



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже ~~велосипедиста~~ ^{мотоциклиста}. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

$$\begin{array}{r} 14+19+23 \\ 33 \overline{) 56} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13+17+42 \\ 30 \overline{) 72} \end{array}$$

$$ab : 3^{14} \cdot 7^{13}$$

$$bc : 3^{19} \cdot 7^{17}$$

$$ac : 3^{23} \cdot 7^{42}$$

по условию, тогда:

$$ab \cdot bc \cdot ac : 3^{14+19+23} \cdot 7^{13+17+42}$$

$$a^2 b^2 c^2 : 3^{56} \cdot 7^{12}$$

$$abc : 3^{28} \cdot 7^{36}$$

Наименьшее значение произведения abc мы получили, если abc не содержит других простых множителей, кроме 3 и 7, тогда наименьшее значение abc , удовлетворяющее условию:

$$\underline{3^{28} \cdot 7^{36}}$$

$$\text{Ответ: } 3^{28} \cdot 7^{36}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача 2.

$\frac{a}{b}$ - несократимая дробь $\Rightarrow a$ и b - взаимно простые числа

$$a \in \mathbb{N}; b \in \mathbb{N}$$

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2} \quad m-?$$

$\Downarrow$
Необходимо найти

$$\text{НОД}(a+b, a^2-9ab+b^2)$$

$$\frac{a+b}{(a+b)(a-b)-9ab}$$

$$\frac{a^2-9ab+b^2}{a+b} = \frac{(a+b)(a-b)-9ab}{a+b} = a-b - \frac{9ab}{a+b}$$

Предположим, что остаток от деления a на m равен x , а остаток от деления b на m равен y , если

$$a+b : m \Rightarrow x+y : m, \text{ т.к. } x < m; y < m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+y = m$$

$$a^2-9ab+b^2 : m \Rightarrow x^2-9xy+y^2 : m$$

$$\Downarrow$$

$$x^2-2xy+y^2-7xy : m$$

$$\cancel{x^2-2xy+y^2}$$

$$x^2+2xy+y^2-11xy : m$$

$$(x+y)^2-11xy : m$$

$$m^2-11xy : m \Rightarrow 11xy : m$$

$$\text{или тогда } x : m \Rightarrow y : m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11 : m \Rightarrow m=1$$

$$\text{или } m=11.$$

наибольшее
возможное
 $m=11$.

Ответ: 11.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~Задача 5 (преобразование)~~

$$216x^4 - 828x^3 + 1038x^2 - 505x + 75 = 0$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 828 \\ \hline 505 \\ 1333 \end{array} \quad \begin{array}{r} 11 \\ + 1038 \\ \hline 75 \\ 119 \end{array}$$

Задача 3.

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

$$\sqrt{3x^2 + x - 6x + 1 + 5} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

$$\sqrt{(3x^2 + x + 1) + (5 - 6x)} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x$$

ОДЗ: $3x^2 - 5x + 6 \geq 0$; $3x^2 + x + 1 \geq 0$

Положим

$$3x^2 + x + 1 = y$$

$$5 - 6x = z$$

Тогда:

$$\sqrt{y+z} - \sqrt{y} = z$$

$$\sqrt{y+z} = z + \sqrt{y} \quad (\text{обе части в квадрате})$$

$$y+z = z^2 + 2z\sqrt{y} + y$$

$$z - z^2 = 2z\sqrt{y} \quad (\text{обе части в квадрате})$$

$$z(1-z) = 2z\sqrt{y}$$

$$1-z = 2\sqrt{y}$$

$$1 - 2z + z^2 = 4y \quad \left. \begin{array}{l} \text{обе части в} \\ \text{квадрате} \end{array} \right\}$$

$$1 - 2(5-6x) + (5-6x)^2 = 4(3x^2 + x + 1)$$

$$1 - 10 + 12x + 25 - 60x + 36x^2 = 12x^2 + 4x + 4$$

$$12 - 52x + 24x^2 = 0 \quad | :2$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ 185 \\ 40 \\ 180 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$24x^2 - 52x + 12 = 0 \quad | :2$$

