



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x - y = 3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = \sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



стр 1

$$\begin{cases} ab : 3^4 7^{13} \\ bc : 3^{19} 7^{17} \\ ac : 3^{23} 7^{42} \end{cases}$$

Наименьшее возм. значение abc - ?

$$ab \cdot bc \cdot ac : 3^{4+19+23} 7^{13+17+42}$$

$$a^2 b^2 c^2 : 3^{38} 7^{72} \quad \text{, значит, т.к. } a^2 b^2 c^2 = (abc)^2, \text{ то каждый делитель } abc \text{ входит в } a^2 b^2 c^2 \text{ дважды} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow abc : 3^{20} 7^{36}$$

$abc \neq 0 \Rightarrow$, т.к. $a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow$ Минимальное число

$! 3^{20} \cdot 7^{36}$ не равно 0 - это само число $3^{20} \cdot 7^{36} \Rightarrow$ минимальное значение $abc = 3^{20} \cdot 7^{36}$.

Ответ: $3^{20} \cdot 7^{36}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

стр 2

$\frac{a}{b}$ - несократимая дробь $\Rightarrow a \nmid b$ $(a; b) = 1$

$a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$

$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$ - дробь, записанная на доске

m - наименьшее число, ^{на} которое можно сократить и

числитель, и знаменатель записанной дроби. Т.е. $(a+b; a^2-9ab+b^2) = m$
По св-ву $\text{НОД}(x; y) = \text{НОД}(x; y - kx)$:

$$(a+b; a^2-9ab+b^2) = (a+b; a^2-9ab+b^2 - (a+b)^2) = (a+b; a^2-9ab+b^2 - a^2 - b^2 - 2ab) =$$

$$= (a+b; -11ab) = (a+b; 11ab)$$

$$(a+b; 11ab) = m$$

Т.к. $(a; b) = 1$, то ~~$a \nmid b$ и $b \nmid a$~~

$\Rightarrow (a+b; b) = 1, (a+b; a) = 1$ значит $a+b$ и b взаимно
просты и $a+b$ и a взаимно просты, тогда $a+b$ и ab тоже
взаимно просты, т.к. в a и в b не входят никакие общие делители
с $a+b$ кроме 1, Т.к. значения их произведения ab не будут входить
никакие общие делители с $a+b$ кроме 1. Т.е. Т.к. Т.е.

$(a+b; 11ab) = m$. Значит, т.к. $(a+b; ab) = 1$, то общий
делитель $m =$ либо 1, либо 11. В задаче просят найти максималь-
 $(a+b; 11ab) =$ ^{искомое} т.к. 11 - простое число.

нее m , следовательно $m = 11$.

Ответ: $m = 11$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x \quad \text{чр. 3}$$

$$3x^2 - 5x + 6 + 3x^2 + x + 1 - 2\sqrt{3x^2 - 5x + 6}\sqrt{3x^2 + x + 1} = 25 + 36x^2 - 60x$$

$$6x^2 - 4x + 7 - 2\sqrt{3x^2 - 5x + 6}\sqrt{3x^2 + x + 1} = 25 + 36x^2 - 60x$$

$$-2\sqrt{3x^2 - 5x + 6}\sqrt{3x^2 + x + 1} = 18 + 30x^2 - 56x$$

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6}\sqrt{3x^2 + x + 1} = -9 - 15x^2 + 28x$$

О.О.:

$$\begin{cases} 3x^2 - 5x + 6 \geq 0 & D = 25 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = 25 - 72 < 0 \Rightarrow \text{значение всегда } > 0, \text{ парабол не пересекает } OX \\ 3x^2 + x + 1 \geq 0 & D = 1 - 4 \cdot 3 = -11 < 0 \Rightarrow \text{значение всегда } > 0, \text{ парабол не пересекает } OX \\ -9 - 15x^2 + 28x \geq 0 & D = 28^2 - 4 \cdot 15 \cdot 9 = 4(7 \cdot 28 - 15 \cdot 9) = 4(196 - 135) = 4 \cdot 61 > 0 \\ & -15\left(x - \frac{-28 - 2\sqrt{61}}{-30}\right)\left(x + \frac{-28 + 2\sqrt{61}}{-30}\right) \geq 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{28 + 2\sqrt{61}}{30} - x\right)\left(x + \frac{28 + 2\sqrt{61}}{30}\right) \geq 0$$

$$\begin{array}{c} + - + \\ \frac{-28 + 2\sqrt{61}}{30} \quad \frac{28 + 2\sqrt{61}}{30} \end{array}$$

$$x \in \left[-\frac{14 + \sqrt{61}}{15}, \frac{14 - \sqrt{61}}{15}\right]$$

$$(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1) = (-9 - 15x^2 + 28x)^2$$

$$9x^4 - 15x^3 + 18x^2 + 3x^3 - 5x^2 + 6x + 3x^2 - 5x + 6 = (-9 - 15x^2 + 28x)^2$$

