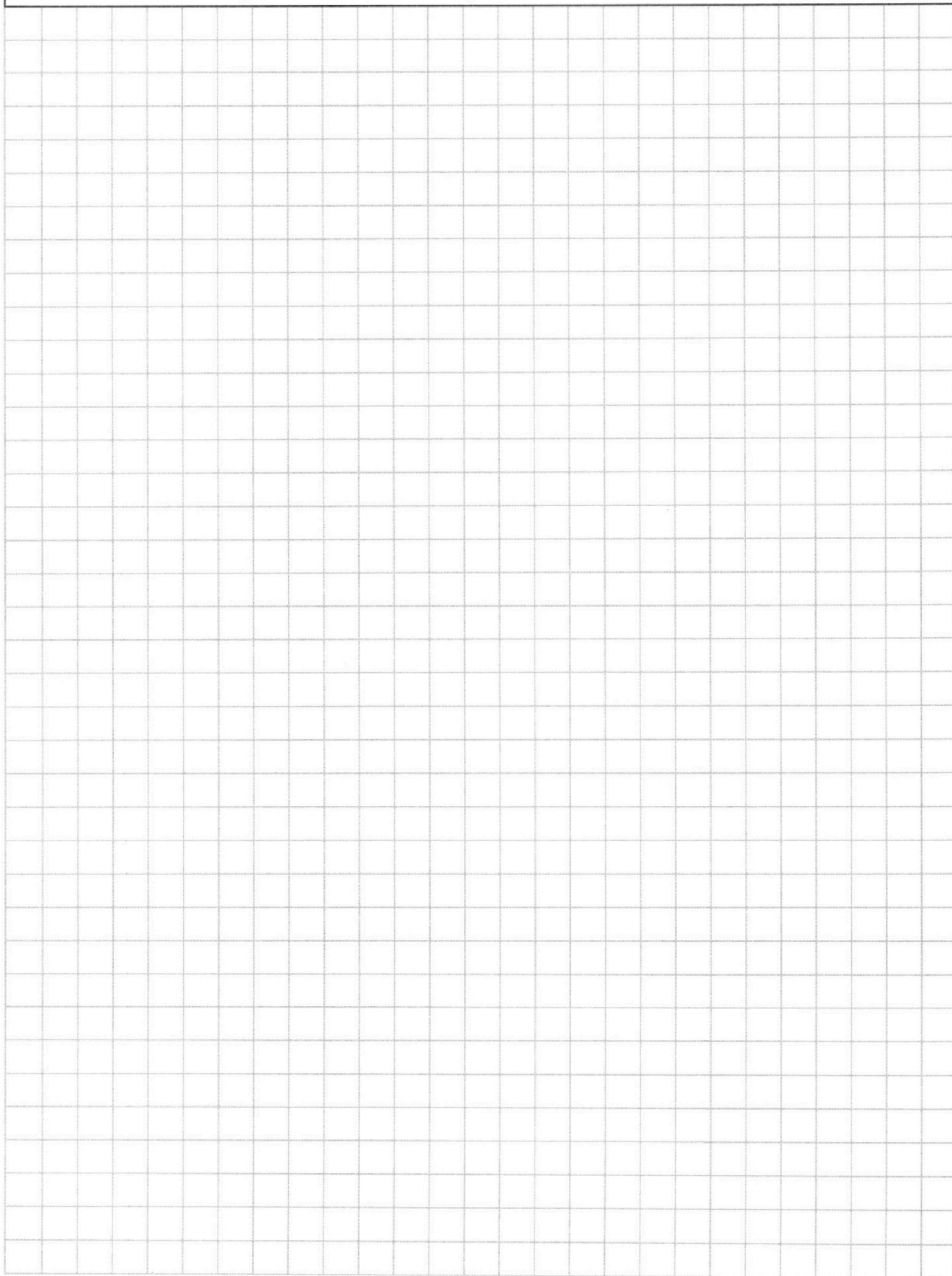
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

☐

2

☐

3

☐

4

☐

5

☐

6

☐

7

☐

 **МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