$$12x^2 - 26x + 6 = 0 \quad | :2$$

$$6x^2 - 13x + 3 = 0$$

$$D = 13^2 - 4 \cdot 6 \cdot 3 = 97$$

$\underbrace{\quad}_{169} \quad \underbrace{\quad}_{24} \quad \underbrace{\quad}_{72}$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{97}}{12}$$

$$\text{Ответ: } \frac{13 + \sqrt{97}}{12} ; \frac{13 - \sqrt{97}}{12}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 2

a, b - взаимно простые числа
 $a \in \mathbb{N}; b \in \mathbb{N}$
 $m = ?$

$$\frac{a+b}{a^2 - 9ab + b^2}$$

Задача 4.

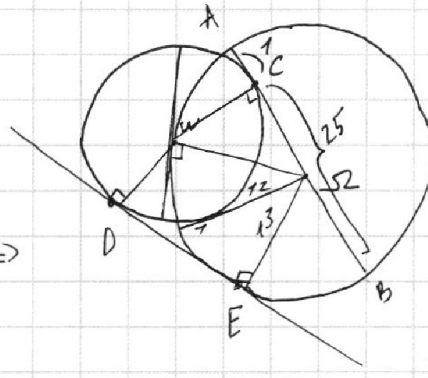
Дано: $AC = 1$
 $BC = 25$
 $DE = ?$

Условия:

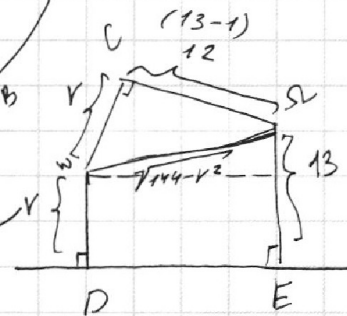
$$AB = 1 + 25 = 26 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{26}{2} = 13$$

радиус
окружности Ω

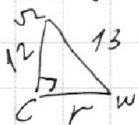


радиус
окружности
 ω



М.к. в ~~А~~ лежит
на контуре окружности
 $\Omega \Rightarrow$ геру точку
и мы можем
провести касательную
к $\Omega \Rightarrow$

$\Rightarrow$ проведем ΔWCE :



$$r = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$$

По теореме Пифагора:

$$DE = \sqrt{D\Omega^2 - E\Omega^2} =$$

$$= \sqrt{144 - r^2 - (13 - r)^2} =$$

$$= \sqrt{144 - r^2 - 169 + 26r - r^2} = \sqrt{26r - 2r^2 - 25} =$$

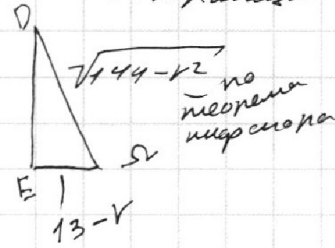
$$= \sqrt{26 \cdot 5 - 2 \cdot 25 - 25} = \sqrt{130 - 50 - 25} =$$

$$= \sqrt{130 - 75} = \sqrt{55}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ + 26 \\ \hline 5 \\ \hline 130 \\ 130 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 90 \\ 130 \\ 75 \\ \hline 55 \end{array}$$

Ответ: $\sqrt{55}$!

$\omega \Omega DE$ - трапеция



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \frac{x}{z} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{2}{3} z$$

$$5 \cdot \frac{2}{3} z - 3z = y$$

$$\left(\frac{10}{3} - 3\right) z = y$$

$$\frac{1}{3} z = y$$

$$25 \cdot \frac{4}{9} z^2 - \frac{1}{9} z^2 - z^2 =$$

$$\frac{1}{9} z^2 + 3z^2$$

$$= \frac{\frac{100}{9} - \frac{1}{9} - 1}{\frac{1}{9} + 3} = \frac{\frac{100-1-9}{9}}{\frac{1}{9} + \frac{27}{9}} =$$