$$9x^4 - 15x^3 + 16x^2 + 3x^3 + x + 6 = (28x - 15x^2 - 9)^2$$

$$9x^4 - 12x^3 + 16x^2 + x + 6 = (28x - 15x^2 - 9)^2$$

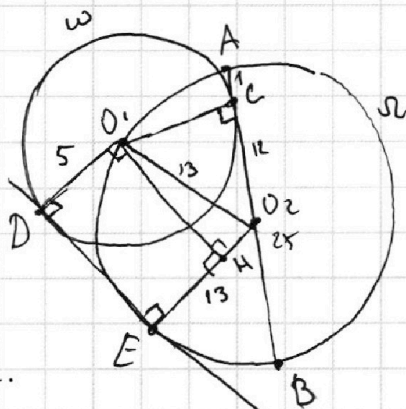
$$9x^4 - 12x^3 + 16x^2 + x + 6 = 28^2x^2 + (15x^2 + 9)^2 - 2 \cdot 28x(15x^2 + 9)$$

$$9x^4 - 12x^3 + 16x^2 + x + 6 = 28^2x^2 + 15^2x^4$$



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

стр. 8



DE - German
общ.-науч.

D - Тошна қас., обш. қас. қиуи

$E =$ - Total area. R_n - avg. no. of n cells.

Т.н.а. < 0 , CO_2 -гиперсия, но можно записать н. Тензорного

zu $\Delta O, CO_2$:

$$0,02^2 = 0,1^2 + 0,02^2 \quad 13^2 = 0,1^2 + 144 \quad 0,1^2 = 169 - 144 = 25$$

$$\Rightarrow 0,1^2 = 25 \Rightarrow 0,1 = 5, \text{ ~~und das~~ } 0,1\text{-pagezahl } w \Rightarrow \text{pagezahl } w = 5.$$

Проведем высоту OD на DE . Так как DE — касательная, то $DE \perp OD$, и

$DE \perp O_2E$. Точнее то, как правило O, H образует перпендикуляр

DO, HE , т.к. в 4-е время, ~~а при этом~~ но в 4-е время в стан четырёхчасовые, следовательно он преобразуется,

$\text{Ti}^{2+} \text{E} \text{H} = 0, \text{D}$, $\text{Ti}^{2+} \text{E} \text{O}_2 = \text{O}_2 \text{H} + \text{E} \text{H}$, $\text{O}_2 \text{H} = \text{E} \text{O}_2 - \text{E} \text{H} = \text{E} \text{O}_2 - 0, \text{D}$,

$O_2H = 13 - 5 = 8$. Zusammen m. Ringangabe gibt folgende $\Delta H, O_2$:

$$D_1 D_2^2 = D_1 H^2 + H D_2^2 \quad 169 = D_1 H^2 + 64 \quad D_1 H^2 = 105$$

$$D_1 H = \sqrt{105}$$

5. Ж.к. O, DEH - параллелограмм, построен. G -центр $\Rightarrow DE = OH = \sqrt{105}$.

Umber: $\sqrt{105}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

a) $x = 2y$

$$z = \frac{5x - y}{3}$$

$$z = \frac{10y - y}{3} = 3y$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{25 \cdot 4y^2 - y^2 - 9y^2}{y^2 + 8 \cdot 9y^2} = \frac{100y^2 - 10y^2}{28y^2} = \frac{90}{28} = \frac{45}{14} =$$

$$= 3 \frac{3}{14}$$

б) $x = -0,8y$ — и $z = \frac{5x - y}{3}$

$$z = \frac{-4y - y}{3} = -\frac{5}{3}y$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{25 \cdot 0,64y^2 - y^2 - \frac{25}{9}y^2}{y^2 + 3 \cdot \frac{25}{9}y^2} = \frac{16y^2 - y^2 - \frac{25}{9}y^2}{y^2 + \frac{25}{3}y^2} =$$

$$= \frac{16y^2 - y^2 - \frac{25}{9}y^2}{y^2 + \frac{25}{3}y^2} = \frac{16 - 1 - \frac{25}{9}}{1 + \frac{25}{3}} = \frac{15 - \frac{25}{9}}{1 + \frac{25}{3}} = \frac{45 - \frac{25}{3}}{3 + 25} =$$

$$= \frac{45 - \frac{25}{3}}{28} = \frac{45 \cdot 3 - 25}{28 \cdot 3} = \frac{135 - 25}{84} = \frac{110}{84} = \frac{55}{42} = 1 \frac{13}{42}$$

$3 \frac{3}{14} > 1 \frac{13}{42}$, следовательно наименьшее возможное

значение выражения $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$ равно $1 \frac{13}{42}$.