$$= \frac{90}{28} = 3 \frac{6}{28}$$

$$2) \frac{x}{z} = \frac{42}{150} = \frac{12}{25}$$

$$x = \frac{12}{25} z$$

$$5 \cdot \frac{12}{25} z - 3z = y$$

$$\frac{12}{5} z - 3z = y$$

$$-\frac{3}{5} z = y$$

$$y = -\frac{3}{5} z$$

$$25 \cdot \frac{144}{25^2} z^2 - \frac{9}{25} z^2 - z^2 =$$

$$\frac{9}{25} z^2 + 3z^2$$

$$= \left(\frac{144}{25} - \frac{9}{25} - \frac{25}{25} \right) z^2 =$$

$$\left(\frac{9}{25} + \frac{45}{25} \right) z^2$$

$$= \frac{144-9-25}{9+45} = \frac{110}{84} = 1 \frac{26}{84}$$

$$3 \frac{6}{28} > 1 \frac{26}{84} \Rightarrow$$

наименьшее

выражение

$$1 \frac{26}{84} =$$

$$= 1 \frac{13}{42}$$

Ответ: $1 \frac{13}{42}$

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:


МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

$$5x - y = 3z \quad ; \quad \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 15 \\ \times 5 \\ \hline 75 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ 15 \\ \times 3 \\ \hline 45 \end{array}$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} \quad \text{min?}$$

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{5x-32} = \frac{15}{2}$$

$$\frac{p(5x-3z) + x}{x(5x-3z)} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{40x - 24z + x}{5x^2 - 3zx} = \frac{15}{z}$$

$$\frac{41x - 24z}{5x^2 - 3zx} = \frac{15}{z}$$

$$41XZ - 24Z^2 = 15.5X^2 - 15.3ZX$$

$$\underline{(41+45)} \cancel{2}x - 24 \overset{45}{2}^2 - 75 \overset{45}{x}^2 = 0$$

$$75x^2 - 86zx + 24z^2 = 0 \quad | : z^2$$

$$75\left(\frac{x}{z}\right)^2 - 86\frac{x}{z} + 24 = 0$$

$$D = 86^2 - 4 \cdot 75 \cdot 24 = 7396 - 7200 = 196 = 14^2$$

$$\frac{\bar{x}}{f} = \frac{86 \pm 14}{2.75}$$

$$\frac{9 \cdot 2}{25} = \frac{12}{25}$$

$$\begin{array}{r} 86 \overset{2}{=} 4 \\ 34 \\ \times 86 \\ \hline 41516 \\ 688 \\ \hline 7396 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ \times 75 \\ \hline 24 \\ 7300 \\ 150 \\ \hline 1800 + 56 \\ 4 \\ \hline 7200 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ 14 \\ \times 14 \\ \hline 56 \\ 14 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ + 3 \\ \hline 31 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 45 \\ \hline 150 \end{array} \quad \begin{array}{r} - 86 \\ 14 \\ \hline 72 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ + 3 \\ \hline 28 \end{array}$$

$$\frac{\sum x}{n} = \frac{100}{150}$$

$$\frac{\sum x}{n} = \frac{72}{150}$$

$$\begin{array}{r} 910 \\ - 110 \\ \hline 800 \\ \hline 28 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(490 - 336 + 42) v_m + (6 - 10) v_m^2 - 2352 = 0$$

$$-4v_m^2 + 196v_m - 2352 = 0 \quad | : (-4)$$

$$v_m^2 - 49v_m + 588 = 0$$

$$D = 49^2 - 4 \cdot 588 =$$

$$= 2401 - 2352 = 49$$

$$v_m = \frac{49 \pm 7}{2}$$

$$v_{m1} = \frac{49 - 7}{2} = \frac{42}{2} = 21 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right)$$

$$v_{m2} = \frac{56}{2} = 28 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right)$$

Для v_{m1} : $v_B = 49 - 21 = 28 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right) \Rightarrow v_B > v_m$ — противостоит условию

Для v_{m2} : $v_B = 49 - 28 = 21 \left(\frac{\text{км}}{\text{ч}} \right) \Rightarrow v_m > v_B$.