Ответ: $1 \frac{13}{42}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



стр 3

~~5x-8y=3z~~ $x, y, z \neq 0 \Rightarrow$ Мы можем ~~задать~~ ^{выразить} ~~как~~ ^{в терминах} x, y, z .

$$\begin{cases} 5x - y = 3z \\ \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{5x - y}{3} \\ \frac{8yz + xz - 15xy}{xyz} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \frac{5x - y}{3} \\ 8yz + xz - 15xy = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \frac{5x - y}{3} \\ z(8y + x) = 15xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \frac{5x - y}{3} \\ z = \frac{15xy}{8y + x} \end{cases}$$

$$\frac{5x - y}{3} = \frac{15xy}{8y + x}$$

$$(5x - y)(8y + x) = 45xy$$

$$40xy + 5x^2 - 8y^2 - yx = 45xy$$

$$5x^2 - 8y^2 - 6yx = 0$$

Выразим x через y .

$$D = 36y^2 + 4 \cdot 5 \cdot 8y^2 = 36y^2 + 160y^2 = 196y^2$$

$$1) y \geq 0$$

$$x_1 = \frac{6y + \sqrt{196y^2}}{10} = \frac{6y + 14y}{10} = 2y$$

$$x_2 = \frac{6y - \sqrt{196y^2}}{10} = \frac{6y - 14y}{10} = -0,8y$$

$$2) y < 0$$

$$x_3 = \frac{6y + \sqrt{196y^2}}{10} = \frac{6y + |14y|}{10} = \frac{6y - 14y}{10} = -0,8y$$

$$x_4 = \frac{6y - \sqrt{196y^2}}{10} = \frac{6y - |14y|}{10} = \frac{6y + 14y}{10} = 2y$$

Итак, можно

$$\begin{cases} x = 2y \\ x = -0,8y \end{cases}$$

x через y выразить 2 ~~варианта~~ ^{варианта};

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

ср. 6

Получили полученное выражение ~~для S_{AB}~~ ~~$S_{AB} = \frac{V_B(49-V_B)}{49-2V_B}$~~

значит, что ~~мы получили~~ в (2):

$$S_{AB} = \frac{(49-V_B) V_B}{49-2V_B}$$

Подставим в S_{AB} и в (2):

$$\frac{V_B(49-V_B)}{(49-2V_B)(49+7-V_B)} + \frac{3}{5} = \frac{V_B(49-V_B)}{(49-2V_B)(49+7-V_B)}$$

$$\frac{V_B(49-V_B)}{(49-2V_B)} \left(\frac{1}{56-V_B} - \frac{1}{V_B+7} \right) = -\frac{3}{5}$$

$$\frac{V_B(49-V_B)}{49-2V_B} \left(\frac{V_B+7-56+V_B}{(56-V_B)(V_B+7)} \right) = -\frac{3}{5}$$

$$\frac{V_B(49-V_B)(2V_B-49)}{(49-2V_B)(56-V_B)(V_B+7)} = -\frac{3}{5}$$

$$\frac{V_B(49-V_B)}{(56-V_B)(V_B+7)} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{49V_B - V_B^2}{56V_B + 56 \cdot 7 - V_B^2 - 7V_B} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{49V_B - V_B^2}{49V_B + 56 \cdot 7 - V_B^2} = \frac{3}{5}$$

$$5 \cdot 49V_B - 5V_B^2 = 3 \cdot 49V_B + 3 \cdot 56 \cdot 7 - 3V_B^2$$

$$\begin{aligned} 2V_B^2 - 249V_B + 3 \cdot 56 \cdot 7 &= 0 \\ V_B^2 - 49V_B + 3 \cdot 28 \cdot 7 &= 0 \\ D &= 49^2 - 4 \cdot 3 \cdot 28 \cdot 7 \\ D &= 7^2(4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4) \\ D &= 7^2(4^2 - 48) = 7^2 \\ V_{B1} &= \frac{49+7}{2} = 28 \\ V_{B2} &= \frac{49-7}{2} = 21 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

стр. 7

1) $V_B = 28$; тогда $V_M = 49 - 28 = 21$

Но $S_{AB} = \frac{V_M V_B}{V_M - V_B}$, если

$V_M < V_B$, то но при этом $V_M \geq 0$, $V_B > 0$, то

$S_{AB} < 0$, а такое быть не может. Поэтому $V_B = 28$ не

подходит, т.к. $V_M > V_B$.

2) $V_B = 21$, тогда $V_M = 49 - 21 = 28$

$S_{AB} = \frac{21 \cdot 28}{28 - 21} = \frac{21 \cdot 28}{7} = 4 \cdot 21 = 84 \Rightarrow$ расстояние между пунктами A и B = 84 км

Ответ: 84 км.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

стр. 5

Пусть V_m — скорость, с которой мотоциклист ехал на
встречу.

Пусть скорость, с которой ехал мотоциклист — V_m .
Пусть скорость, с которой ехал велосипедист — V_B .

Пусть S_{AB} — расстояние между пунктами А и В.

Запишем уравнения, которые следуют из условия (без
единиц измерения, мы поставим их заранее переводим то, что нужно,
чтобы ответ получился в км, а скорости в км/ч).