$$\begin{array}{r} \times 21 \\ 4 \\ \hline 84 \end{array}$$

$$S = \frac{v_B v_m}{v_m - v_B} = \frac{28 \cdot 21}{28 - 21} = \frac{28 \cdot 21}{7} = 4 \cdot 21 = 84 \text{ (км)}$$

Ответ: 84 км.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

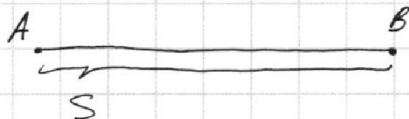
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.



v_B - скорость велосипедиста
 v_M - скорость мотоциклиста
 S - ?

По условию:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{S}{v_M} + 1 &= \frac{S}{v_B} \quad (1) \\ \frac{S}{v_M} \cdot v_B + 49 &= \frac{S}{v_B} \cdot v_M \quad (2) \\ \frac{S}{v_M + 4} + \frac{36}{60} &= \frac{S}{v_B + 4} \quad (3) \end{aligned} \right.$$

1 час
49 км
4 км
36 мин

Из (1):

$$S \left(\frac{1}{v_M} - \frac{1}{v_B} \right) = -1$$

$$S = \frac{1}{\frac{1}{v_B} - \frac{1}{v_M}}$$

$$S = \frac{1}{\frac{v_M - v_B}{v_B v_M}}$$

$$S = \frac{v_B v_M}{v_M - v_B} \quad (4)$$

Из (2) и (4):

$$\frac{v_B}{v_M} \cdot \frac{v_B v_M}{v_M - v_B} + 49 = \frac{v_M}{v_B} \cdot \frac{v_B v_M}{v_M - v_B}$$

$$\frac{v_B^2}{v_M - v_B} + 49 = \frac{v_M^2}{v_M - v_B} \quad | \cdot (v_M - v_B)$$

$$v_B^2 + 49(v_M - v_B) = v_M^2$$

$$v_B^2 + 49(v_M - v_B) - v_M^2 = 0$$

$$(v_B - v_M)(v_B + v_M) + 49(v_M - v_B) = 0$$

$$(v_B - v_M)(v_B + v_M) - 49(v_B - v_M) = 0$$

$$(v_B - v_M)(v_B + v_M - 49) = 0$$

$$v_B = v_M \quad \text{не удовл. усл.} \quad \text{или} \quad \boxed{v_B = 49 - v_M} \quad (5)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ (3), (4), (5):

$$\frac{S}{v_m + 7} + \frac{36}{60} = \frac{S}{v_b + 7}$$

$$\frac{v_b v_m}{v_m - v_b} \cdot \frac{1}{(v_m + 7)} + \frac{36}{60} = \frac{v_b v_m}{v_m - v_b} \cdot \frac{1}{(v_b + 7)}$$

$$\frac{v_b v_m}{(v_m - v_b)(v_m + 7)} - \frac{v_b v_m}{(v_m - v_b)(v_b + 7)} = -\frac{36}{60}$$

$$\frac{v_b v_m}{v_m - v_b} \left(\frac{1}{v_m + 7} - \frac{1}{v_b + 7} \right) = -\frac{36}{60}$$

$$\frac{v_b v_m}{v_m - v_b} \left(\frac{v_b + 7 - v_m - 7}{(v_m + 7)(v_b + 7)} \right) = -\frac{36}{60}$$

$$\frac{v_b v_m (v_b - v_m)}{(v_m - v_b)(v_m + 7)(v_b + 7)} = -\frac{36}{60}$$

$$\frac{-v_b v_m}{(v_m + 7)(v_b + 7)} = -\frac{6}{10}$$

$$10 v_b v_m = 6 (v_m + 7)(v_b + 7)$$

$$10 (49 - v_m) v_m = 6 (v_m + 7) (49 - v_m + 7)$$

$$10 \cdot (49 v_m - v_m^2) = (6 v_m + 42) (56 - v_m)$$

$$490 v_m - 10 v_m^2 = 6 \cdot 56 v_m - 6 v_m^2 + 42 \cdot 56 - 42 v_m$$

$$\begin{array}{r} \times 56 \\ 336 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 56 \\ 42 \\ \hline + 112 \\ 224 \\ \hline + 112 \\ 224 \\ \hline + 112 \\ 224 \\ \hline + 112 \\ 224 \\ \hline \end{array}$$

$$\underline{490 v_m - 10 v_m^2} = \underline{336 v_m - 6 v_m^2} + \underline{2352 - 42 v_m}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