П.О. $36 \text{ км} = \frac{36}{60} \text{ ч} = \frac{6}{10} \text{ ч} = \frac{3}{5} \text{ ч}$

$$\begin{cases} \frac{S_{AB}}{V_m} + 1 = \frac{S_{AB}}{V_B} & (1) \text{ — т.к. мотоциклист прибыл на 1 ч раньше} \\ \frac{S_{AB}}{V_m + 7} + \frac{3}{5} = \frac{S_{AB}}{V_B + 7} & (2) \text{ — т.к. если увеличить их скорости на} \\ & \text{7 км/ч, то велосипедист} \\ & \text{приехал бы позже, чем мотоциклист} \\ & \text{на } \frac{3}{5} \text{ ч.} \\ \left(\frac{S_{AB}}{V_m} + 1 \right) V_m - \frac{S_{AB}}{V_B} V_B = 49 & (3) \text{ — т.к. если бы велосипедист ехал} \\ & \text{со своей скоростью в течение этого} \\ & \text{времени, что потребовалось мотоциклисту,} \\ & \text{то проехал бы 49 км больше} \end{cases}$$

Выразим S_{AB} из (1):

$$S_{AB} \left(\frac{1}{V_B} - \frac{1}{V_m} \right) = 1$$

$$S_{AB} \left(\frac{V_m - V_B}{V_m V_B} \right) = 1$$

$$S_{AB} = \frac{V_m V_B}{V_m - V_B}$$

Теперь подставим получ. выражение в (3):

$$\left(\frac{V_B}{V_m - V_B} + 1 \right) V_m - \frac{V_B}{V_m - V_B} V_B = 49$$

$$\frac{V_B V_m}{V_m - V_B} + V_m - \frac{V_B^2}{V_m - V_B} = 49$$

$$\frac{V_B V_m + V_m^2 - V_B V_m - V_B^2}{V_m - V_B} = 49$$

$$\frac{(V_m - V_B)(V_m + V_B)}{V_m - V_B} = 49$$

$$V_m = 49 - V_B$$

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

стр. 13

Сумма корней DF графика функции $f(x)$ и $g(x)$:

$$x_1 + x_2 \quad a x^2 + b x + c = 0 \quad \text{по теореме Виета}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{2a}$$

$$D \& B. (\sqrt{5}xy - Dy)^2 + DF^2 - \sqrt{2}(\sqrt{5}xy - Dy)DF = 2xy^2 +$$

$$+ (\sqrt{\frac{5}{2}}DF - xy)^2 - \sqrt{2}Ex(\sqrt{\frac{5}{2}}DF - xy)$$

$$(\sqrt{5}xy - Dy)^2 + DF^2 - \sqrt{10}xy + \sqrt{2}DyDF = 2xy^2 +$$

$$+ \frac{5}{2}DF^2 - 2\sqrt{\frac{5}{2}}DFxy + xy^2 - \sqrt{5}ExDF + \sqrt{2}Exxy$$

$$- (\sqrt{5}xy - Dy)^2 + \sqrt{10}xy + 2xy^2 + xy^2 + \sqrt{2}Exxy +$$

$$+ \frac{5}{2}DF^2 + 1.5DF^2 - 2\sqrt{\frac{5}{2}}DFxy - \sqrt{2}DyDF - \sqrt{5}ExDF = 0$$

$$- (\sqrt{5}xy - Dy)^2 + \sqrt{10}xy + 2xy^2 + xy^2 + \sqrt{2}Exxy +$$

$$+ 1.5DF^2 + DF(-2\sqrt{\frac{5}{2}}xy + \sqrt{2}Dy + \sqrt{5}Ex) = 0$$

$$-\frac{b}{2a} = \frac{2\sqrt{\frac{5}{2}}xy + \sqrt{2}Dy + \sqrt{5}Ex}{3} = \frac{2\sqrt{\frac{5}{2}}xy + \sqrt{2}Dy + \sqrt{10}xy}{3}$$

$$= \frac{2\sqrt{10}xy + \sqrt{2}Dy}{3}$$

Приведем к виду (2):

$$1.5DF^2 - Dy - \sqrt{2}DyDF = 0$$

$$-\frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{2}Dy}{3}$$

$$\frac{\sqrt{2}Dy}{3} = \frac{2\sqrt{10}xy + \sqrt{2}Dy}{3}$$

$$\sqrt{2}Dy = 2\sqrt{10}xy + \sqrt{2}Dy$$

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



стр. 11

$$\angle EXY = 180^\circ - \angle EXF = 180^\circ - 45^\circ - 135^\circ$$

Затем м. пос. гл. $\triangle EXY$:

$$EX = \sqrt{2}XY$$

$$EY^2 = EX^2 + XY^2 - 2 \cos 135^\circ \cdot EX \cdot XY$$

$$EY^2 = EX^2 + XY^2 + 2 \cos 45^\circ \cdot EX \cdot XY$$

$$EY^2 = EX^2 + 2XY^2 + XY^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}XY \cdot XY = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}XY \cdot XY$$

$$EY^2 = 2XY^2 + XY^2 + 2XY^2 = 5XY^2$$

$$EY^2 = 5XY^2$$

$$EY = \sqrt{5}XY$$

$EA \parallel YC$, $\angle ADE = \angle CDY \Rightarrow \triangle EDA \sim \triangle YDC$ по

3 угла, м.п. $EA \parallel YC$, м.п. $\angle DYC = \angle DEA$ и $\angle EAD = \angle DCY$.