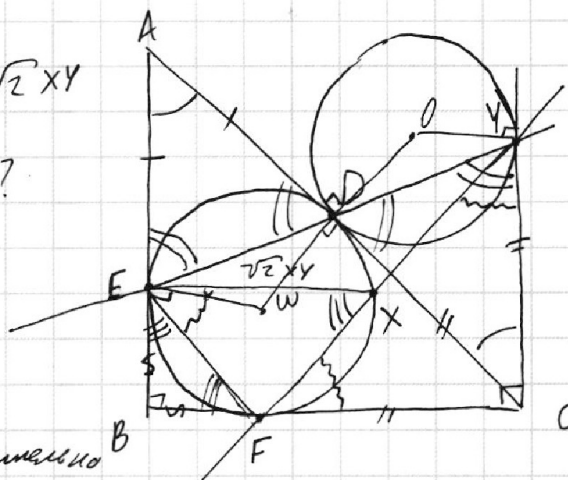
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 7.

Дано: $EX = \sqrt{2} XY$

$AD:DC = ?$



Степень точки Y, относительно
окружности ω равна: $DX \cdot EY$
 $DY \cdot YE = YX \cdot YF$ (1)

т.к. окружность ω вписана в $\triangle ABC$: $\angle DAE; \angle DCF; \angle EBF \Rightarrow$

$\Rightarrow AE = AD; DC = FC; BE = EF.$

$AB \parallel YC$, т.к. $AB \perp BC; YC \perp BC \Rightarrow \angle DAE = \angle ACY$, как
внутренние накрест лежащие, при $AB \parallel YC$
 $\angle ADE = \angle YDC$, как вертикальные

$\Rightarrow \triangle EAD \sim \triangle DCY$ (по двум углам) $\Rightarrow DC = CY$

т.к. $DC = CY \Rightarrow$ окружность, вписанная в $\triangle DCY$ будет
касаться сторон угла в точках D и Y.

~~Если тангенс окружности с центром
в точке O касаться окружности
касательная в которой она будет вписана $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ т.к. окружность ω и $\odot$~~

из (1): $DY(DY + DE) = XY(XY + XF)$, где $\frac{DE}{DY} = \frac{AD}{DC}$

$XF = XE = \sqrt{2} XY$
 $DY^2 + DY \cdot DE = XY^2 + \sqrt{2} XY^2$

$\angle XEF = \angle XFC$ (углы между хордой и
касательной)

т.к. $\triangle BEF$ - $\triangle$ $\Rightarrow \angle FEB = \angle EFB = \angle EXF$ (по сумме углов $\triangle$)

$\frac{AD}{DC} = 1$

Ответ: 1

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

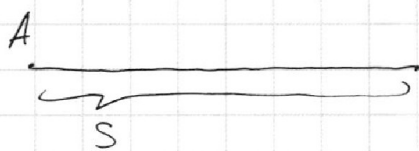
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.



v_m - скорость мотоциклиста
 v_b - скорость велосипедиста

$S = ?$

Из условия:

$$\frac{S}{v_m} + 1 = \frac{S}{v_b}$$

Получим систему из 3-х уравнений с тремя неизвестными:

$$\frac{S}{v_m + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}} + \frac{36}{60} = \frac{S}{v_b + 7 \frac{\text{км}}{\text{ч}}}$$

$$49 \text{ км} + \frac{S}{v_m} \cdot v_b = \frac{S}{v_b} \cdot v_m$$

$$\frac{S}{v_m} + 1 = \frac{S}{v_b} \quad (1)$$

$$\frac{S}{v_m + 7} + \frac{36}{60} = \frac{S}{v_b + 7} \quad (2)$$

$$\frac{S}{v_m} \cdot v_b + 49 = \frac{S}{v_b} \cdot v_m \quad (3)$$

Из (1):