П.о. $\frac{ED}{DY} = \frac{AD}{DC}$, м.п. чтобы найти $\frac{AD}{DC}$ можно найти $\frac{ED}{DY}$.

$$ED + DY = EY$$

$$ED + DY = \sqrt{5}XY$$

Затем

$$\triangle EYX \sim \triangle FYD$$

по 3 угла,

$\angle EXY = \angle FXY$, м.п.

от бис. и смеж.

и углы

$\angle EYF$ - общий. П.о.

$$\frac{EY}{FY} = \frac{EX}{DF}$$

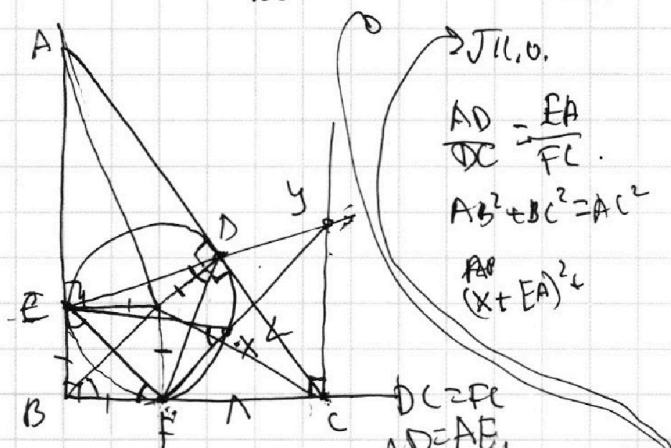
$$\frac{ED + DY}{FY} = \frac{EX}{DF} = \frac{\sqrt{5}XY}{DF}$$

$$\frac{FY}{DF} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

П.пос. гл. $\triangle EFX$:

$$EF^2 = EX^2 + FX^2 - 2 \cos 45^\circ \cdot EX \cdot FX$$

$$EF^2 = 2XY^2 + FX^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}XY \cdot FX$$



П.о.
 $\frac{AD}{DC} = \frac{EA}{FC}$
 $AB^2 + BC^2 = AC^2$
 $AB^2 = (X + EA)^2$

м.п. чтобы найти $\frac{AD}{DC}$ можно найти $\frac{EA}{FC}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ил. ное. где $\triangle F D Y$; $\text{ср. } 12$ $FS^2 = DF^2 + DY^2 - 2 \cos 135^\circ \cdot DY \cdot DF$

$$FS^2 = DF^2 + DY^2 + \sqrt{2} \cdot DY \cdot DF$$

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} DF\right)^2 = DF^2 + DY^2 + \sqrt{2} \cdot DY \cdot DF$$

$$2,5 DF^2 = DF^2 + DY^2 + \sqrt{2} \cdot DY \cdot DF$$

$$1,5 DF^2 = DY^2 + \sqrt{2} \cdot DY \cdot DF$$

Ил. ное. где $\triangle E D F$:

$$EF^2 = ED^2 + DF^2 - 2 \cos 45^\circ \cdot ED \cdot DF$$

Ил. ное. где $\triangle E X F$:

$$EF^2 = EX^2 + FX^2 - 2 \cos 45^\circ \cdot EX \cdot FX$$

$$\begin{cases} ED^2 + DF^2 - 2 \cos 45^\circ \cdot ED \cdot DF = EX^2 + FX^2 - 2 \cos 45^\circ \cdot EX \cdot FX \\ 1,5 DF^2 = DY + \sqrt{2} \cdot DY \cdot DF \\ ED + DY = \sqrt{5} \cdot XY \end{cases}$$

$$ED^2 + DF^2 - \sqrt{2} \cdot ED \cdot DF = 2 \cdot XY^2 + (FS - XY)^2 - 2 \cos 45^\circ \cdot EX \cdot FX$$

$$\begin{cases} ED^2 + DF^2 - \sqrt{2} \cdot ED \cdot DF = 2 \cdot XY^2 + \left(\sqrt{\frac{5}{2}} DF - XY\right)^2 - 2 \cos 45^\circ \cdot EX \cdot \left(\sqrt{\frac{5}{2}} DF - XY\right) \\ 1,5 DF^2 = DY + \sqrt{2} \cdot DY \cdot DF \end{cases}$$

$$1,5 DF^2 = DY + \sqrt{2} \cdot DY \cdot DF$$

$$\left((\sqrt{5} \cdot XY - DY)^2 + DF^2 - \sqrt{2} (\sqrt{5} \cdot XY - DY) \cdot DF = 2 \cdot XY^2 + \left(\sqrt{\frac{5}{2}} DF - XY\right)^2 - \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{5}{2}} DF - XY\right) \cdot EX\right)$$

$$1,5 DF^2 = DY + \sqrt{2} \cdot DY \cdot DF \quad (7)$$

$$\left(\sqrt{\frac{5}{2}} DF - XY\right) \cdot EX$$

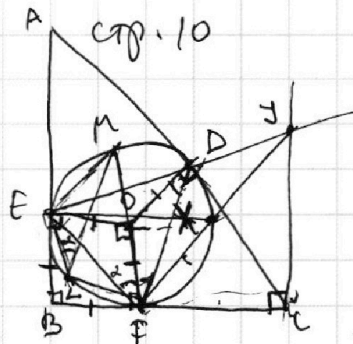
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle x = \sqrt{2} \angle y$$

0-угол более остр.

$$\angle FDY + \angle EDF = 180^\circ, \text{ т.к.}$$

они смежные.

$\angle EDF$ — вписанный, опирается на дугу $\widehat{EF}$.

$$\angle EFD = 180^\circ - \angle EDF, \text{ т.к.}$$

Вписан $\angle EFM$ на дуге $\widehat{EF}$ меньше $\angle EFD$ опирается на меньшую дугу $\widehat{EF}$.

Проведем FO до пересечения с окружностью в точке M .

$\angle FLM = 90^\circ$, т.к. FM — диаметр. $\angle ELM = \angle LFM = \alpha$, т.к. они опираются на одну дугу. $\angle EFC = \alpha + 90^\circ$, т.к. $OF \perp BC$, т.к. BC — хорда, опр. в точке F . $\angle ELF = \alpha + 90^\circ$, т.к. $\angle ELF = \angle ELM + \angle MCF$, т.к. $\angle EFC = \angle ELF$, при этом $\angle ELF = 180^\circ - \angle EDF$, т.к. $ELFD$ — впис. четырехугольник. Тогда, так

$$\angle FDY = \angle EFC, \text{ значит } \angle EFB = \angle EDF.$$

Т.к. $OE \perp AB$, $OF \perp BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, то $\angle OFB$ — прямоугольный. Т.к. $EO = OF$ то $\angle OFB$ — равнобедренный. Тогда $EB = BF$. Тогда

$$\angle EFB = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ. \text{ Тогда } \angle EDF = 45^\circ.$$

$\angle EXF$ опирается на ту же дугу, что и $\angle EDF$ — впис. и

$$\angle EXF = \angle EDF = 45^\circ.$$

$\angle EXF = \angle EDF$ — впис. и опираются на одну дугу. $\angle EXF = \angle DFX$, т.к. они впис. и опираются на одну дугу.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} =$$

Черновик

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$$\begin{cases} 8zy + xz - 15xy = 0 \\ 5x - y = 3z \end{cases}$$

$$z(8y + x) = 15xy$$

$$z = \frac{5x - y}{3}$$

$$\frac{5x - y}{3} = \frac{15xy}{8y + x}$$

$$(8y + x)(5x - y) = 45xy$$

$$40xy - 8y^2 + 5x^2 - 5xy = 45xy$$

$$5x^2 - 8y^2 = 6xy$$

$$5x^2 - 8y^2 - 6xy = 0$$

$$D = 36y^2 + 4 \cdot 5 \cdot 8y^2 = 196y^2$$

$$x_1 = \frac{6y - 14y}{2 \cdot 5} = -0.8y$$

$$x_2 = \frac{6y + 14y}{10} = 2y$$

$$1) x = 2y$$

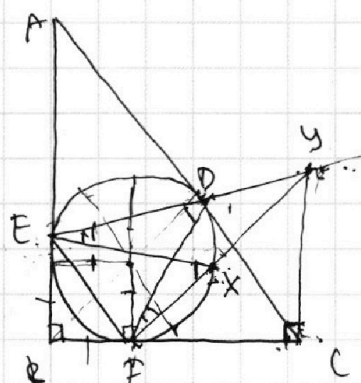
$$5x - 10y - y = 3z$$

$$9y = 3z$$

$$z = 3y$$

$$\frac{8}{2y} + \frac{1}{y} = \frac{8}{2y} + \frac{1}{y} = \frac{15}{3y}$$

$$\frac{4 + 1}{5} = \frac{5}{5} = 1$$



$$EX = \sqrt{2}xy$$

$$EY = \sqrt{x^2 + 2xy + y^2} = \sqrt{(x+y)^2} = x+y$$

$$y \geq 0$$

$$EY^2 = 5x^2$$

$$EY = \sqrt{5}x$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - 4}{y^2 + 3z^2} =$$

$$= \frac{25 \cdot 4y^2 - y^2 - 9y^2}{y^2 + 3 \cdot 9y^2} =$$

$$= \frac{100y^2 - 10y^2}{28y^2} = \frac{90}{28} = \frac{45}{14}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2+x+1} = 5-6x$$

О.О.:

$$\begin{cases} 3x^2-5x+6 \geq 0 \\ 3x^2+x+1 \geq 0 \end{cases}$$

Область определения

, т.к. выражения под корнем

Возведем обе части в квадрат, при этом

Возведем обе части в квадрат.