$$\frac{S}{v_m} - \frac{S}{v_b} = -1$$

$$S \left(\frac{1}{v_m} - \frac{1}{v_b} \right) = -1$$

$$S = \frac{1}{\frac{1}{v_b} - \frac{1}{v_m}}$$

$$S = \frac{1}{\frac{v_m - v_b}{v_b v_m}}$$

$$S = \frac{v_b v_m}{v_b - v_m} \quad (4)$$

Из (4) и (3)

$$\left(\frac{v_b v_m}{v_b - v_m} \right) \cdot \frac{v_b}{v_m} + 49 = \left(\frac{v_b v_m}{v_b - v_m} \right) \cdot \frac{v_m}{v_b}$$

$$\frac{v_b^2}{v_b - v_m} + 49 = \frac{v_m^2}{v_b - v_m} \quad | \cdot (v_b - v_m)$$

$$v_b^2 + 49v_b - 49v_m - v_m^2 = 0$$

$$(v_b - v_m)(v_b + v_m) + 49(v_b - v_m) = 0$$

$$(v_b - v_m)(v_b + v_m + 49) = 0$$

$$v_b = v_m \quad \text{или}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1

☐

2

☐

3

☐

4

☐

5

☐

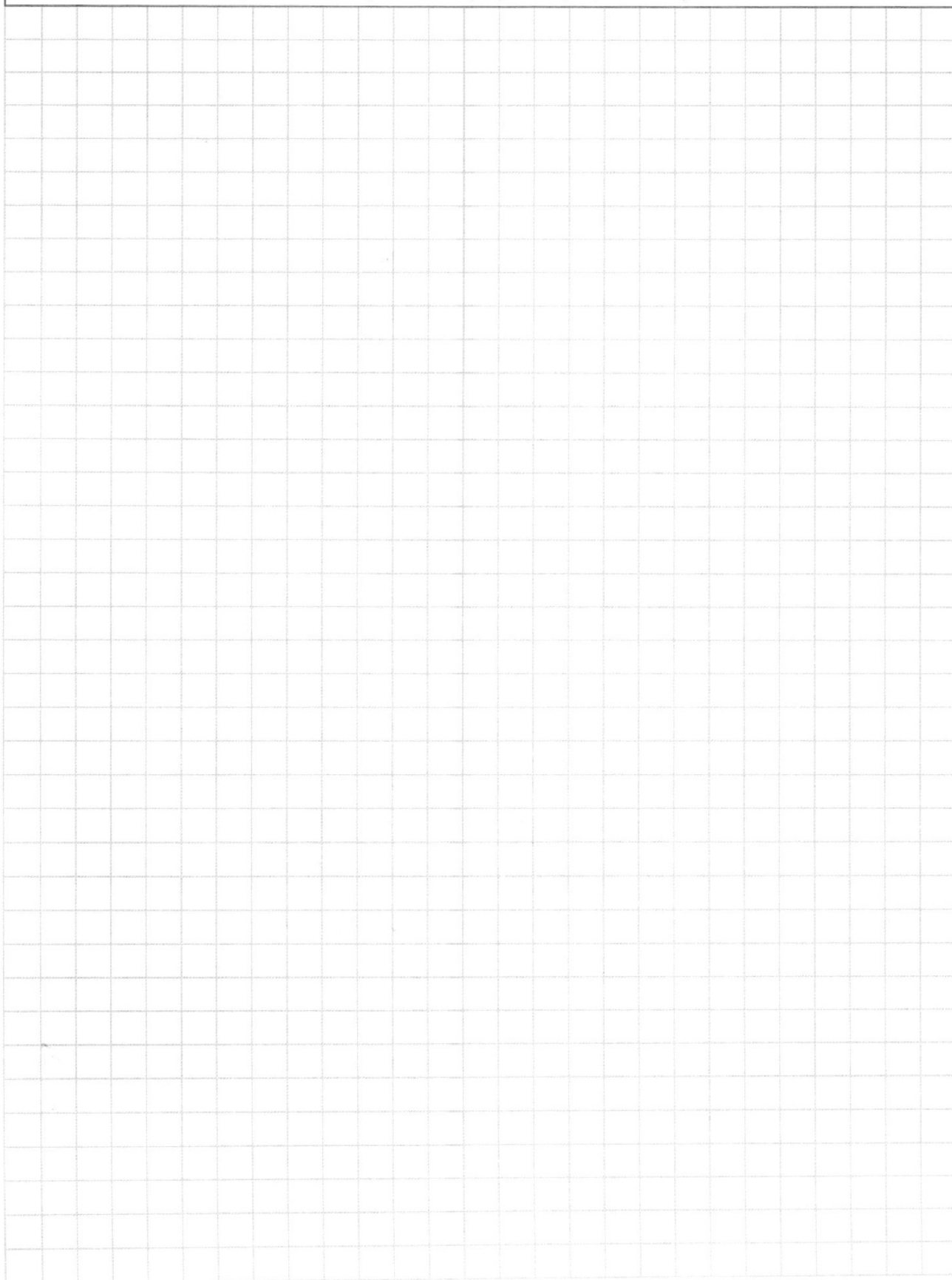
6

☐

7

☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x \quad (\text{введем обе части в квадрат})$$

$$\text{ДЗ: } 3x^2 - 5x + 6 \geq 0 \quad 3x^2 + x + 1 \geq 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 3 \cdot 6 < 0 \quad D = 1 - 4 \cdot 3 < 0$$

$$3x^2 - 5x + 6 - 2\sqrt{3x^2 - 5x + 6}\sqrt{3x^2 + x + 1} + 3x^2 + x + 1 = 25 - 60x + 36x^2$$

$$\frac{3x^2 - 5x + 6 + 3x^2 + x + 1 - 25 + 60x - 36x^2}{2\sqrt{3x^2 - 5x + 6}\sqrt{3x^2 + x + 1}} =$$

$$-30x^2 + 56x - 18 = 2\sqrt{3x^2 - 5x + 6}\sqrt{3x^2 + x + 1} \quad | :2$$

$$-15x^2 + 28x - 9 = \sqrt{3x^2 - 5x + 6}\sqrt{3x^2 + x + 1}$$