$$3x^2-5x+6 + 3x^2+x+1 - 2\sqrt{3x^2-5x+6} \cdot \sqrt{3x^2+x+1} = (5-6x)^2$$

$$6x^2-4x+7 - 2\sqrt{3x^2-5x+6} \cdot \sqrt{3x^2+x+1} = 25+36x^2-60x$$

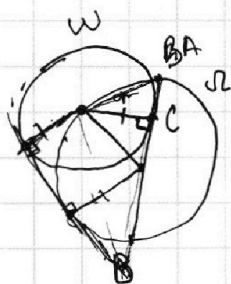
$$-2\sqrt{3x^2-5x+6} \cdot \sqrt{3x^2+x+1} = 18+30x^2-56x$$

$$\sqrt{3x^2-5x+6} \cdot \sqrt{3x^2+x+1} = 28x-15x^2-9$$

О.О.:

$$28x-15x^2-9 \geq 0$$

Велосипедист
хрушка погна мотоциклиста



AC=1
BC=25

$$\begin{cases} 5x-y=37 \\ \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{2} \end{cases}$$

$$\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$$

$$\frac{15zx+32y-z^2}{y^2+3z^2}$$

$$\frac{32(5x+y)-z^2}{y^2+3z^2}$$

$$(5x-y)(5x+y)-z^2$$

$$\frac{8y+x}{xy} = \frac{15}{2}$$

$$\frac{8yz+xz-15xy}{xyz} = 0$$

$$\frac{8yz+xz-15xy}{xyz} = 0$$

$$\frac{15xy}{8y+x}$$

$$2(8y+x) = 15xy$$

$$8yz+xz=15xy, z = \frac{15xy}{8y+x}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



B

$$t_M + t_4 = t_B$$

$$(t_M + t_4) V_M - t_M \cdot V_B = 49 \text{ km}$$

$$\frac{V_M + 7}{V_B + 7}$$

$$\cdot \left(\frac{S_{AB}}{V_M + 7} \right) + \frac{36}{60} = \frac{S_{AB}}{V_B + 7}$$

$$\begin{cases} \frac{S_{AB}}{V_M} + t_4 = \frac{S_{AB}}{V_B} \\ \frac{S_{AB}}{V_M + 7} + \frac{36}{60} t_4 = \frac{S_{AB}}{V_B + 7} \end{cases}$$

Упрощение

$$\left(\frac{S_{AB}}{V_M} + t_4 \right) V_M - t_4 \frac{S_{AB}}{V_M} \cdot V_B = 49 \text{ km}$$

~~SAB~~ SAB?

$$S_{AB} \left(\frac{1}{V_M} - \frac{1}{V_B} \right) = -t_4$$

$$\frac{V_B V_M}{V_M - V_B} + V_M - \frac{V_B^2}{V_M - V_B} = 49$$

$$S_{AB} = \frac{1}{\frac{1}{V_B} - \frac{1}{V_M}} = \frac{V_B V_M}{V_M - V_B}$$

$$\frac{V_B V_M - V_B^2 + V_M^2 - V_B V_M}{V_M - V_B} = 49$$

$$\frac{(V_B V_M) (V_M - V_B)}{V_M + 7}$$

$$+ \frac{36}{60} \cdot \frac{3}{5} = \frac{V_B V_M}{(V_M - V_B) (V_B + 7)}$$

$$\frac{(V_M - V_B) (V_M + V_B)}{V_M - V_B} = 49$$

$$\left(\frac{V_B}{V_M - V_B} + 1 \right) V_M - \frac{V_B V_B}{V_M - V_B}$$

$$V_M + V_B = 49$$

$$V_M = V_B - 49$$



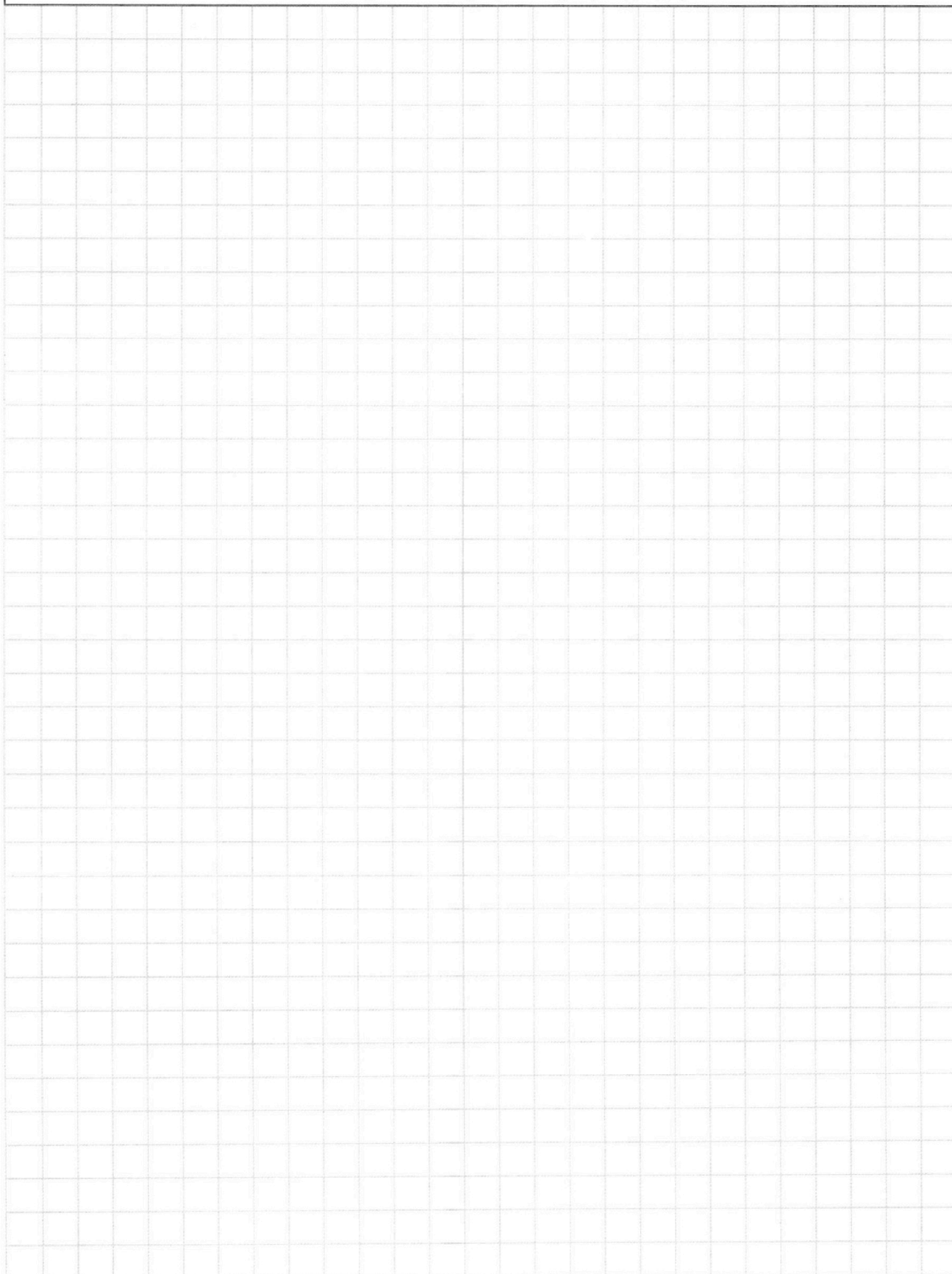
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~$$\sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2+x+1} = 5-6x$$~~

ЧЕРНОВИК

и ЭТОЕ
Страница

~~$$\sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2-5x+6+6x-5} = 5-6x$$~~

~~$$3x^2-5x+6 - (3x^2-5x+6+6x-5) = (5-6x)^2$$~~

~~$$3x^2-5x+6 + 3x^2-5x+6+6x-5 = (5-6x)^2 + 2\sqrt{(3x^2-5x+6)(3x^2-5x+6+6x-5)}$$~~

~~$$6x^2-10x+12+6x-5 = (5-6x)^2 + 2\sqrt{\dots}$$~~

~~$$6x^2-10x+7-4x = 36x^2+25-60x+2\sqrt{\dots}$$~~

~~$$-56x+7-25 = -30x^2-20\sqrt{\dots}$$~~

~~$$3x^2-5x+6 + 3x^2+x+1 - 2\sqrt{(3x^2-5x+6)(3x^2+x+1)} = (5-6x)^2$$~~

~~$$6x^2-4x+7 - 2\sqrt{(3x^2-5x+6)(3x^2+x+1)} = 25+36x^2-60x$$~~

~~$$18+30x^2-56x =$$~~

~~$$-2\sqrt{\dots}$$~~

~~$$56x \quad 28x-15x^2-9 = 2\sqrt{(3x^2-5x+6)(3x^2+x+1)}$$~~

~~$$28x-15x^2-9 = \sqrt{\frac{9x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 15x^3 - 5x^2 - 5x + 18x^2 + 6x + 6}{6x+6}}$$~~

~~$$28x-15x^2-9 = \sqrt{-10x^2-12x^3+9x^4+x+6}$$~~

~~$$28x-15x^2-9 = \sqrt{-3x^3(3x-4)+x(1-10x)+6}$$~~

~~$$(28x-15x^2-9)^2 = -10x$$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2+x+1} = 5-6x$$

Пусть z замени:

Пусть $3x^2-5x+6=t, t \geq 0$, ~~$3x^2+x+1=t$~~

Пусть $5-6x=a$, ~~$3x^2+x+1=t$~~

Тогда: $\sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2-5x+6+6x-5} = 5-6x$, ~~это то~~

$$\sqrt{t} - \sqrt{t-a} = a$$

Возведем обе части в квадрат, при этом нужно помнить,
что $\begin{cases} t \geq 0 \\ t-a \geq 0 \end{cases}$

Таким образом $t + t - a - 2\sqrt{t}\sqrt{t-a} = a^2$

$$-2\sqrt{t}\sqrt{t-a} = a^2 + a - 2t$$

$$2\sqrt{t}\sqrt{t-a} = 2t - a^2 - a$$

$$2t - a^2 - a \geq 0$$

$$4t(t-a) = (2t - a^2 - a)^2$$

$$4t^2 - 4ta = 4t^2 + (a^2+a)^2 - 2 \cdot 2t \cdot (a^2+a)$$

$$4t^2 - 4t^2 + 4ta + a^4 + a^2 + 2a^2a - 4ta^2 - 4at = 0$$

$$4t^3 + a^4 + a^2 + 2a^3 - 4ta^2 = 0$$

с этой стороны

Черновик