$$(-15x^2 + 28x - 9)^2 = (3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)$$

$$(-15x^2 + 28x - 9)(-15x^2 + 28x - 9) = 9x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 15x^3 - 5x^2 - 5x + 18x^2 + 6x + 6$$

$$15^2 x^4 - 15 \cdot 28 x^3 + 15 \cdot 9 x^2 - 15 \cdot 28 x^3 + 28^2 x^2 - 9 \cdot 28 x + 9 \cdot 15 x^2 - 9 \cdot 28 x + 81 = 9x^4 - 12x^3 + 16x^2 + x + 6$$

$$225x^4 - 840x^3 + (135 + 784 + 135)x^2 -$$

$$-504x + 81 = 9x^4 - 12x^3 + 16x^2 + x + 6$$

$$\begin{array}{r} .10 \\ -225 \\ 9 \\ \hline 216 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} .10 \\ -840 \\ 12 \\ \hline 828 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ +135 \\ 135 \\ +240 \\ 784 \\ \hline 1059 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} .10 \\ -1054 \\ 16 \\ \hline 1038 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6^1 \\ +18 \\ 128 \\ +144 \\ 36 \\ \hline 504 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4^1 \\ +15 \\ 145 \\ +140 \\ 28 \\ \hline 4201 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2^1 \\ +28 \\ 28 \\ +224 \\ 58 \\ \hline 284 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2^1 \\ +15 \\ 145 \\ +30 \\ 175 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4^1 \\ +15 \\ 15 \\ +9 \\ 24 \\ \hline 135 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2^1 \\ +28 \\ 28 \\ +224 \\ 58 \\ \hline 284 \end{array}$$